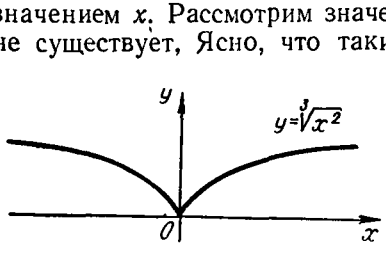
$f''(-1) = -16 < 0$. Значит, при $x = -1$ функция имеет максимум; $f''\left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{143}{25} > 0$. Это означает, что при $x = -\frac{1}{5}$ минимум $f''(1) = 0$. Для заключения о поведении функции в этой точке надо прибегнуть к исследованию по первой производной (оно уже было проведено выше: в этой точке экстремума нет).

Задача 32,9. Определить экстремум функции $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$.

Решение. Легко находим, что $f'(x) = \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{x}}$.

Уравнение $\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{x}} = 0$ не удовлетворяется ни одним конечным значением x. Рассмотрим значения x, при которых $f'(x) = \infty$ или не существует, Ясно, что таким единственным значением будет $x = 0$. Таким образом, имеется только одна критическая точка $x = 0$, которая весь бесконечный интервал $(-\infty, +\infty)$ существования функции разбивает на 2 интервала: $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$. Исследуем знак первой производной в любой точке каждого из этих интервалов. Возьмем, например, в первом интервале точку $x = -1$; $f'(-1) = -\frac{2}{3} < 0$; во втором интервале возьмем точку $x = 1$; $f'(1) = \frac{2}{3} > 0$. Последовательность знаков первой производной:



Фиг. 32,6.

$$\underbrace{-,\ +}_{\min}$$

Так как производная меняет знак с — на +, то в критической точке $x=0$ функция имеет минимум, и $f(0) = 0$. Эскиз графика представлен на фиг. 32,6.

Исследование заданной функции во второй производной провести нельзя, так как $f''(x)$ не существует в точке $x = 0$.

ТРИДЦАТЬ ТРЕТЬЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Продолжение упражнений на определение максимума и минимума функций и их наибольшего и наименьшего значения на отрезке (необходимые краткие сведения из теории помещены в тридцать втором практическом занятии).

Задача 33,1. Определить экстремум квадратичной функции

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Решение. Прежде всего находим первую производную функции

$$y' = 2ax + b$$

и решаем уравнение $2ax + b = 0$; $x = -\frac{b}{2a}$. Бесконечный интервал $(-\infty, +\infty)$ существования заданной функции разбивается на два:

$$\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right); \quad \left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right). \tag{33,1}$$

Для исследования вопроса о знаке первой производной в этих интервалах возьмем в каждом из них произвольную точку: например, в первом — точку $-\frac{b}{2a} - 1$, а во втором — $-\frac{b}{2a} + 1$, и вычислим первую производную функции в этих точках:

$$y'\left(-\frac{b}{2a} - 1\right) = 2a\left(-\frac{b}{2a} - 1\right) + b = -2a;$$

$$y'\left(-\frac{b}{2a} + 1\right) = 2a\left(-\frac{b}{2a} + 1\right) + b = 2a.$$

Таким образом мы получаем такую последовательность знаков первой производной:

$$\text{при } a > 0 \ \underbrace{-, +}_{\min}, \ \text{при } a < 0 \ \underbrace{+, -}_{\max}$$

Заключение. Квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ в точке $x = -\frac{b}{2a}$ достигает: минимума, если $a > 0$, максимума при $a < 0$. Значение ординаты в этой точке:

$$y\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Исследование во второй производной значительно проще приводит к этому же результату ($y'' = 2a$), и сразу видно, что в критической точке $x = -\frac{b}{2a}$ при $a < 0$ — максимум, а при $a > 0$ — минимум. Читателю известно, что квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ определяет параболу с осью, параллельной оси Oy. В первой части этой книги вершину параболы мы определяли выделением в правой части уравнения $y = ax^2 + bx + c$ полного квадрата и последующим параллельным переносом координатных осей. После разбора этой задачи учащийся получает более простой способ определения координат вершины параболы $y = ax^2 + bx + c$: надо просто определить экстремум этой функции. Числовые примеры:

1) Найти вершину параболы $y = 2x^2 + 6x - 7$.

Решение. $y' = 4x + 6$; $4x + 6 = 0$; $x = -\frac{3}{2}$ — абсцисса вершины.

Так как $a = 2 > 0$, то в этой точке функция имеет минимум. Ордината вершины равна

$$y\left(-\frac{3}{2}\right) = 2\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 6\left(-\frac{3}{2}\right) - 7 = -11\frac{1}{2},$$

а координаты вершины этой параболы

$$\left(-\frac{3}{2},\ -11\frac{1}{2}\right);$$

2) Найти вершину параболы $y = -5x^2 - 4x + 2$.

Решение. $y' = -10x - 4$; $-10x - 4 = 0$; $x = -\frac{2}{5}$. Так как здесь $a = -5 < 0$, то в этой точке функция имеет максимум, а $y\left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{14}{5}$. Координаты вершины параболы $\left(-\frac{2}{5},\ \frac{14}{5}\right)$.

Несколько аналогичных задач решите самостоятельно. Найти координаты вершины парабол и начертить эскизы их графиков:

1) $y = x^2 + x + 1$; 2) $y = -4x^2 + 9x - 1$;
3) $y = -2x^2 + 2x + 3$; 4) $y = 4x^2 + 6x - 4$;
5) $y = 6x^2 + 2x$.

Ответ. 1) $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{3}{4}\right)$; 2) $\left(\frac{9}{8},\ \frac{65}{16}\right)$; 3) $\left(\frac{1}{2},\ \frac{7}{2}\right)$; 4) $\left(-\frac{3}{4},\ -\frac{25}{4}\right)$; 5) $\left(-\frac{1}{6},\ -\frac{1}{6}\right)$.

Задача 33, 2 (для самостоятельного решения). Исследовать на экстремум функцию $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$ и начертить эскиз графика этой функции.

Указания. 1) Функция периодическая, а ее период $T = 2\pi$; $f(x + 2\pi) = f(x)$. Поэтому при определении экстремума можно ограничиться определением экстремума на отрезке $[0;\ 2\pi]$;

2) $y' = 3\sin x\cos x(\sin x - \cos x)$. На отрезке $[0, 2\pi]$ уравнение $3\sin x\cos x(\sin x - \cos x) = 0$ имеет такие корни: 0; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{2}$; π; $\frac{5\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{2}$; 2π, а потому критическими точками будут 0; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{2}$; π; $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{2}$, 2π.

3) Дальнейшее исследование выгоднее провести по второй производной, знак которой следует определить во всех критических точках.

Ответ. Максимум в точках: 0; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{5}{4}\pi$; 2π; $f(0) = 1$; $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$; $f\left(\frac{5}{4}\pi\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $f(2\pi) = 1$.

Минимум в точках: $\frac{\pi}{4}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, а $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $f(\pi)=-1$; $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-1$.

Задача 33, 3 (для самостоятельного решения). Исследовать на экстремум функцию $f(x)=x^{\frac{2}{3}}-(x^2-1)^{\frac{1}{3}}$.
Сделать эскиз графика функции.

Указания. 1) Область определения функции — интервал $(-\infty, +\infty)$, 2) первая производная обращается в нуль при $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $f'(x)=\infty$ при $x=-1$; $x=0$; $x=+1$; 4) критические точки -1; $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 0; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 1.

Ответ. При $x=\pm 1$ экстремума нет; при $x=0$ — минимум; при $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ — максимум.

В следующих четырех задачах, которые должны быть решены самостоятельно, надо иметь в виду, что ***если в рассматриваемом интервале имеется единственный экстремум, то в критической точке функция достигает наименьшего, или наибольшего значения, смотря по тому, будет ли в этой точке минимум или максимум.***

Задача 33, 4 (для самостоятельного решения). Найти наименьшее значение функции $y=x^2\ln x$.

Указание. 1) Область существования функции — интервал $(0, +\infty)$; производная существует во всем этом интервале; 2) критическая точка $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$. Других критических точек нет. 3) $f''\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)>0$, и тогда при $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$ — минимум. Так как заданная функция имеет на интервале $(0, +\infty)$ единственный минимум, то при $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$ функция достигает наименьшего значения, и это наименьшее значение $f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=-\frac{1}{2e}$.

Задача 33, 5. Найти наибольшее значение функции $y=x^{1-\ln x}$.

Указание. $y'=x^{1-\ln x}\frac{1}{x}(1-2\ln x)$.

Для всех значений x из интервала $(0, +\infty)$, в котором определена заданная функция, производная имеет конечное значение и обращается в нуль, когда $1-2\ln x=0$, т. е. при $\ln x=\frac{1}{2}$, и тогда $x=\sqrt{e}$ — единственная критическая точка.

Докажите, что в этой точке функция достигает максимума. Так как эта точка — единственная критическая точка функции, а

в ней достигается максимум, то в ней достигается и наибольшее значение заданной функции:

$$y_{\text{наиб}} = y(\sqrt{e}) = (\sqrt{e})^{1-\ln\sqrt{e}} = (\sqrt{e})^{1-\frac{1}{2}} = (\sqrt{e})^{\frac{1}{2}} = \sqrt[4]{e}.$$

Задача 33, 6 (для самостоятельного решения). Найти наименьшее значение функции $y = \frac{x}{\ln x}$.

Ответ. $y_{\text{наим}} = e$ при $x = e$.

Указание. $y' = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$. Область существования функции состоит из двух интервалов: $(0, 1)$ и $(1, +\infty)$. В каждом из этих интервалов производная имеет конечное значение, причем $y' = 0$ при $\ln x - 1 = 0$, т. е. когда $\ln x = 1$, а $x = e$.

Задача 33, 7 (для самостоятельного решения). Найти наименьшее значение функции $y = x^x$.

Ответ. Наименьшего значения функция достигает при $x = e^{-1}$ и $y_{\text{наим}} = \sqrt[e]{e^{-1}}$.

Указание. $y' = x^x(\ln x + 1)$ и имеет конечное значение при всех $x > 0$.

Задача 33, 8 (для самостоятельного решения). Определить экстремум функции $u = 2x + 3\sqrt[3]{(2-x)^2}$.

Указания. 1) $u = \frac{2(2-x)^{\frac{1}{3}} - 2}{(2-x)^{\frac{1}{3}}}$;

2) критических точек две: $x = 1$ и $x = 2$;

3) рассмотреть знак первой производной в интервалах $(-\infty, 1)$; $(1, 2)$; $(2, +\infty)$.

Ответ. При $x = 1$ функция имеет максимум: $y_{\max} = 5$; при $x = 2$ — минимум, $y_{\min} = 4$. В интервале $(2, +\infty)$ функция возрастает.

Задача 33, 9 (для самостоятельного решения). Исследовать на экстремум функцию $u = \frac{3}{2}\sqrt[3]{(2ax - x^2)^4}$.

Ответ. При $x = 0$ и $x = 2a$ функция имеет минимум: $u(0) = 0$; $u(2a) = 0$; при $x = a$ — максимум и $u(a) = \frac{3}{2}a^2\sqrt[3]{a^2}$.

Указание к решению задач 33, 10 и 33, 11. В этом случае, когда первая производная представляет собой отношение двух функций, а исследование на экстремум ведется при помощи второй производной, полезно для упрощения вычислений иметь в виду следующее: пусть $y' = \frac{u}{v}$, где u и v — функция x.

Тогда

$$y'' = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{v\left(u' - \frac{u}{v}v'\right)}{v^2}.$$

Сокращая последнюю дробь на v и принимая во внимание, что $\frac{u}{v} = y'$, получим $y'' = \frac{u' - y'v'}{v}$.

Так как при исследовании функции на экстремум по второй производной мы определяем знак второй производной при тех значениях x, которые обращают в нуль первую производную, то в предыдущей формуле окажется, что $y' = 0$, и тогда $y'v' = 0$, а знак y'' будет таким же, как и знак $\frac{u'}{v}$. Поэтому нет надобности в рассматриваемом случае отыскивать полностью вторую производную для определения знака второй производной при значениях x, найденных из уравнения $y' = 0$, а надо эти значения подставить в выражение $\frac{u'}{v}$. Составить же это выражение значительно проще, чем отыскивать вторую производную. Если окажется, что $v > 0$, то придется исследовать знак только u'.

Задача 33,10. Исследовать на экстремум по второй производной функцию

$$y = \frac{x^3 + x}{x^4 - x^2 + 1}.$$

Решение. Находим прежде всего первую производную:

$$y' = \frac{1 + 4x^2 - 4x^4 - x^6}{(x^4 - x^2 + 1)^2}.$$

При всех действительных значениях x производная имеет конечное значение. Критические точки найдем из уравнения $y' = 0$. Приравнивая числитель дроби нулю, имеем $1 + 4x^2 - 4x^4 - x^6 = 0$, откуда $1 - x^6 + 4x^2(1 - x^2) = 0$. Рассматривая $2 - x^6$ как разность кубов, получаем $1 - x^6 = (1 - x^2)(1 + x^2 + x^4)$, а уравнение перепишется в виде:

$$(1 - x^2)(1 + x^2 + x^4) + 4x^2(1 - x^2) = 0,$$

или

$$(1 - x^2)(1 + 5x^2 + x^4) = 0;$$

отсюда получаем два уравнения: 1) $1 - x^2 = 0$; 2) $1 + 5x^2 + x^4 = 0$.

Корнями первого уравнения будут числа $x = -1$; $x = +1$, а второе уравнение имеет только комплексные корни, а потому критическими точками будут только точки $x = -1$ и $x = +1$. Для определения знака второй производной при этих значениях составим, согласно сделанному указанию, выражение $\frac{u'}{v}$. У нас $u = 1 + 4x^2 - 4x^4 - x^6$; $v = (x^4 - x^2 + 1)^2$;
а так как $v > 0$ при любом x, то надо исследовать знак только $u' = 8x - 16x^3 - 6x^5$; $u'(-1) = 14 > 0$.

Значит, при $x = -1$ функция имеет минимум, и $y_{\min} = -2$. При $x = +1$ имеем $u'(+1) = -14 < 0$ и, значит, при $x = +1$ функция имеет максимум, а $y_{\max} = +2$.

Задача 33,11 (для самостоятельного решения). Исследовать на экстремум функцию $u = \frac{(x+3)^3}{(x+2)^2}$.

Указание. $u' = \frac{x(x+3)^2}{(x+2)^3}$. Корнями уравнения $u' = 0$ будут $x_1 = -3$; $x_2 = 0$; $u' = \infty$ при $x = -2$. Но при $x = -2$ заданная функция не существует, а потому значение $x = -2$ рассмотрению не подлежит. Критическими точками, подлежащими рассмотрению, являются $x_1 = -3$ и $x_2 = 0$.

Ответ. При $x = -3$ экстремума нет; при $x = 0$ функция имеет минимум, а $u_{\min} = u(0) = 6\frac{3}{4}$.

Теперь мы решим несколько задач, в которых требуется определить наибольшее или наименьшее значение функции, причем, в отличие от предыдущих задач, эта функция не дается в готовом виде, а определяется из условия задачи.

Общее указание. *Во всех случаях, когда функция, определенная из условия задачи, окажется функцией двух независимых переменных, надо, используя известные теоремы, одну из этих переменных исключить.*

Задача 33,12. Доказать, что из всех прямоугольников, имеющих данный периметр $2p$, наибольшую площадь имеет квадрат.

Решение. Обозначим длину одной стороны прямоугольника через x. Тогда длина другой его стороны будет $p - x$, а его площадь $s = x(p - x)$ $(0 < x < p)$. Эта функция и есть та, которая получена из условия задачи и наибольшее значение которой должно быть найдено:

$$\frac{ds}{dx} = p - 2x; \quad \frac{d^2s}{dx^2} = -2.$$

Приравняем первую производную нулю. Из уравнения $p - 2x = 0$ находим, что $x = \frac{p}{2}$. Так как вторая производная отрицательна, то при этом значении x функция достигает максимума, а поскольку в интервале $0 < x < p$ имеется единственный максимум, то он будет и наибольшим значением функции в этом интервале.

Мы нашли, что наибольшего значения площадь прямоугольника достигает, когда одна его сторона $x = \frac{p}{2}$, его другая сторона равна $p - \frac{p}{2} = \frac{p}{2}$, т. е. стороны его равны, а прямоугольник — квадрат: $S_{\text{наиб}} = \frac{p^2}{4}$ кв. ед.

Итак, из всех прямоугольников, имеющих один и тот же периметр, наибольшую площадь имеет квадрат.

Задача 33,13 (для самостоятельного решения). Доказать, что из всех прямоугольников, имеющих данную площадь a^2, квадрат имеет наименьший периметр.

Указание. Если обозначить длину одной стороны прямоугольника через x, то другая сторона равна $\frac{a^2}{x}$, а периметр

$$p = 2\left(\frac{a^2}{x} + x\right).$$

Это и есть составленная из условия задачи функция, наименьшее значение которой требуется определить.

Найти $\frac{dp}{dx}$ и решить уравнение $\frac{dp}{dx} = 0$.

Ответ. $x = a$, т. е. прямоугольник — квадрат.

Задача 33,14. Основание треугольника равно a, а его периметр $2p$. Определить его две другие стороны так, чтобы площадь его была наибольшей.

Решение. Пусть вторая сторона треугольника $b = x$. Тогда его третья сторона $c = 2p - a - x$. Известно, что площадь треугольника определяется по формуле $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, а в наших обозначениях $S = \sqrt{p(p-a)(p-x)[p-(2p-a-x)]}$, т. е.

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-x)(a+x-p)}. \quad (0 < x < p)$$

Таким образом из условия задачи определена функция, наибольшее значение которой требуется найти. Очевидно, что эта функция достигает наибольшего значения, когда ее подкоренное выражение будет наибольшим. В подкоренном выражении первые два постоянные множителя можно не учитывать, а потому требуется определить наибольшее значение произведения $f(x) = (p-x)(a+x-p)$. Находим, что $f'(x) = -(a+x-p) + (p-x) = 2p - a - 2x$. Решая уравнение $2p - a - 2x = 0$, находим, что $x = p - \frac{a}{2}$, т. е. $b = p - \frac{a}{2}$. Третья сторона $c = 2p - a - \left(p - \frac{a}{2}\right) = p - \frac{a}{2}$, т. е. $b = c$, и рассматриваемый треугольник — равнобедренный. Так как $f''(x) = -2 < 0$, то отсюда заключаем, что при $x = p - \frac{a}{2}$ площадь достигает наибольшего значения (при $x = p - \frac{a}{2}$ функция s имеет максимум, но так как в интервале $(0, p)$ он единственный, то $x = p - \frac{a}{2}$ доставляет функции наибольшее значение в этом интервале).

Задача 33,15. (для самостоятельного решения). В треугольнике одна сторона a, противолежащий ей угол α. Определить два других угла так, чтобы площадь его была наибольшей.

Указание. Второй угол треугольника обозначить через x, тогда его третий угол $\pi - (\alpha + x)$. Площадь треугольника $S_\Delta = \frac{1}{2} ay \sin x$, где x — угол, образуемый сторонами a и y. Функция S — функция двух переменных x и y. Используем теперь известную из тригонометрии теорему синусов

$$\frac{a}{y} = \frac{\sin \alpha}{\sin [\pi - (\alpha + x)]},$$

откуда

$$y = \frac{a \sin (\alpha + x)}{\sin \alpha},$$

а

$$S = \frac{1}{2} \frac{a^2 \sin (\alpha + x) \sin x}{\sin \alpha}.$$

Теперь уже S — функция одной независимой переменной.

Наибольшего значения S достигнет тогда, когда его достигнет множитель числителя $f(x) = \sin(\alpha + x) \sin x$, производная $f'(x) = \sin (2x + \alpha)$.

Уравнение $\sin (2x + \alpha) = 0$ имеет решение $2x + \alpha = \pi k$. Значения $k = 0$ и $k > 1$ не должны рассматриваться. Остается одно решение:

$$2x + \alpha = \pi, \text{ а } x = \frac{1}{2} (\pi - \alpha).$$

Если $x = \frac{1}{2} (\pi - \alpha)$, то третий угол равен $\pi - \alpha - \frac{1}{2}(\pi - \alpha) = \frac{1}{2} (\pi - \alpha)$ и, таким образом, углы, прилежащие к стороне a, между собою равны, и искомый треугольник — равнобедренный. Решите самостоятельно вопрос о том, доставляет ли значение $x = \frac{1}{2}(\pi - \alpha)$ наибольшее значение функции S $\left(\text{докажите, что } f''(x) < 0, \text{ когда } x = \frac{1}{2} (\pi - \alpha)\right)$.

Задача 33,16. Требуется изготовить закрытый цилиндрический бак объемом V. Какими должны быть его размеры, чтобы на его изготовление ушло наименьшее количество материала?

Решение. В задаче требуется определить в каком отношении должны находиться радиус и высота цилиндра, чтобы при заданном объеме V его полная поверхность была наименьшей. Полная поверхность цилиндра

$$S = 2\pi RH + 2\pi R^2. \quad (R > 0)$$

Наименьшее значение этой функции и следует определить. Но легко усмотреть, что S является функцией двух независимых переменных. На основании указания стр. 248 следует одну из этих переменных исключить. Известно, что объем цилиндра $V = \pi R^2 H$.

В задаче V — величина известная. Выразим H через V:

$$H = \frac{V}{\pi R^2}. \qquad \text{(A)}$$

С этим значением H полная поверхность цилиндра

$$S = 2\pi R \cdot \frac{V}{\pi R^2} + 2\pi R^2, \text{ или } S = \frac{2V}{R} + 2\pi R^2.$$

Теперь уже S — функция только одной независимой переменной R:

$$S'(R) = \frac{-2V}{R^2} + 4\pi R = \frac{4\pi R^3 - 2V}{R^2};$$

$$S''(R) = \frac{4V}{R^3} + 4\pi \quad (R \neq 0),$$

и при любом R имеем, что $S''(R) > 0$. Из уравнения $S'(R) = 0$ следует, что

$$4\pi R^3 - 2V = 0, \text{ а } R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

Так как $S''(R) > 0$, то это значение R доставляет функции S минимум, а вместе с тем и наименьшее значение.

Подставив в равенство (A) это значение R, получим, что

$$H = \frac{V}{\pi \sqrt[3]{\left(\frac{V}{2\pi}\right)^2}} = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}, \text{ т. е. } H = 2R.$$

Таким образом, на изготовление цилиндра заданного объема будет употреблено наименьшее количество материала, если взять высоту цилиндра равной диаметру.

Задача 33, 17 (для самостоятельного решения). Требуется изготовить цилиндрический сосуд заданного объема V, открытый сверху. Определить его радиус и высоту так, чтобы поверхность была наименьшей.

Ответ.

$$R = H = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}.$$

Задача 33, 18 (для самостоятельного решения). Какие размеры должен иметь цилиндр, поверхность которого равна S, чтобы его объем был наибольшим?

Указание. Объем цилиндра

$$V = \pi R^2 H \qquad (A)$$

— функция двух независимых переменных R и H. Чтобы одну из них исключить, воспользуемся формулой для вычисления полной поверхности цилиндра:

$$S = 2\pi RH + 2\pi R^2,$$

из которой следует, что

$$H = \frac{S - 2\pi R^2}{2\pi R}. \qquad (A)$$

Это значение H подставим в формулу (А) и получим, что

$$V = \frac{SR - 2\pi R^3}{2}.$$

Ответ. $R = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$; $H = 2R$, т. е. высота цилиндра должна быть равна диаметру его основания.

Задача 33, 19 (для самостоятельного решения). Доказать, что прямой круговой конус при заданном объеме имеет наименьшую боковую поверхность тогда, когда $R^2 : H^2 : l^2 = 1 : 2 : 3$.

Указание. $S_{\text{бок. конуса}} = \pi R l$; $l = \sqrt{H^2 + R^2}$; тогда $S = \pi R \sqrt{H^2 + R^2}$. Наименьшее значение этой функции требуется найти. Но она — функция двух независимых переменных. Одну из них можно исключить с помощью формулы для объема конуса:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H, \text{ откуда } H = \frac{3V}{\pi R^2},$$

и тогда

$$S = \frac{1}{R}\sqrt{9V^2 + \pi^2 R^6}.$$

Ответ. $R = \sqrt[3]{\frac{3V}{\pi\sqrt{2}}}$; $H = \sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}}$; $l = \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{3v}{\pi\sqrt{2}}}$, откуда следует, что $R^2 : H^2 : l^2 = 1 : 2 : 3$.

Задача 33, 20 (для самостоятельного решения). Чему должны быть равны радиус основания R, высота H и образующая l прямого кругового конуса для того, чтобы при заданном объеме V он имел наименьшую полную поверхность?

Указание. Учесть указание, данное в предыдущей задаче.

Ответ. $R = \sqrt[3]{\frac{3V}{2\pi\sqrt{2}}}$; $H = 2\sqrt[3]{\frac{3V}{\pi}}$; $l = 3\sqrt[3]{\frac{3V}{2\pi\sqrt{2}}}$.

Задача 33, 21 (для самостоятельного решения). Чему должны быть равны высота H, радиус оснований R и образующая l прямого кругового конуса, чтобы при заданной боковой поверхности S он имел наибольший объем?

Указание. Объем конуса $V = \frac{1}{3}\pi R^3 H$.

Из этой формулы одну независимую переменную следует исключить. Используем с этой целью формулу для вычисления боковой поверхности прямого кругового конуса $S = \pi R l$, или так как образующая конуса $l = \sqrt{H^2 + R^2}$, то $S = \pi R \sqrt{H^2 + R^2}$, откуда $H = \frac{\sqrt{S^2 - \pi^2 R^4}}{\pi R}$, а объем V с этим значением H становится функцией одной независимой переменной:

$$V = \frac{1}{3} R \sqrt{S^2 - \pi^2 R^4}.$$

Ответ. Объем конуса будет наибольшим при

$$R = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \sqrt{\frac{S}{\pi}}; \quad H = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \sqrt{\frac{2S}{\pi}}; \quad l = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \sqrt{\frac{3S}{\pi}}.$$

откуда следует, что $R^2 : H^2 : l^2 = 1 : 2 : 3$.

Задача 33, 21а (для самостоятельного решения). При данной длине прочность балки прямоугольного сечения пропорциональна ширине и квадрату высоты.

Из цилиндрического ствола дерева диаметром d надо вырезать балку наибольшей прочности. Определить ширину и высоту балки.

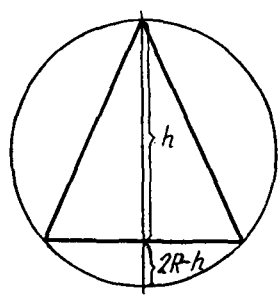
Указание. $h^2 = d^2 - x^2$. Прочность $y = kx(d^2 - x^2)$, где k — коэффициент пропорциональности.

Ответ. Ширина балки $x = \frac{d}{\sqrt{3}}$, а ее высота $h = \sqrt{\frac{2}{3}}\, d$.

Задача 33, 22 (для самостоятельного решения). Найти радиус основания r и высоту h прямого кругового конуса, вписанного в шар радиуса R так, чтобы его объем был наибольшим.

Указание. Объем конуса $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Исключим одну из переменных, например r^2. На фиг. 33,1 изображено сечение фигуры плоскостью, проходящей через ось конуса. Известно, что в прямоугольном треугольнике перпендикуляр, опущенный из прямого угла на гипотенузу, есть средняя пропорциональная между отрезками гипотенузы. Поэтому $\frac{r}{2R - h} = \frac{h}{r}$ и $r^2 = h(2R - h)$, а объем конуса $V = \frac{1}{3}\pi h^2 (2R - h)$.



Фиг. 33,1.

Ответ. $h = \frac{3}{4} R$; $r = \frac{2\sqrt{2}}{3} R$.

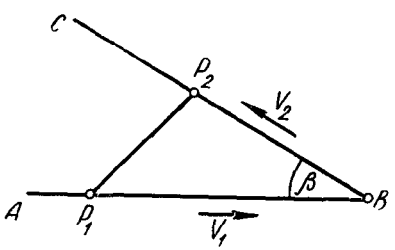
Задача 33, 23 (для самостоятельного решения). На какой высоте следует поместить источник света над освещенной поверхностью, чтобы освещение на расстоянии a от основания перпендикуляра, опущенного из источника света на освещенную поверхность, было наибольшим?

Известно, что освещенность обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника света и прямо пропорциональна синусу угла между лучом и освещенной поверхностью.

Указание. Освещенность $E = k\frac{\sin\varphi}{a^2+h^2}$, где k — коэффициент пропорциональности, h — высота источника света над освещенной поверхностью, φ — угол между лучом и освещенной поверхностью. Так как $\sin\varphi = \frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}$, то $E = k\frac{h}{(a^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Ответ. $h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; максимальная освещенность $E_{max} = \frac{2k\sqrt{3}}{9a^2}$.

Задача 33, 24 (для самостоятельного решения). Точка P_1 движется в направлении от A к B с постоянной скоростью V_1. В тот момент, когда P_1 проходит через A, другая точка P_2 выходит из B и движется с постоянной скоростью V_2 по направлению к C. В какой момент времени t расстояние P_1P_2 между этими двумя точками будет наименьшим, если принять $AB = a$, $\angle ABC = \beta$ (фиг. 33, 2).



Фиг. 33,2.

Указание. За время t первая точка, двигаясь с постоянной скоростью V_1, пройдет расстояние V_1t и в треугольнике P_1P_2B сторона $P_1B = a - V_1t$; вторая точка, вышедшая из B за то же время t пройдет расстояние $P_2B = V_2t$, а потому по известной формуле геометрии квадрат стороны P_1P_2 треугольника P_1P_2B равен

$$(P_1P_2)^2 = (a - V_1t)^2 + (V_2t)^2 - 2(a - V_1t)V_2t\cos\beta.$$

Ответ. Момент времени t, в который расстояние P_1P_2 между точками будет наименьшим, определится по формуле

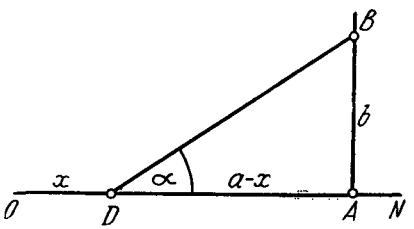
$$t = \frac{a(V_1 + V_2\cos\beta)}{V_1^2 + V_2^2 + 2V_1V_2\cos\beta}.$$

Задача 33, 25. На расстоянии $AB = b$ от прямолинейной магистрали ON находится завод B. От какого места D магистрали

надо сделать прямолинейное ответвление DB, чтобы стоимость проводки водопровода к заводу была наименьшей, если известно, что стоимость единицы длины водопровода по направлениям OD, DN и DB равна соответственно k_1, k_2 и k_3 рублей, $OA = a$,

$$ON = l \text{ (фиг. 33, 3).}$$

Указание. Стоимость водопровода: 1) на участке OD равна k_1x; 2) на участке DN равна $k_2(l-x)$; 3) на участке DB она равна $k_3\sqrt{(a-x)^2+b^2}$.



Фиг. 33,3.

Общая стоимость $k = k_1x + k_2(l-x) + k_3\sqrt{(a-x)^2+b^2}$. Убедиться, что $\frac{dk}{dx} = k_1 - k_2 - \frac{(k_3(a-x)}{\sqrt{(a-x)^2+b^2}}$, определить x из уравнения

$$k_1 - k - \frac{k_3(a-x)}{\sqrt{(a-x)^2+b^2}} = 0 \qquad (A)$$

и показать, что при найденном x

$$\frac{d^2k}{dx^2} > 0.$$

Выгодно ввести в рассмотрение угол $BDA = \alpha$. Из фиг. 33, 3 видно, что $\cos\alpha = \frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2+b^2}}$. Из уравнения (A) следует, что

$$\frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2+b^2}} = \frac{k_1-k_2}{k_3}, \qquad (B)$$

т. е.

$$\cos\alpha = \frac{k_1-k_2}{k_3}, \quad (k_1 - k_2 < k_3) \qquad (33, 23$$

и, значит, ответвление DB следует вести под углом α, определяемым из равенства (33, 23). Выражение для x получается очень просто:

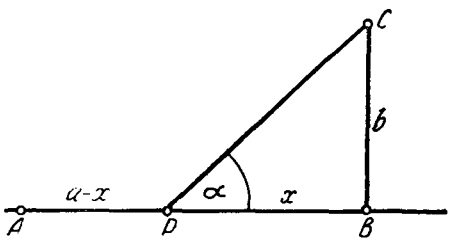
$$\frac{(a-x)^2}{(a-x)^2+b^2} = \cos^2\alpha; \quad \frac{(a-x)^2+b^2}{(a-x)^2} = \sec^2\alpha; \quad 1 + \frac{b^2}{(a-x)^2} = \sec^2\alpha;$$

$$\frac{b^2}{(a-x)^2} = \operatorname{tg}^2\alpha; \quad \left(\frac{a-x}{b}\right)^2 = \operatorname{ctg}^2\alpha; \quad \frac{a-x}{b} = \operatorname{ctg}\alpha,$$

и x определяется равенством $x = a - b \operatorname{ctg} \alpha$, в котором α уже известно из (33, 23).

Задача 33, 26 (для самостоятельного решения). Стоимость перевозки груза на один километр по железной дороге AB равна k_1 рублей, а по шоссе PC — k_2 рублей $(k_1 < k_2)$. С какого места P надо начать шоссе, чтобы возможно дешевле доставить груз из A в C. Известно, что $AB = a$; $BC = b$ (фиг. 33, 4).

Ответ. $AP = a - b \operatorname{ctg} \alpha$, а угол α определяется из соотношения $\cos \alpha = \frac{k_1}{k_2}$. Из последнего равенства усматриваем, что на-



Фиг. 33,4.

правление, в котором надо вести шоссе, зависит только от отношения стоимостей и не зависит от положения точки P. Если, например, $k_2 = 4k_1$, то $\cos \alpha = \frac{k_1}{4k_1} = \frac{1}{4}$, а $\alpha \approx 75°$.

ТРИДЦАТЬ ЧЕТВЕРТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Точки перегиба. Асимптомы.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Определение 1. *Говорят, что на интервале (a, b) кривая обращена выпуклостью вниз, если она лежит выше касательной, проведенной в любой ее точке.*

Определение 2. *Говорят, что на интервале (a, b) кривая обращена выпуклостью вверх, если она лежит ниже касательной, проведенной в любой ее точке.*

Дуги кривой, обращенные выпуклостью вверх, в дальнейшем будем называть выпуклыми, а обращенные выпуклостью вниз, — вогнутыми.

Дуга кривой $y = f(x)$ выпукла на интервале (a, b), если во всех точках этого интервала $f''(x) < 0$, и вогнута на этом интервале, если во всех его точках $f''(x) > 0$.

Правило. *Интервалы, в которых дуги кривой выпуклы, определяются из неравенства $f''(x) < 0$, а интервалы, в которых дуги этой кривой вогнуты, — из неравенства $f''(x) > 0$.*