тервале $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$. В точке $x=\frac{1}{2}$ функция сменяет возрастание на убывание, а в точке $x=3$ убывание прекращается и сменяется возрастанием.

Задача 31,9 (для самостоятельного решения). Найти интервалы возрастания и убывания функции

$$y=x^5-5x^4+5x^3+1.$$

Указание. $y'=5x^2(x^2-4x+3)$. Так как $x^2>0$ при всех $x\neq 0$, то $y'>0$, когда $x^2-4x+3>0$, и $y'<0$ при

$$x^2-4x+3<0;\ x^2-4x+3=(x-1)(x-3).$$

Функция возрастает в интервалах $(-\infty, 1)$ и $(3, +\infty)$, а убывает в интервале $(1,3)$. Производная обращается в нуль при $x=0$, но это значение содержится в интервале $(-\infty, 1)$ где функция возрастает. Этот пример показывает, что хотя в интервале $(-\infty, 1)$ функция строго возрастает, но ее первая производная обратилась в нуль в отдельной точке $(0, 0)$.

ТРИДЦАТЬ ВТОРОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Определение максимума и минимума функций. Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Определение максимума. *Говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке $x=x_0$ максимум, если значение функции в этой точке больше, чем ее значение во всех точках, достаточно близких к x_0.*

Иначе: функция $f(x)$ имеет максимум при $x=x_0$, если

$$f(x_0+\Delta x)<f(x_0)$$

для любых Δx — как положительных, так и отрицательных, но достаточно малых по абсолютной величине.

Определение минимума. *Говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке $x=x_0$ минимум, если значение функции в этой точке меньше, чем ее значения во всех точках, достаточно близких к x_0.*

Иначе: функция $f(x)$ имеет минимум при $x=x_0$, если

$$f(x_0+\Delta x)>f(x_0)$$

для любых как положительных, так и отрицательных Δx, достаточно малых по абсолютной величине.

Если в некоторой точке функция имеет максимум или минимум, то говорят, что в этой точке имеет место экстремум, а значение функции в этой точке называется экстремальным.

Замечание. *Следует помнить: 1) Максимум (минимум) не является обязательно наибольшим (наименьшим) значением, принимаемым функцией. Вне рассматриваемой окрестности точки x_0 функция может принимать бо́льшие (меньшие) значения, чем в этой точке. 2) Функция может иметь несколько максимумов и минимумов. 3) Функция, определенная на отрезке, может достигнуть экстремума только во внутренних точках этого отрезка.*

Необходимое условие экстремума. *Если функция $f(x)$ имеет экстремум при $x = x_0$, то ее производная в этой точке равна нулю, или ∞, или вовсе не существует.*

Из этого следует, что точки экстремума функции следует разыскивать только среди тех, в которых ее первая производная $f'(x) = 0$, $f'(x) = \infty$ или не существует. *Исследование остальных точек отпадает. Точки, в которых первая производная функции равна нулю, бесконечности, а также те, в которых она не существует, но функция сохраняет непрерывность, называются критическими.*

Следует уяснить, что указанный признак экстремума является только необходимым, но отнюдь не достаточным: производная функции может быть равна нулю, ∞ или не существовать не только в тех точках, в которых функция достигает экстремума. Поэтому определив критические точки, в которых функция может достигать экстремума, надо каждую из точек в отдельности исследовать на основании достаточных условий существования экстремума. Укажем два таких достаточных условия.

ПЕРВОЕ ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЭКСТРЕМУМА ФУНКЦИИ

Пусть точка $x = x_0$ является критической точкой функции $f(x)$, а сама функция $f(x)$ непрерывна и дифференцируема во всех точках некоторого интервала, содержащего эту точку (за исключением возможно самой этой точки). Тогда: 1) если при $x < x_0$ производная функция $f'(x) > 0$, а при $x > x_0$ $f'(x) < 0$, то при $x = x_0$ имеет место максимум, т. е. если при переходе слева направо через критическую точку первая производная функции меняет знак с плюса на минус, то в этой точке функция достигает максимума; 2) если при $x < x_0$ $f'(x) < 0$, а при $x > x_0$ $f'(x) > 0$, то при $x = x_0$ имеет место минимум; иначе: если при переходе слева направо через критическую точку первая производная функции меняет знак с минуса на плюс, то в этой точке функция достигает минимума; 3) если же при переходе через критическую точку первая производная функции не меняет знак, то экстремума нет.

ВТОРОЕ ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЭКСТРЕМУМА

Если в точке $x = x_0$ первая производная функции $f(x)$ равна нулю: $f'(x_0) = 0$, то при $x = x_0$ имеет место максимум, если $f''(x_0) < 0$, и минимум, если $f''(x_0) > 0$. Если же $f''(x) = 0$, то для заключения об экстремуме в этой точке требуется дальнейшее исследование (предполагается, что функция $f(x)$ в окрестности точки $x = x_0$ имеет непрерывную вторую производную).

Способ, которым функция исследуется на экстремум с помощью первого достаточного условия (по первой производной), мы будем называть первым, а способ исследования функции на экстремум на основании второго достаточного условия (по второй производной) — вторым.

Правило для исследования функции на экстремум при помощи первой производной (первый способ)

Для исследования функции на экстремум по первой производной следует:

1. Найти $f'(x)$ — первую производную функции.

2. Решить уравнение $f(x) = 0$, а также определить те значения x, при которых $f'(x) = \infty$ или не существует (короче: найти критические точки функции $f(x)$. Пусть этими точками будут точки с абциссами x_1, x_2, $x_3 \ldots$, x_n, которые находятся в интервале (a, b).

3. Все критические точки расположить в порядке возрастания их абсцисс в интервале (a, b).

$$a < x_1 < x_2 < x_3 <, \ldots < x_n < b.$$

4. Внутри каждого из интервалов (a, x_1); (x_1, x_2); (x_2, x_2); ... (x_n, b) взять любую точку и установить в этой точке знак первой производной функции (производная сохраняет знак в каждом интервале между двумя соседними критическими точками).

5. Рассмотреть знаки $f'(x)$ в двух соседних интервалах, переходя последовательно слева направо от первого интервала к последнему. Если при таком переходе знаки $f'(x)$ в двух соседних интервалах различны, то экстремум в критической точке есть: максимум будет, если знак поменяется с $+$ на $-$, а минимум, если он поменяется с $-$ на $+$. Если же в двух соседних интервалах имеет место сохранение знака первой производной, то экстремума в рассматриваемой критической точке нет.

6. Найти значения функции в точках, где она достигает экстремума (экстремальные значения функции).

Правило для исследования функции на экстремум по второй производной (второй способ)

Для того чтобы исследовать функцию на экстремум по второй производной, следует:

1. Найти $f'(x)$ — первую производную функции.

2. Решить уравнение $f'(x) = 0$.

3. Исследовать знак $f''(x)$ — второй производной функции — в каждой точке, найденной в п. 2. Если окажется, что в рассматриваемой точке $f''(x) > 0$, то в этой точке будет минимум, а если $f''(x) < 0$, то в ней будет максимум. Если же окажется, что в рассматриваемой точке $f''(x) = 0$, то исследование надлежит провести по первому правилу.

Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то на этом отрезке всегда имеются точки, в которых она принимает наибольшее и наименьшее значения. Этих значений функция достигает или в критических точках, или на концах отрезка $[a, b]$. Поэтому, ***чтобы определить наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке, надо: 1) определить критические точки функции; 2) вычислить значения функции в критических точках и на концах отрезка $[a, b]$; 3) наибольшее из значений, найденных в п. 2, будет наибольшим, а наименьшее — наименьшим значением функции на отрезке $[a, b]$.***

Задача 32,1. Найти экстремум функции $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2$, а также определить ее наибольшее и наименьшее значение на отрезке $[-2, 4]$.

Решение. Проведем решение сначала по первому правилу, а потом по второму. Областью существования функции является весь бесконечный интервал $(-\infty, +\infty)$.

1. Находим, что

$$f'(x) = x^3 - 2x^2 - 3x.$$

2. Решаем уравнение $f'(x) = 0$, т. е. уравнение (32,1)

$$x^3 - 2x^2 - 3x = 0.$$

Разлагаем левую часть уравнения на множители:

$$x(x^2 - 2x - 3) = 0, \qquad (32,2)$$

откуда $x_1 = 0$; $x^2 - 2x - 3 = 0$, а $x_2 = 3$; $x_3 = -1$.

Производная конечна при любом x (говорят в этом случае, что производная конечна всюду). Поэтому критическими точками будут только найденные из (32,2).

3. Располагаем критические точки в порядке возрастания абсцисс: -1; 0; 3.

4. Рассмотрим интервалы

$$(-\infty, -1); \ (-1,0); \ (0,3) \ (3, +\infty) \qquad (32,3)$$

Выберем внутри каждого из этих интервалов произвольную точку и определим в этой точке знак первой производной по выражению (32,1). В интервале $(-\infty, -1)$ возьмем, например, точку $x=-2$; $f'(-2)=(-2)^3-2(-2)^2-3(-2)=-10<0$; в интервале $(-1,0)$ возьмем точку $x=-\frac{1}{2}$: $f'\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{8}>0$; в интервале $(0,3)$ возьмем точку $x=1$ и вычислим в ней $f'(x): f'(1)=-4<0$: в интервале $(3, +\infty)$ возьмем точку $x=4: f'(4)=20>0$ (вместо этих точек читатель может в каждом из интервалов (32,3) взять любые другие). Таким образом, в интервалах (32,3) первая производная имеет такую последовательность знаков:

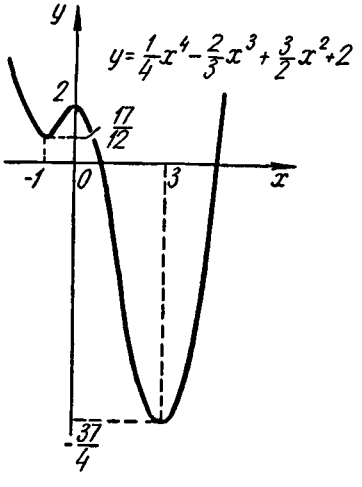
$$\underbrace{-,}_{min} \ \underbrace{+,}_{max} \ \underbrace{-,}_{min} \ +,$$

и мы приходим к заключению, что в критической точке $x=-1$ имеет место минимум, в критической точке $x=0$ — максимум; а в критической точке $x=3$ — минимум. Найдем теперь экстремальные значения функции

$$f(-1)=\frac{17}{12}; \ f(0)=2; \ f(3)=-\frac{37}{4}, \qquad (32,4)$$

Эскиз графика представлен на фиг. 32,1.

Теперь проведем решение по второму правилу, т. е. исследуем функцию на экстремум с помощью второй производной.



Фиг. 32,1.

У нас критические точки уже определены: $x_1=-1$; $x_2=0$ и $x_3=3$. Найдем вторую производную функции. Дифференцируя первую производную, получаем $f''(x)=3x^2-4x-3$, и согласно второму правилу определяем знак второй производной в каждой критической точке:

$f''(-1)=4>0$; при $x=-1$ функция имеет минимум,

$f''(0)-3<0$; при $x=0$ функция имеет максимум,

$f''(3)=12>0$; при $x=3$ функция имеет минимум.

Читатель должен отметить, что исследование, проведенное по второму способу, было значительно проще. Однако от исследования функции на экстремум по первому правилу при помощи первой производной отказываться не следует, так как может оказаться, что в критической точке вторая производная окажется равной нулю, а в этом случае нельзя сделать никакого заключения о наличии экстремума.

Поэтому упражнения в нахождении экстремума функции по первой производной необходимы. Теперь ответим на второй вопрос задачи: определим наименьшее и наибольшее значение функции на отрезке [—2,4]. Этот отрезок содержит внутри себя все критические точки. Так как значения функции в критических точках мы уже вычислили (32,4), то нам осталось вычислить значения функции на концах отрезка, т. е. $f(-2)$ и $f(4)$: $f(-2) = \frac{16}{3}$; $f(4) = -\frac{2}{3}$. Сравнивая эти значения со значениями (32,4) функции в критических точках, мы видим, что наибольшим из них является $f(-2) = \frac{16}{3}$, а наименьшим — $f(3) = -\frac{37}{4}$, т е. наибольшего значения функция достигает на левом конце отрезка при $x = -2$, а наименьшего — в критической точке $x = 3$. Решим подробно еще одну аналогичную задачу.

Задача 32,2. Определить экстремум функции $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$ и найти ее наименьшее и наибольшее значение на отрезке [2,5].

Решение. Сначала решим задачу по первому способу, а потом — по второму. Областью существования функции является весь бесконечный интервал $(-\infty, +\infty)$. Находим вторую производную функции: $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$. Решим уравнение $3x^2 - 6x + 3 = 0$. Это уравнение имеет только один корень $x = 1$. Производная конечна при любом значении x, а потому $x = 1$ является единственной критической точкой.

Рассмотрим интервалы $(-\infty, 1)$ и $(1, +\infty)$.

Внутри каждого из этих интервалов выберем произвольную точку и определим в ней знак первой производной. Например, в первом интервале возьмем точку $x = 0$, во втором $x = 2$.

$$f'(0) = 3 > 0; \; f'(2) = 3 > 0$$

(читатель вместо этих точек может в каждом из этих интервалов взять любые другие).

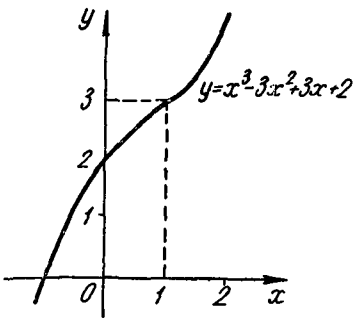
Таким образом, в интервалах $(-\infty, 1)$ и $(1, +\infty)$ имеет место такая последовательность знаков первой производной: $+$, $+$. Из этого мы заключаем, что первая производная знака не поменяла, а потому в точке $x = 1$ экстремума нет.

Если первую производную записать в виде $f'(x) = 3(x-1)^2$, то можно сразу заключить, что она положительна при любом

значении $x \neq 1$, а потому рассматриваемая функция возрастает на всем бесконечном интервале $(-\infty, +\infty)$. Эскиз графика представлен на фиг. 32,2.

Покажем, что по второму правилу с помощью второй производной исследование провести нельзя. Действительно, $f''(x) = 6x - 6$, и в критической точке $x = 1$ имеет, что $f''(1) = 0$. Таким образом, исследование следует вести по первому правилу, а на основании его мы уже заключили, что экстремума нет.

Теперь ответим на второй вопрос задачи. Так как отрезок [2, 5] не содержит критической точки, то для определения наименьшего и наибольшего значения функции на этом отрезке следует определить только значения ее на концах отрезка: $f(2) = 4$, $f(5) = 67$. Наименьшего значения на отрезке [2,5] функция достигает на левом конце при $x = 2$, и это наименьшее значение $f(2) = 4$. Наибольшего значения функция достигает при $x = 5$ — на первом конце отрезка; это значение $f(5) = 67$.



Фиг. 32,2.

Задача 32,3 (для самостоятельного решения). Найти сначала по первому, а потом по второму правилу экстремум функции $y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 7x^2 + 24x + 1$, а также наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке [—5,2].

Указание. Уравнение $x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0$ имеет корни: $x_1 = -4$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$.

Эти корни могут быть легко найдены на основании следствия теоремы Безу, известной из алгебры. Можно также уравнение представить в виде

$$x^3 - 2x^2 + x^2 - 2x - 12x + 24 = 0,$$

а тогда его левая часть равна $(x - 2)(x^2 + x - 12)$.

Ответ. При $x = -4$ минимум; $f(-4) = -\frac{365}{3}$; при $x = 2$ — максимум; $f(2) = \frac{67}{3}$; при $x = 3$ — минимум; $f(3) = \frac{85}{4}$; на отрезке $[-5,2]$: $y_{\text{наиб}} = y(2) = \frac{67}{3}$; $y_{\text{наим.}} = y(-4) = -\frac{365}{3}$, т. е. функция достигает наибольшего значения в критической точке $x = 2$, которая является правым концом отрезка, а наименьшего значения — в критической точке $x = -4$ внутри рассматриваемого отрезка (в этой точке функция достигает также и минимума).

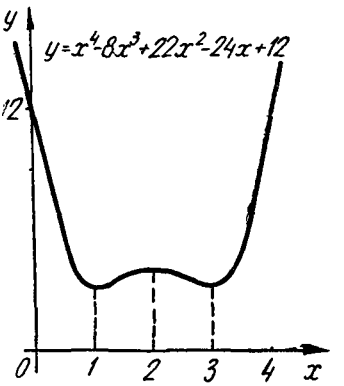
Задача 32,4 (для самостоятельного решения). Найти сначала по первому правилу, а потом по второму экстремум функции

$$y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12.$$

Указание. Уравнение $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ может быть переписано так: $x^3 - x^2 - 5x^2 + 5x + 6x - 6 = 0$, или $(x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0$. Корни этого уравнения: $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$.

Ответ. При $x = 1$ — минимум; $f(1) = 3$; при $x = 2$ — максимум; $f(2) = 4$; при $x = 3$ — минимум; $f(3) = 3$ (см. фиг. 32,3).

Задача 32,5. Исследовать на экстремум функцию $y = x^4 + 8x^3 + 16x^2$, а также найти ее наибольшее и наименьшее значение на отрезке $[-3, 1]$.



Фиг. 32,3.

Решение. Область существования — бесконечный интервал $(-\infty, +\infty)$. Первая производная $f'(x) = 4x^3 + 24x^2 + 32x$. Для определения критических точек решаем уравнение

$$4x^3 + 24x^2 + 32x = 0.$$

Перепишем его в виде $x(x^2 + 6x + 8) = 0$, откуда $x = 0$; $x^2 + 6x + 8 = 0$. Критические точки: $x_1 = -4$; $x_2 - 2$; $x_3 = 0$.

Применим первое правило. Критические точки разбивают область существования функции на интервалы.

$$(-\infty, -4); \ (-4, -2); \ (-2, 0); \ (0, +\infty).$$

В каждом из этих интервалов первая производная сохраняет знак. Поэтому для исследования в них знака первой производной можно в каждом интервале выбрать произвольную точку. В первом интервале возьмем точку $x = -5$, $f'(-5) = -60 < 0$; во втором интервале возьмем точку $x = -3$; $f'(-3) = +12 > 0$; в третьем интервале выберем точку $x = -1$; $f'(-1) = -12 < 0$ в четвертом интервале — точку $x = +1$; $f'(1) = 60 > 0$.

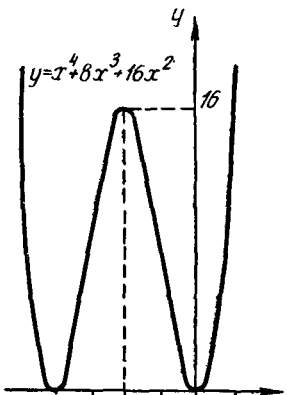
Последовательность знаков первой производной в рассмотренных интервалах запишется так:

$$\underbrace{-,}_{\min}\ \underbrace{+,}_{\max}\ \underbrace{-,}_{\min}\ \underbrace{+.}$$

Следовательно, при $x = -4$ имеем минимум, а $f(-4) = 0$; при $x = -2$ — максимум и $f(-2) = 16$, а при $x = 0$ — минимум,

причем $f(0) = 0$. Эскиз графика представлен на фиг. 32,4. Вторым способом задачу решите самостоятельно.

Найдем теперь наименьшее и наибольшее значение функции на отрезке $[-3,1]$. На этом отрезке имеются две критические точки $x = -2$ и $x = 0$; $f(-2) = 16$, $f(0) = 0$. Для решения вопроса о наибольшем и наименьшем значении в нем функции надо еще рассмотреть значения функции на концах отрезка: $f(-3)$ и $f(1)$. Подсчет показывает, что $f(-3) = 9$, а $f(1) = 25$. Сравнивая эти значения функции с ее значениями в критических точках, приходим к заключению, что наименьшее значение функции в точке $x = 0$, и оно равно 0, а наибольшее значение функция имеет на правом конце рассматриваемого отрезка в точке $x = 1$, и оно равно 25.



Фиг. 32,4.

Задача 32,6 (для самостоятельного решения). Исследовать на экстремум по второму правилу функцию $f(x) = x^4 - \frac{20}{3}x^3 + 8x^2$. Начертить эскиз графика функции.

Ответ. Критические точки: $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = 4$. При $x_1 = 0$ — минимум; при $x_2 = 1$ — максимум; при $x_3 = 4$ — минимум.

Задача 32,7 (для самостоятельного решения). По второму правилу исследовать на экстремум функцию

$$y = 4x^3 - 21x^2 + 18x + 20.$$

Ответ. Критические точки: $x_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = 3$; при $x = \frac{1}{2}$ — максимум, при $x = 3$ — минимум;

$$y_{\max} = \frac{97}{4};\ y_{\min} = -7.$$

Задача 32,8. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x) = (x-1)^3(x+1)^2.$$

Решение. Функция определена при всех значениях x. Проведем решение по первому и второму правилам. Начнем с определения первой производной:

$$f'(x) = 3(x-1)^2(x+1)^2 + 3(x+1)(x-1)^3 =$$
$$= (x-1)^2(x+1)(5x+1).$$

Так как производная имеет конечное значение при любом x, то критическими точками будут только те, в которых первая производная равна нулю. Решая уравнение $(x-1)^2(x+1)(5x+1)=0$, находим критические точки; $x_1=-1$; $x_2=-\frac{1}{5}$; $x_3=1$.

Эти точки разбивают интервал $(-\infty, +\infty)$, в котором существует заданная функция, на интервалы.

$$(-\infty, -1); \left(-1, -\frac{1}{5}\right); \left(-\frac{1}{5}, 1\right); (1, +\infty).$$

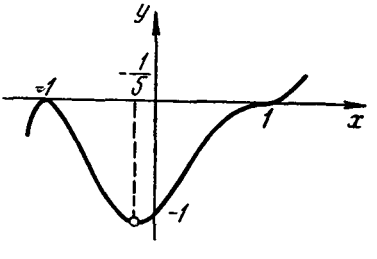
Теперь мы должны исследовать знак первой производной в каждом из этих интервалов. Учитывая, что в каждом из этих интервалов первая производная сохраняет знак, мы можем в каждом из них рассмотреть любую точку. Возьмем в первом интервале $x=-2$; $f'(-2)=81>0$. Во втором интервале берем $x=-\frac{1}{2}$; $f'\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{27}{16}<0$. В третьем интервале берем $x=0$;

$$f'(0)=1>0.$$

В четвертом интервале возьмем $x=2$; $f'(2)=33>0$ (вместо этих точек читатель может в каждом из этих интервалов взять любые другие). Последовательность знаков первой производной будет такой:

$$\underbrace{+,\ -}_{\max}\ \underbrace{-,\ +}_{\min},\ +.$$

Из рассмотрения этой последовательности знаков заключаем, что в точке $x=-1$ — максимум, а $f(-1)=0$; в точке $x=-\frac{1}{5}$ — минимум, а $f\left(-\frac{1}{5}\right)=-1\frac{331}{3125}$; в точке $x=1$ экстремума нет; $f(1)=0$; в интервале $\left(-\frac{1}{5}, +\infty\right)$ функция возрастает, так как ее первая производная в этом интервале положительна (эскиз графика представлен на фиг. 32,5). Теперь решим эту же задачу по второму правилу. Находим, что



Фиг. 32.5.

$$f''(x)=2(x-1)(x+1)(5x+1)+(x-1)^2(5x+1)+5(x-1)^2(x+1).$$

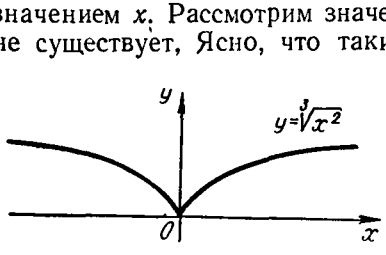
Поскольку нас интересует только знак второй производной в критических точках, то нет надобности упрощать это выражение. Подставляя в это выражение критические значения x, получим:

$f''(-1) = -16 < 0$. Значит, при $x = -1$ функция имеет максимум; $f''\left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{143}{25} > 0$. Это означает, что при $x = -\frac{1}{5}$ минимум $f''(1) = 0$. Для заключения о поведении функции в этой точке надо прибегнуть к исследованию по первой производной (оно уже было проведено выше: в этой точке экстремума нет).

Задача 32,9. Определить экстремум функции $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$.

Решение. Легко находим, что $f'(x) = \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{x}}$.

Уравнение $\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{x}} = 0$ не удовлетворяется ни одним конечным значением x. Рассмотрим значения x, при которых $f'(x) = \infty$ или не существует, Ясно, что таким единственным значением будет $x = 0$. Таким образом, имеется только одна критическая точка $x = 0$, которая весь бесконечный интервал $(-\infty, +\infty)$ существования функции разбивает на 2 интервала: $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$. Исследуем знак первой производной в любой точке каждого из этих интервалов. Возьмем, например, в первом интервале точку $x = -1$; $f'(-1) = -\frac{2}{3} < 0$; во втором интервале возьмем точку $x = 1$; $f'(1) = \frac{2}{3} > 0$. Последовательность знаков первой производной:



Фиг. 32,6.

$$\underbrace{-,\ +}_{\min}$$

Так как производная меняет знак с — на +, то в критической точке $x=0$ функция имеет минимум, и $f(0) = 0$. Эскиз графика представлен на фиг. 32,6.

Исследование заданной функции во второй производной провести нельзя, так как $f''(x)$ не существует в точке $x = 0$.

ТРИДЦАТЬ ТРЕТЬЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Продолжение упражнений на определение максимума и минимума функций и их наибольшего и наименьшего значения на отрезке (необходимые краткие сведения из теории помещены в тридцать втором практическом занятии).

Задача 33,1. Определить экстремум квадратичной функции

$$y = ax^2 + bx + c.$$