$$= \frac{1}{2} \lim_{x \to +\infty} \underbrace{\frac{2 \sin 2x}{\sin 2x + 2x \cos 2x + 2x \cos 2x - 2x^2 \sin 2x}}_{\text{«Неопределенность» вида } \frac{0}{0}\text{. Вторично применяем правило Лопиталя}} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \to +0} \frac{4 \cos 2x}{2 \cos 2x + 4 \cos 2x - 8x \sin 2x - 4x \sin 2x - 4x^2 \cos 2x} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{2+4} = \frac{1}{3}.$$

И тогда $\lim\limits_{x \to +0} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{3}}$.

Задача 30, 28 (для самостоятельного решения). Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)^{\frac{1}{x}}$ (0^0)

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x\right)^x$ (0^0)

3) $\lim\limits_{x \to 0} (\cos ax)^{\frac{1}{x^2}}$ (1^∞)

Ответ. 1) 1; 2) $e^{-\frac{2}{\pi}}$; 3) $\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{a^2}{2}}$.

Задача 30, 29 (для самостоятельного решения). Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x \to 0} (\cos ax)^{\operatorname{cosec}^2 bx}$ (1^∞);

2) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ (1^∞);

3) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$ (1^∞);

4) $\lim\limits_{x \to +0} (-\ln x)^x$ (∞^0);

5) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{\sin 2x}$ (∞^0).

Ответ. 1) $e^{-\frac{a^2}{2b^2}}$; 2) e; 3) e^{-1}; 4) 1; 5) 1.

ТРИДЦАТЬ ПЕРВОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Возрастание и убывание функций.

Краткие сведения из теории

Определение 1. *Функция $f(x)$ называется возрастающей в некотором интервале, если для любых двух чисел x_1 и x_2 из этого интервала из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) > f(x_1)$.*

Если же из неравенства $x_2 > x_1$ следует нестрогое* неравенство $f(x_2) \geqslant f(x_1)$, то функция называется неубывающей в этом интервале.

Определение 2. *Функция $f(x)$ называется убывающей в некотором интервале, если для любых двух чисел x_1 и x_2 из этого интервала из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) < f(x_1)$.*

Если же из неравенства $x_2 > x_1$ следует нестрогое неравенство $f(x_2) \leqslant f(x_1)$, то функция называется невозрастающей в этом интервале. Функции возрастающие и убывающие, а также функции невозрастающие и неубывающие называются монотонными.

ПРИЗНАКИ ВОЗРАСТАНИЯ И УБЫВАНИЯ ФУНКЦИЙ

Следующая теорема выражает важный для практических целей признак строгого возрастания и строгого убывания функции и указывает правило для определения интервалов, в которых функция возрастает и убывает (иначе, интервалов монотонности функции).

Теорема. *Если во всех точках некоторого интервала первая производная $f'(x) > 0$, то функция $f(x)$ в этом интервале возрастает. Если же во всех точках некоторого интервала первая производная $f'(x) < 0$, то функция в этом интервале убывает.*

Эта теорема выражает достаточный признак возрастания и убывания функции на интервале.

Замечание. *Строгое возрастание или строгое убывание функции на интервале не исключает возможности обращения в нуль первой производной функции в некоторых* ***отдельных точках*** *этого интервала. Слова «отдельных точках» подчеркнуты потому, что в случае строгого возрастания или строгого убывания функции точки, в которых первая производная обращается в нуль, не должны сплошь заполнять никакого частичного интервала, даже малого, ибо если бы это имело место, то функция в этих частичных интервалах сохраняла бы постоянное значение и тем самым не была бы строго возрастающей или строго убывающей на всем рассматриваемом интервале.*

Правило. *Для определения интервалов строгого возрастания и строгого убывания функции следует решить неравенства:*

$$f'(x) > 0 \text{ и } f'(x) < 0. \qquad (31,1)$$

Следует также рассмотреть, как располагаются в этих интервалах точки, в которых $f'(x)$ обращается в нуль. Если окажется, что эти точки не заполняют сплошь какого-либо частичного интервала, то неравенства (31,1) укажут интервалы строгого возрастания и строгого убывания функции.

---

* Неравенства вида $a < b$ и $a > b$ называются строгими, а неравенства вида $a \leqslant b$ и $a \geqslant b$ — нестрогими.

При решении задач, в которых требуется определить интервалы возрастания и убывания функции, следует прежде всего определить область существования этой функции.

Задача. 31,1. Определить интервалы возрастания и убывания функции

$$f(x) = x^3 - 12x + 11.$$

Решение. Областью существования данной функции является вся ось Ox (функция существует при любом значении x). Ее производная $f'(x) = 3x^2 - 12$. Чтобы найти интервалы возрастания функции, решим неравенство $3x^2 - 12 > 0$. Деля на 3 обе его части, получаем $x^2 - 4 > 0$. Отсюда следует, что $x^2 > 4$, а $x < -2$ и $x > 2$, т. е. $|x| > 2$. Следовательно, данная функция возрастает в двух бесконечных интервалах: $(-\infty, -2)$ и $(2, +\infty)$. Чтобы определить интервалы убывания функции, решим неравенство $3x^2 - 12 < 0$ или $x^2 - 4 < 0$, из которого следует, что $x^2 < 4$, а $x < 2$, или $x > -2$, т. е. $|x| < 2$. Отсюда заключаем, что функция убывает на интервале $(-2; 2)$. Производная функция $3x^2 - 12$ обращается в нуль при $x = -2$ и $x = +2$. В точке $x = -2$ функция переходит от возрастания к убыванию, а в точке $x = +2$ она от убывания переходит к возрастанию.

Легко усмотреть, что $f(1) = 0$, а $f(0) = 11$. Так как $f(1) = 0$, то $x^3 - 12x + 11$ делится без остатка на $x - 1$ и мы получаем, что

$$x^3 - 12x + 11 = (x - 1)(x^2 + x - 11).$$

Приравняв последнее выражение нулю и решая уравнение $x^2 + x - 11 = 0$, найдем и другие два значения x, при которых $f(x) = 0$. Этими значениями являются

$$x = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{45}}{2}; \quad x_1 \approx -3{,}85; \quad x_2 \approx 2{,}85.$$

Полученных данных достаточно, чтобы составить представление о графике функции. Постройте его эскиз.

Задача 31,2 (для самостоятельного решения). Найти интервалы возрастания и убывания функции $f(x) = x^3 - 3x - 2$. Построить эскиз графика.

Ответ. Функция возрастает в интервалах $(-\infty, -1)$ и $(1, +\infty)$; $f(2) = 0$; $f(-1) = 0$; $f(0) = -2$; $f'(x) = 0$ при $x = -1$ и $x = 1$.

Задача 31,3 (для самостоятельного решения). Доказать, что функция $f(x) = x^3$ возрастает на бесконечном интервале $(-\infty, +\infty)$, а ее производная обращается в нуль при $x = 0$.

Задача 31,4. Определить интервалы возрастания и убывания функции

$$y = \sin x.$$

Решение. Область определения функции — вся ось Ox. Находим $y' = \cos x$. Решаем неравенство $\cos x > 0$.

Это неравенство, выполняясь на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, выполняется также и на интервалах $\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, где k — любое целое положительное или отрицательное число, так как функция $\cos x$ — периодическая, а ее период $T = 2\pi$.

Заключение. Функция $y = \sin x$ возрастает на интервалах

$$\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \text{ где } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Решая неравенство $\cos x < 0$, получаем, что оно выполняется в интервалах $\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$, где k — любое целое положительное или отрицательное число, а потому приходим к заключению, что функция $y = \sin x$ убывает в этих интервалах.

Задача 31,4а (для самостоятельного решения). Доказать, что функция $f(x) = \operatorname{tg} x$ возрастает во всех интервалах, в которых она существует.

Задача 31,5 (для самостоятельного решения). Доказать, что функция $f(x) = \operatorname{ctg} x$ убывает во всех интервалах, в которых она существует.

Задача 31, 6. Найти интервалы возрастания и убывания функции

$$f(x) = \frac{2x^2}{1 - x^2}.$$

Решение. Функция существует при всех значениях x, кроме $x = -1$ и $x = +1$, т. е. областью ее существования являются интервалы: $(-\infty, -1)$; $(-1, 1)$ и $(1, +\infty)$.

Находим производную функции

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1 - x^2 + 2x^2}{(1 - x^2)^2}; \quad f'(x) = \frac{2(1 + x^2)}{(1 - x^2)^2}.$$

Числитель и знаменатель последней дроби положительны при всех значениях x (значения $x = -1$ и $x = +1$ не должны рассматриваться, так как при этих значениях не существует и заданная функция). Значит, во всех интервалах в которых функция определена, она возрастает.

Задача 31,7 (для самостоятельного решения). Определить интервалы возрастания и убывания функции $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$. Начертить эскиз графика функции.

Ответ. Функция возрастает в интервале $(-1, +1)$, убывает в интервалах $(-\infty, -1)$ и $(1, +\infty)$; $f'(x) = \frac{2(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2}$.

Задача 31,8. Определить интервалы возрастания и убывания функции

$$y = 4x^3 - 21x^2 + 18x + 20.$$

1) **Решение.** Функция существует при всех значениях x:

$$y' = 12x^2 - 42x + 18 = 6(4x^2 - 7x + 3); \quad y' = 6(2x - 1)(x - 3).$$

Решаем неравенства: 1) $y' > 0$ и 2) $y' < 0$.

1. Решаем неравенство $y' > 0$; $6(2x - 1)(x - 3) > 0$.

Произведение двух множителей положительно тогда, когда они оба имеют один и тот же знак, т. е. когда они одновременно положительны или одновременно отрицательны. Эти соображения приводят к двум системам неравенств:

$$\begin{cases} 2x - 1 > 0 \\ x - 3 > 0 \end{cases} (A) \qquad \begin{cases} 2x - 1 < 0 \\ x - 3 < 0 \end{cases} (B)$$

Первое из неравенств (A) дает $x > \frac{1}{2}$, а второе $x > 3$; поэтому неравенства (A) приводят к заключению, что $x > 3$. Из неравенств (B) получаем: из первого $x < \frac{1}{2}$, из второго $x < 3$; приходим к заключению, что эти неравенства выполняются при $x < \frac{1}{2}$. Таким образом, функция возрастает в интервалах $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ и $(3, +\infty)$.

2) Теперь решим неравенство $y' < 0$; $6(2x - 1)(x - 3) < 0$ или $(2x - 1)(x - 3) < 0$. Произведение двух сомножителей отрицательно тогда, когда эти сомножители имеют разные знаки. Это приводит к двум системам неравенств:

$$\begin{cases} 2x - 1 > 0 \\ x - 3 < 0 \end{cases} (C) \qquad \begin{cases} 2x - 1 < 0 \\ x - 3 > 0 \end{cases} (D)$$

В системе (C) из первого неравенства $x > \frac{1}{2}$, из второго $x < 3$; на основании этого заключаем, что (C) выполняется для значений x из интервала $\frac{1}{2} < x < 3$. Система неравенств (D) дает: из первого $x < \frac{1}{2}$, из второго $x > 3$, что противоречиво, так как не может быть, чтобы одновременно x было меньше $\frac{1}{2}$ и больше трех.

Заключение. Неравенство $y' < 0$ выполняется для значений $\frac{1}{2} < x < 3$; таким образом, данная функция убывает на ин-

тервале $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$. В точке $x=\frac{1}{2}$ функция сменяет возрастание на убывание, а в точке $x=3$ убывание прекращается и сменяется возрастанием.

Задача 31,9 (для самостоятельного решения). Найти интервалы возрастания и убывания функции

$$y=x^5-5x^4+5x^3+1.$$

Указание. $y'=5x^2(x^2-4x+3)$. Так как $x^2>0$ при всех $x\neq 0$, то $y'>0$, когда $x^2-4x+3>0$, и $y'<0$ при

$$x^2-4x+3<0;\ x^2-4x+3=(x-1)(x-3).$$

Функция возрастает в интервалах $(-\infty, 1)$ и $(3, +\infty)$, а убывает в интервале $(1,3)$. Производная обращается в нуль при $x=0$, но это значение содержится в интервале $(-\infty, 1)$ где функция возрастает. Этот пример показывает, что хотя в интервале $(-\infty, 1)$ функция строго возрастает, но ее первая производная обратилась в нуль в отдельной точке $(0, 0)$.

ТРИДЦАТЬ ВТОРОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Определение максимума и минимума функций. Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Определение максимума. *Говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке $x=x_0$ максимум, если значение функции в этой точке больше, чем ее значение во всех точках, достаточно близких к x_0.*

Иначе: функция $f(x)$ имеет максимум при $x=x_0$, если

$$f(x_0+\Delta x)<f(x_0)$$

для любых Δx — как положительных, так и отрицательных, но достаточно малых по абсолютной величине.

Определение минимума. *Говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке $x=x_0$ минимум, если значение функции в этой точке меньше, чем ее значения во всех точках, достаточно близких к x_0.*

Иначе: функция $f(x)$ имеет минимум при $x=x_0$, если

$$f(x_0+\Delta x)>f(x_0)$$

для любых как положительных, так и отрицательных Δx, достаточно малых по абсолютной величине.

Если в некоторой точке функция имеет максимум или минимум, то говорят, что в этой точке имеет место экстремум, а значение функции в этой точке называется экстремальным.