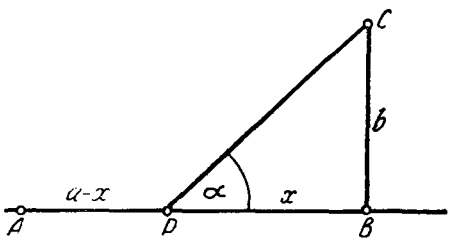
и x определяется равенством $x = a - b \operatorname{ctg} \alpha$, в котором α уже известно из (33, 23).

Задача 33, 26 (для самостоятельного решения). Стоимость перевозки груза на один километр по железной дороге AB равна k_1 рублей, а по шоссе PC — k_2 рублей $(k_1 < k_2)$. С какого места P надо начать шоссе, чтобы возможно дешевле доставить груз из A в C. Известно, что $AB = a$; $BC = b$ (фиг. 33, 4).

Ответ. $AP = a - b \operatorname{ctg} \alpha$, а угол α определяется из соотношения $\cos \alpha = \frac{k_1}{k_2}$. Из последнего равенства усматриваем, что на-



Фиг. 33,4.

правление, в котором надо вести шоссе, зависит только от отношения стоимостей и не зависит от положения точки P. Если, например, $k_2 = 4k_1$, то $\cos \alpha = \frac{k_1}{4k_1} = \frac{1}{4}$, а $\alpha \approx 75°$.

ТРИДЦАТЬ ЧЕТВЕРТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Точки перегиба. Асимптомы.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Определение 1. *Говорят, что на интервале (a, b) кривая обращена выпуклостью вниз, если она лежит выше касательной, проведенной в любой ее точке.*

Определение 2. *Говорят, что на интервале (a, b) кривая обращена выпуклостью вверх, если она лежит ниже касательной, проведенной в любой ее точке.*

Дуги кривой, обращенные выпуклостью вверх, в дальнейшем будем называть выпуклыми, а обращенные выпуклостью вниз, — вогнутыми.

Дуга кривой $y = f(x)$ выпукла на интервале (a, b), если во всех точках этого интервала $f''(x) < 0$, и вогнута на этом интервале, если во всех его точках $f''(x) > 0$.

Правило. *Интервалы, в которых дуги кривой выпуклы, определяются из неравенства $f''(x) < 0$, а интервалы, в которых дуги этой кривой вогнуты, — из неравенства $f''(x) > 0$.*

Определение 3. *Точка кривой, отделяющая ее выпуклую дугу от вогнутой, называется точкой перегиба.*

Определение 4. *Точки кривой, в которых $f''(x)=0$ или $f''(x)=\infty$, а также те из них, в которых $f''(x)$ не существует, называются критическими точками второго рода.*

Точки перегиба следует искать среди критических точек второго рода.

В критической точке второго рода $x=x_0$ перегиб будет только в том случае, когда при переходе через эту точку $f''(x)$ меняет знак.

Правило. *Для определения точек перегиба кривой надо определить все критические точки второго рода и рассмотреть знаки $f''(x)$ в каждых двух соседних интервалах, на которые эти точки делят область существования функции. В случае, если знаки $f''(x)$ в двух соседних интервалах различны, критическая точка второго рода является точкой перегиба. Если же в двух соседних интервалах $f''(x)$ имеет один и тот же знак, то в рассматриваемой критической точке второго рода перегиба нет. В точке перегиба кривая пересекает касательную.*

Задача 34,1. Определить интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба графика функции

$$y=5x^2+20x+9.$$

Решение. Область существования функции — интервал

$$(-\infty,\ +\infty);\ y'=10x+20;\ y''=10>0,$$

и так как $y''>0$ при любом значении x, то кривая вогнута на всем интервале $(-\infty,\ +\infty)$. Точек перегиба нет.

Задача 34,2. Определить интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба графика функции

$$y=-6x^2+8x-11.$$

Решение. Область существования функции — интервал $(-\infty,\ +\infty)$.

$$y'=-12x+8;\ y''=-12<0.$$

Так как неравенство $y''<0$ выполняется при любом x из области существования функции, то кривая на всем интервале $(-\infty,\ +\infty)$ выпукла. Точек перегиба нет.

Задача 43,3. (для самостоятельного решения). Определить интервалы выпуклости и вогнутости, а также точки перегиба кривых:

1) $y=3x^2+x+1$; 2) $y=-2x^2+8x-9$; 3) $y=x^2+x$.

Ответ. На всем бесконечном интервале $(-\infty,\ +\infty)$ кривая 1) вогнута, 2) выпукла, 3) вогнута. Ни одна из этих кривых точек перегиба не имеет.

Задача 34,4. Определить точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости кривой $y = x^3$.

Решение. Область существования функции — интервал $(-\infty, +\infty)$; $y' = 3x^2$, $y'' = 6x$. Решаем уравнение $6x = 0$ и находим, что $x=0$. Вторая производная конечна и существует при любом x, а потому $x = 0$ — единственная критическая точка второго рода. Область существования функции она разделяет на два интервала:

$$1)\ (-\infty,\ 0) \text{ и } 2)\ (0,\ +\infty).$$

В каждом из этих интервалов y'' сохраняет знак. При любом значении x из первого интервала $y'' < 0$, а при любом x из второго интервала $y'' > 0$. Таким образом при переходе через точку $x = 0$ вторая производная меняет знак. Эта точка является точкой перегиба. Ее координаты (0, 0). В первом интервале $(-\infty, 0)$ кривая выпукла ($y'' < 0$), а во втором — вогнута ($y'' > 0$).

Задача 34,5 (для самостоятельного решения). Доказать, что кривая $y = x(x^2 - b^2)$ имеет точку перегиба в начале координат.

Задача 34,6. Определить точку перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости кривой $y = x^3 - 12x^2 + x - 1$.

Решение. Область существования функции — бесконечный интервал $(-\infty, +\infty)$. Находим $y'': y' = 3x^2 - 24x + 1$; $y'' = 6x - 24$.

При *любом* x вторая производная конечна и существует. Критическую точку второго рода найдем из уравнения $y'' = 0$, т. е. из уравнения $6x - 24 = 0$. Такой точкой будет $x = 4$. Интервал существования функции она разделяет на два:

$$1)\ (-\infty,\ 4) \text{ и } 2)\ (4,\ +\infty).$$

В каждом из этих интервалов y'' сохраняет знак. При любом x из первого интервала $y'' < 0$, а при любом x из второго интервала $y'' > 0$, а потому точка с абсциссой $x = 4$ — точка перегиба, а так как в первом интервале $y'' > 0$, и дуга кривой на нем — выпукла, а во втором интервале $y'' > 0$, дуга кривой на нем — выпукла, а во втором интервале $y'' > 0$, и дуга кривой вогнута. Координаты точки перегиба (4, —125).

Задача 34,7 (для самостоятельного решения). Определить точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости кривой $y = -x^3 + 15x^2 - x - 250$.

Ответ. Точка перегиба (5, —5); слева от точки перегиба кривая вогнута ($y'' > 0$), справа от нее — выпукла ($y'' < 0$).

Задача 34,8 (для самостоятельного решения). Определить точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости кривой

$$y = x^4 + 2x^3 - 12x^2 - 5x + 2.$$

Ответ. Точки перегиба при $x = -2$ и $x = 1$; на интервалах $(-\infty, -2)$ и $(1, +\infty)$ кривая вогнута, на интервале $(-2, 1)$ — выпукла.

Задача 34,9 (для самостоятельного решения). Найти точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости кривой

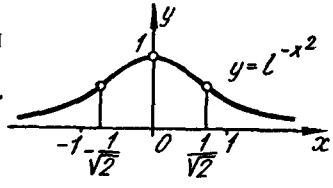
$$y = x^4 - 4x^3 - 18x^2 + 45x - 14.$$

Ответ. Точки перегиба $(-1, -72)$ и $(3, -68)$. На интервале $(-\infty, -1)$ кривая вогнута; на интервале $(-1, 3)$ кривая выпукла; на интервале $(3, +\infty)$ кривая вогнута.

Задача 34,10 (для самостоятельного решения). Определить интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба кривой $y = (x-1)^4$.

Ответ. Кривая на всем бесконечном интервале вогнута ($y'' > 0$).

Задача 34,11 (для самостоятельного решения). Определить точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости кривой $y = e^{-x^2}$ (кривая Гаусса, или кривая вероятностей).



Фиг. 34,1.

Ответ. Точек перегиба две: $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ и $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$.

Слева от точки $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ кривая вогнута, на интервале $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ кривая выпукла, а справа от точки $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ — вогнута (фиг. 34,1).

Асимптоты

Определение. *Если расстояние d от точки кривой $y = f(x)$, имеющей бесконечную ветвь, до некоторой определенной прямой по мере удаления точки по этой кривой в бесконечность стремится к нулю, то прямая называется асимптотой кривой.*

Различают асимптоты: 1) горизонтальные, 2) вертикальные и 3) наклонные.

1. *Кривая $y = f(x)$ имеет горизонтальную асимптоту $y = b$ только в том случае, когда существует конечный предел функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ или при $x \to -\infty$, и этот предел равен b, т. е. если*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b \quad \text{или} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = b. \tag{34,1}$$

2. *Кривая $y = f(x)$ имеет вертикальную асимптоту $x = a$, если при $x \to a$, $x \to a - 0$ или при $x \to a + 0$, $f(x) \to \infty$. Для определения вертикальных асимптот надо отыскать те значения аргумента, вблизи которых $f(x)$ неограниченно возрастает по абсо-*

лютной величине. Если такими значениями аргумента являются a_1, a_2, ..., то уравнения вертикальных асимптот будут

$$x = a_1;\ x = a_2;\ \ldots$$

3. Для определения наклонной асимптоты $y = kx + b$ кривой $y = f(x)$ надо найти числа k и b из формул

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \tag{34,2}$$

$$b = \lim_{x \to \infty} [f(x) - kx] \tag{34,3}$$

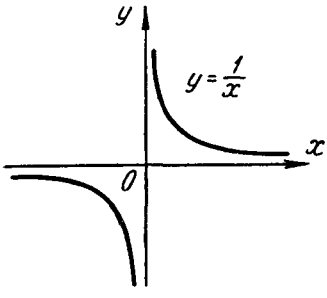
(следует отдельно рассматривать случаи $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$). Наклонные асимптоты у кривой $y = f(x)$ существуют в том и только в том случае, когда пределы (34,2) и (34,3) имеют конечное значение (если окажется, что $k = 0$, а b имеет конечное значение, то асимптота будет горизонтальной). При определении пределов (34,2) и (34,3) удобно пользоваться правилом Лопиталя.

Задача 34,12. Найти асимптоты кривой $y = \frac{1}{x}$ (равнобокая гипербола).

Решение. 1) Находим горизонтальные асимптоты по формулам (34,1):

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0;\quad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

и кривая имеет единственную горизонтальную асимптоту $y = 0$, т. е. горизонтальной асимптотой является ось Ox.



Фиг. 34,2.

2) Определяем вертикальную асимптоту; для этого находим те значения x, вблизи которых $f(x) = \frac{1}{x}$ неограниченно возрастает по абсолютной величине. Таким значением будет $x = 0$. Вертикальная асимптота имеет уравнение $x = 0$, т. е. это ось Oy (фиг. 34,2).

Задача 34,13. Найти асимптоты графика функции $y = \frac{2}{x^2-4}$.

Решение. 1) Для определения горизонтальных асимптот находим по (34,1)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x^2-4} = 0 \text{ и } \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{x^2-4} = 0.$$

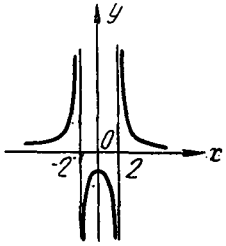
Горизонтальная асимптота одна: $y = 0$ (ось Ox).

2) Для определения вертикальных асимптот находим те значения x, вблизи которых $f(x) = \frac{2}{x^2-4}$ неограниченно возрастает

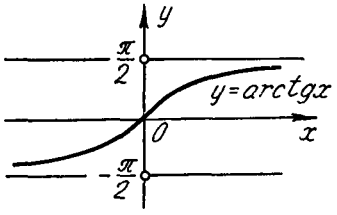
по абсолютной величине. Такими значениями являются $= -2$ и $x = +2$, и вертикальными асимптотами будут прямые $x = -2$ и $x = +2$. Эскиз графика показан на фиг. 34,3.

Задача 34,14 (для самостоятельного решения). Определить асимптоты графика функции $y = \frac{3}{x-2}$.

Ответ. Вертикальная асимптота $x = 2$, горизонтальная асимптота $y = 0$ (ось Ox); наклонных асимптот нет.



Фиг. 34,3.



Фиг. 34,4.

Задача 34,15 (для самостоятельного решения). Определить асимптоты графика функции $y = \frac{x-2}{x+4}$.

Ответ. Горизонтальная асимптота $y = 1$;
вертикальная асимптота $x = -4$;
наклонных асимптот нет.

Задача 34,16. Найти асимптоты кривой $y = \operatorname{arc\,tg} x$.

Решение. Находим горизонтальные асимптоты по формулам (34,1) полагая в них $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x \to -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}.$$

Горизонтальные асимптоты имеют уравнения $y = \frac{\pi}{2}$ и $y = -\frac{\pi}{2}$.

Вертикальных асимптот нет, так как нет значений x, вблизи которых функция $f(x) = \operatorname{arctg} x$ неограниченно возрастает по абсолютной величине (фиг. 34,4).

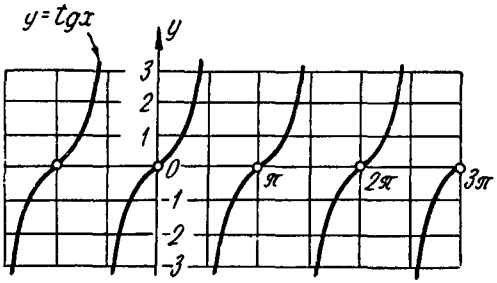
Задача 34,17 (для самостоятельного решения). Найти асимптоты кривой $y = \operatorname{tg} x$.

Ответ. Вертикальных асимптот бесконечно много. Их уравнения

$$x = \frac{\pi}{2}(2k+1),$$

где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ (фиг. 34,5) (это следует из того, что вблизи точек $x = \frac{\pi}{2}(2k+1)$ функция $\operatorname{tg} x$ неограниченно возрастает по абсолютной величине). Других асимптот нет.

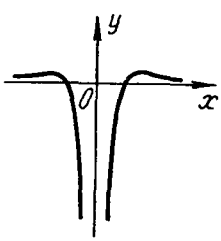
Задача 34,18 (для самостоятельного решения). Найти асимптоты кривой $y = \frac{x^2 - 1}{x^4}$.



Фиг. 34,5.

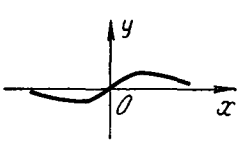
Ответ. Горизонтальная асимптота $y = 0$; вертикальная асимптота $x = 0$ (фиг. 34,6).

Задача 24,19 (для самостоятельного решения). Найти асимптоты кривой $y = \frac{x}{1+x^2}$.



Фиг. 34,6.

Ответ. Горизонтальная асимптота $y = 0$ (фиг. 34,7).



Фиг. 34,7.

Задача 34,20. Найти асимптоты кривой $y = \frac{x^2 + 1}{2x + 3}$.

Решение. Горизонтальных асимптот нет. Так как y неограниченно возрастает, когда $x \to -\frac{3}{2}\left(2x + 3 = 0 \text{ при } x = -\frac{3}{2}\right)$, то имеется вертикальная асимптота: ее уравнение $x = -\frac{3}{2}$, при этом $y \to -\infty$, когда $x \to -\frac{3}{2} - 0$ и $y \to +\infty$, когда $x \to -\frac{3}{2} + 0$ (эти сведения мы используем в дальнейшем при построении эскиза графика).

Теперь определим наклонные асимптоты, уравнение которых имеет вид $y = kx + b$, а k и b определяются по формулам (34,2) и (34,3), в которых надо взять $f(x) = \frac{x^2 + 2}{2x + 3}$

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{x^2 + 1}{2x + 3}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 + 1}{2x^2 + 3x} = \frac{1}{2};$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{x^2 + 1}{2x + 3} - \frac{1}{2}x\right] = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-3x + 2}{4x + 6} = -\frac{3}{4}.$$

Так как k и b имеют конечные значения и равные между собой при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$, то имеется единственная наклонная асимптота, уравнение которой

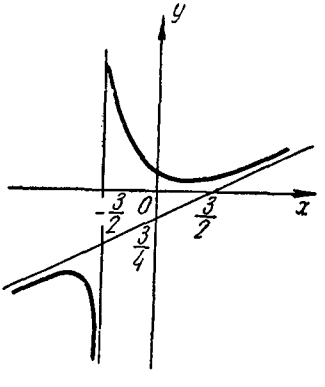
$$y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}.$$

Чтобы сделать заключение об интервалах, на которых кривая находится над асимптотой и под ней, надо составить разность $\delta = y_{кр.} - y_{ас.}$. На тех интервалах, где $\delta > 0$, кривая лежит над асимптотой, а на тех, где $\delta < 0$, кривая лежит под асимптотой.

В нашем случае $y_{кр} = \frac{x^2+1}{2x+3}$; $y_{ас} = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$:

$$\delta = \frac{x^2+1}{2x+3} - \left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right); \quad \delta = \frac{13}{4(2x+3)}.$$

Знак δ такой же, как и знак двучлена $2x+3$. Решая неравенства 1) $2x+3>0$ и 2) $2x+3<0$, находим, что первое выполняется при $x > -\frac{3}{2}$, а второе — при $x < -\frac{3}{2}$; поэтому: 1) $\delta > 0$, когда $x > -\frac{3}{2}$, а значит на интервале $\left(-\frac{3}{2}, +\infty\right)$ кривая лежит над асимптотой; 2) $\delta < 0$, когда $x < -\frac{3}{2}$, а это значит, что на интервале $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$ кривая лежит под асиптотой. Набросок графика функции сделан на фиг. 34,8.



Фиг. 34,8.

Задача 34,21 (для самостоятельного решения). Определить асимптоты кривой $y = \frac{2x^2+x+3}{x+6}$.

Ответ. Уравнения асимптот: 1) $x = -6$; 2) $y = 2x - 11$.

Самостоятельно решить вопрос об интервалах, в которых кривая лежит над асимптотой и под ней.

Замечание. Следует иметь в виду, что когда k имеет конечное значение, а b — бесконечное, то наклонной асимптоты нет. Этот случай имеет место в следующей задаче.

Задача 34,22. Найти асимптоты кривой $y = \frac{2x^2+4x\sqrt{x}+2}{2x+4}$.

Ответ. Вертикальная асимптота $x = -2$. Так как $b \to +\infty$, когда $x \to +\infty$, то наклонной асимптоты нет. Так как при $x < 0$ не существует $\sqrt{x}$, то пределы (34,2) и (34,3) при $x \to -\infty$ не должны рассматриваться.

ТРИДЦАТЬ ПЯТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание. Общее исследование функции.

Приобретенные на предыдущих занятиях навыки в определении интервалов монотонности функции, экстремума функции, интервалов выпуклости и вогнутости графика функции, его точек перегиба и асимптот позволяют провести полное исследование функции и построить эскиз графика функции, который, хотя и не будет отличаться большой точностью, но все же даст возможность усмотреть характерные свойства и особенности исследуемой функции

Под полным исследованием функции обычно понимается решение таких вопросов:

1) Определение области существования функции.

2) Выяснение вопроса о четности и нечетности функции.

3) Определение точек разрыва функции.

4) Определение асимптот графика функции.

5) Определение интервалов возрастания и убывания функции.

6) Определение экстремума функции.

7) Определелие интервалов выпуклости и вогнутости графика функции.

8) Определение точек перегиба.

Полученные данные следует использовать для построения графика функции. Для бо́льшей точности эскиза графика рекомендуется построить еще и отдельные точки графика, давая значения независимой переменной и определяя соответствующие значения функции. Полезно также получаемые данные сразу наносить на чертеж.

Учитывая, что на предыдущих занятиях все элементы этой схемы были полно изучены, мы дадим подробное решение только трех задач, после чего остальные задачи должны быть решены самостоятельно. Эти задачи снабжены ответами и необходимыми указаниями.

Задача 35,1. Исследовать функцию $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$.

Решение. 1. Определим область существования этой функции. Функция существует при всех значениях x, кроме $x = -1$, при котором знаменатель дроби обращается в нуль. Значит, функция определена в интервалах $(-\infty, -1)$ и $(-1, +\infty)$.

2. Исследуем вопрос о наличии центра симметрии и оси симметрии. Проверим для этого выполняются ли равенства $f(-x) = f(x)$ и $f(-x) = -f(x)$.