Ответ. Вертикальная асимптота $x = -2$. Так как $b \to +\infty$, когда $x \to +\infty$, то наклонной асимптоты нет. Так как при $x < 0$ не существует $\sqrt{x}$, то пределы (34,2) и (34,3) при $x \to -\infty$ не должны рассматриваться.

ТРИДЦАТЬ ПЯТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание. Общее исследование функции.

Приобретенные на предыдущих занятиях навыки в определении интервалов монотонности функции, экстремума функции, интервалов выпуклости и вогнутости графика функции, его точек перегиба и асимптот позволяют провести полное исследование функции и построить эскиз графика функции, который, хотя и не будет отличаться большой точностью, но все же даст возможность усмотреть характерные свойства и особенности исследуемой функции

Под полным исследованием функции обычно понимается решение таких вопросов:

1) Определение области существования функции.

2) Выяснение вопроса о четности и нечетности функции.

3) Определение точек разрыва функции.

4) Определение асимптот графика функции.

5) Определение интервалов возрастания и убывания функции.

6) Определение экстремума функции.

7) Определелие интервалов выпуклости и вогнутости графика функции.

8) Определение точек перегиба.

Полученные данные следует использовать для построения графика функции. Для бо́льшей точности эскиза графика рекомендуется построить еще и отдельные точки графика, давая значения независимой переменной и определяя соответствующие значения функции. Полезно также получаемые данные сразу наносить на чертеж.

Учитывая, что на предыдущих занятиях все элементы этой схемы были полно изучены, мы дадим подробное решение только трех задач, после чего остальные задачи должны быть решены самостоятельно. Эти задачи снабжены ответами и необходимыми указаниями.

Задача 35,1. Исследовать функцию $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$.

Решение. 1. Определим область существования этой функции. Функция существует при всех значениях x, кроме $x = -1$, при котором знаменатель дроби обращается в нуль. Значит, функция определена в интервалах $(-\infty, -1)$ и $(-1, +\infty)$.

2. Исследуем вопрос о наличии центра симметрии и оси симметрии. Проверим для этого выполняются ли равенства $f(-x) = f(x)$ и $f(-x) = -f(x)$.

Непосредственная подстановка убеждает нас, что ни одно из этих равенств не выполняется, так что ни центра, ни оси симметрии график функции не имеет.

3. Числитель и знаменатель дроби $y = \frac{x^4}{2(x+1)^2}$ непрерывные функции и, следовательно, функция y будет непрерывной при всех значениях x, кроме $x = -1$, при котором знаменатель дроби обращается в нуль.

4. Переходим к определению асимптот графика.

а) Вертикальные асимптоты найдем, приравняв знаменатель нулю: $2(x+1)^2 = 0$; $x = -1$.

Вертикальная асимптота одна: ее уравнение $x = -1$.

б) Горизонтальные асимптоты находим так: отыскиваем $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y$

$$\lim_{x \to \pm\infty} y = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = \pm\infty,$$

а это означает, что горизонтальных асимптот нет.

в) Наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{x \cdot 2(x+1)^2} = \frac{1}{2}.$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{x^3}{2(x+1)^2} - \frac{1}{2}x\right] = \frac{1}{2} \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-2x^2 - x}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (-2) = -1.$$

Наклонная асимптоты одна: $y = \frac{1}{2}x - 1$.

5 и 6. Определяем интервалы возрастания и убывания функции и экстремум функции.

Находим первую производную $y' = \frac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3}$.

Определим критические точки: 1) Решаем уравнение $y' = 0$, т. е. уравнение $\frac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3} = 0$ и находим, что $x_1 = -3$; $x_2 = 0$.

2) Определяем значения x, при которых $y' = \infty$. Таким значением является $x = -1$. Но это значение рассмотрению не должно подлежать, так как оно не входит в область определения функции. Критические точки, подлежащие рассмотрению: $x_1 = -3$, $x_2 = 0$ и точка $x = -1$ — разделяют интервалы существования функции на такие интервалы:

$$1)\ (-\infty, -3);\ 2)\ (-3, -1);\ 3)\ (-1, 0);\ (0, +\infty).$$

В каждом из этих интервалов производная сохраняет знак: в первом — плюс, во втором—минус, в третьем—плюс, в четвертом—

плюс (в этом можно убедиться, взяв в каждом интервале произвольное значение x и вычислив при нем значение y'). Последовательность знаков первой производной запишется так: $+$, $-$, $+$, $+$. Значит, в интервале $(-\infty, -3)$ функция возрастает, в интервале $(-3, -1)$ — убывает, в интервалах $(-1, 0)$ и $(0, +\infty)$ функция возрастает.

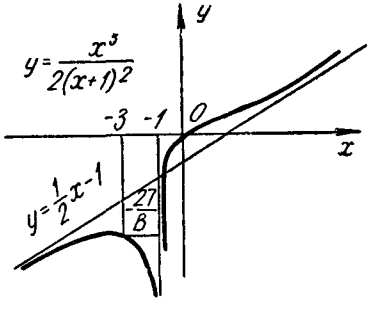
При $x = -3$ функция имеет максимум и $y_{\text{макс.}} = -\frac{28}{8}$. Так как знаки во втором и третьем интервалах различны, то можно было бы предположить, что при $x = -1$ есть экстремум. Но такое предположение неверно, так как при $x = -1$ заданная функция не существует. Итак, функция имеет единственный экстремум (максимум) при $x = -3$.

7 и 8. Определение интервалов выпуклости и вогнутости графика функции и точек перегиба.

Находим, что $y'' = \frac{3x}{(x+1)^4}$ и определяем критические точки второго рода: 1) решаем уравнение $\frac{3x}{(x+1)^4} = 0$ и находим, что $x = 0$; 2) определяем значения x, при котором $y'' = \infty$. Таким значением является $x = -1$). Как уже было отмечено выше, это значение рассматриваться не должно, так как при нем не существует заданной функции.

Критическая точка второго рода $x = 0$ разделяет интервалы $(-\infty, -1)$, $(-1, +\infty)$ существования функции на интервалы:

$$1)\ (-\infty, -1);\ 2)\ (-1, 0);\ 3)\ (0, +\infty).$$



Фиг. 35,1.

В каждом из этих интервалов вторая производная конечна и сохраняет знак: в первом — минус, во втором — минус, в третьем — плюс, и мы имеем такое чередование знаков второй производной в этих интервалах: $-$, $-$, $+$.

Значит, в интервалах $(-\infty, -1)$ и $(-1, 0)$ кривая выпукла, а в интервале $(0, +\infty)$ — вогнута. При $x = 0$ вторая производная равна нулю, а при переходе из второго интервала в третий она поменяла знак. Это указывает на то, что при $x = 0$, кривая имеет точку перегиба. Координаты точки перегиба $(0, 0)$ — это начало координат. Все полученные сведения наносим на чертеж и получаем эскиз кривой (фиг. 35,1).

Задача 35,2. Исследовать функцию $y = \frac{x^3}{x^2 + 2x + 3}$.

1. Определим область существования функции. Прежде всего, определим, при каких значениях x знаменатель $x^2 + 2x + 3$ обращается в нуль. Приравниваем знаменатель нулю и решим уравнение $x^2 + 2x + 3 = 0$; получим, что $x = -1 \pm i\sqrt{2}$. Корни знаменателя комплексны. Значит, ни при одном вещественном значении x знаменатель дроби в нуль не обращается. Дробь, представляющая собой отношение двух непрерывных функций, будет функцией непрерывной при всех значениях x, за исключением тех, при которых знаменатель дроби обращается в нуль. В нашем случае числитель и знаменатель — функции, непрерывные на всей оси. Следовательно, заданная функция непрерывна при любом x (мы выяснили, что ни при одном вещественном x знаменатель в нуль не обращается), и областью ее определения является вся ось Ox, т. е. интервал $(-\infty, +\infty)$.

2. Определим, нельзя ли отнести данную функцию к классу четных или нечетных функций. Для этого вычислим $f(-x)$: $f(-x) = \frac{-x^3}{x^2 - 2x + 3}$. Мы заключаем, что $f(x)$ не равно ни $f(-x)$, ни $-f(x)$, т. е. нашу функцию нельзя отнести ни к классу четных, ни к классу нечетных функций, и график функции не имеет ни оси, ни центра симметрии.

3. Определим теперь асимптоты графика: а) вертикальных асимптот нет, так как нет тех конечных значений x, при которых $y \to \infty$; б) найдем горизонтальные асимптоты:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{x^2 + 2x + 3} = \pm\infty.$$

Так как конечный предел отсутствует, то горизонтальных асимптот нет; в) находим наклонные асимптоты, уравнение которых $y = kx + b$:

$$k_1 = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x(x^2 + 2x + 3)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2 + 2x + 3} = 1;$$

$$k_2 = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{x(x^2 + 2x + 3)} = 1;$$

$$b_1 = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 + 2x + 3} - x\right) = -\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 + 3x}{x^2 + 2x + 3} = -2;$$

$$b_2 = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 + 2x + 4} - x\right) = -2.$$

Значения k и b как при $x \to +\infty$, так и при $x \to -\infty$ одни и те же. Наклонная асимптота одна; $y = x - 2$.

3. Теперь определим интервалы возрастания и убывания функции и ее экстремум $y' = \frac{x^2(x^2 + 4x + 9)}{(x^2 + 2x + 3)^2}$.

Определим критические точки функции: 1) Решаем уравнение $y'=0$, т. е. уравнение $\frac{x^2(x^2+4x+9)}{(x^2+2x+3)^2}=0$. Из него следует, что $x=0$ и $x^2+4x+9=0$, т. е. $x=-2\pm i\sqrt{5}$. Значит, производная имеет один действительный корень $x=0$.

2) Ни при одном действительном значении x первая производная не принимает бесконечно больших значений (из уравнения $x^2+2x+3=0$ следует, что $x=-1\pm i\sqrt{2}$). Таким образом, имеется одна критическая точка $x=0$. Область существования функции — интервал $(-\infty, +\infty)$ она разделяет на два интервала: 1) $(-\infty, 0)$ и 2) $(0, +\infty)$. Выбирая в каждом из них произвольные значения x и вычислив при нем y', мы получим такую последовательность знаков первой производной: $+$, $+$.

Так как в рассматриваемых двух соседних интервалах y' имеет один и тот же знак, то в критической точке $x=0$ экстремума нет: во всей области существования функции возрастает.

5. Определяем точки перегиба: $y''=\frac{2x(x^2+18x+27)}{(x^2+2x+3)^3}$. Приравниваем y'' нулю:

$$\frac{2x(x^2+18x+27)}{(x^2+2x+3)^3}=0;$$

$$2x(x^2+18x+27)=0;\ x=0;\ x^2+18x+27=0;$$

$$x=-9\pm\sqrt{54};\ x_2\approx-16{,}2;\ x_3\approx-1{,}8.$$

Ни при одном значении x знаменатель дроби в нуль не обращается; таким образом, критическими точками второго рода будет

$$x_1\approx-16{,}2;\ x_2\approx-1{,}8;\ x_3=0.$$

Эти точки разделяют область существования функции — интервал $(-\infty, +\infty)$ на интервалы 1) $(-\infty; -16{,}2)$; $(-16{,}2; -1{,}8)$; 3) $(-1{,}8; 0)$ и 4) $(0; +\infty)$.

Для определения знака второй производной в каждом из этих интервалов достаточно определить ее знак в произвольной точке этого интервала, так как при всех значениях x из данного интервала она имеет один и тот же знак. Последовательность знаков второй производной записывается так: $-$, $+$, $-$, $+$, и так как в каждом из двух соседних интервалов вторая производная имеет различные знаки, то найденные три критические точки второго рода — точки перегиба графика функции. Их координаты: 1) $(-16{,}2; -18{,}2)$; 2) $(-1{,}8; -2{,}64)$ 3) $(0, 0)$.

Прежде чем приступить к построению эскиза графика функции, определим взаимное расположение кривой и асимптоты.

Выясним, не пересекает ли кривая асимптоту. Для этого решим совместно их уравнения:

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{x^3}{x^2+2x+3} \\ y &= x-2 \end{aligned}\right\}. \qquad (35,1)$$

Исключая y, получим, что $x-2=\frac{x^2}{x^2+2x+3}$, откуда

$$(x-2)(x^2+2x+3)=x^2;\ x=-6.$$

Подставляя это значение во второе уравнение системы (35,1), получим, что $y=-8$. Асимптота пересекает кривую в точке $(-6,\ -8)$.

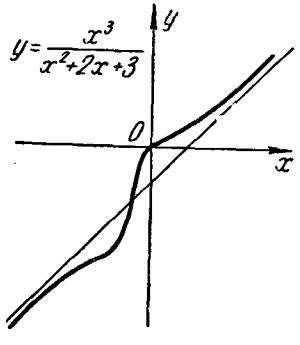
У нас $y_{\text{кр.}}=\frac{x^3}{x^2+2x+3}$; $y_{\text{ас.}}=x-2$;

$$\delta=y_{\text{кр.}}-y_{\text{ас}}=\frac{x^3}{x^2+2x+3}-(x-2)=\frac{x+6}{x^2+2x+3}.$$

Так как знаменатель положителен при любом x (корни его комплексны), то знак дроби зависит от знака числителя. Он будет положительным при $x+6>0$, т. е. при $x>-6$. Значит, при $x>-6$ кривая располагается над асимптотой.

Разность δ будет отрицательной, когда числитель дроби отрицательный, $x+6<0$, т. е. при $x<-6$, а кривая расположена ниже асимптоты при $x<-6$.

Теперь достаточно данных, чтобы начертить эскиз кривой (фиг. 35,2).



Фиг. 35,2.

Задача 35,3. Исследовать функцию $y=\frac{e^x}{x}$.

1. Определим область существования функции:

Функция существует при всех значениях x, кроме $x=0$, т. е. в интервалах $(-\infty,\ 0)$, $(0,\ +\infty)$. В этих интервалах функция непрерывна.

2. Исследуем вопрос об оси и центре симметрии кривой.

У нас $f(x)=\frac{e^{-x}}{x}$, а $f(-x)=\frac{e^{-x}}{-x}$ (ни одно из равенств $f(x)=f(-x)$ и $f(-x)=-f(x)$ не имеет места, т. е. у кривой не существует ни оси, ни центра симметрии).

3. Определим асимптоты графика функции.

а) Значение $x=0$ является точкой разрыва функции. Верти-

кальная асимптота имеет уравнение $x=0$ и, таким образом, ось Oy является вертикальной асимптотой кривой. При этом

$$\lim_{x\to-0} y=\lim_{x\to-0}\frac{e^x}{x}=-\infty \quad \lim_{x\to+0} y=\lim_{x\to+0}\frac{e^x}{x}=+\infty.$$

б) Определяем горизонтальные асимптоты:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty; \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x}=0$$

и горизонтальная асимптота имеет уравнение $y=0$ (ось Ox является горизонтальной асимптотой).

в) Определим наклонные асимптоты, уравнение которых $y=kx+b$. По формуле (34,2)

$$k_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^x}{x}}{x}=+\infty.$$

При $x\to+\infty$ наклонной асимптоты нет.

При $x\to-\infty$, $k_2=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\frac{e^x}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x^2}=0$, а это опять-таки говорит о том, что наклонной асимптоты у кривой нет.

4. Определяем интервалы монотонности функции:

$$y'=\frac{e^x(x-1)}{x^2}.$$

Находим критические точки:

1) Из уравнения $y'=0$, т. е. $\frac{e^x(x-1)}{x^2}=0$, следует, что $x-1=0$, а $x=1$;

2) $y'=\infty$ при $x=0$, но при $x=0$ функция не определена.

Таким образом, функция имеет критическую точку: $x=1$. Область существования функции она разделяет на интервалы: 1) $(-\infty, 0)$; 2) $(0, 1)$; 3) $(1, +\infty)$. В каждом из этих интервалов y' сохраняет знак. Беря в них произвольные значения x и вычислив при них y', получаем такую последовательность знаков производной: $-$, $-$, $+$.

Заключение. В первых двух интервалах функция убывает, в третьем возрастает. При $x=1$ функция достигает минимума, а $y_{\min}=y(1)=e$. Координаты точки экстремума $(1, e)$.

5. Теперь определим точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости графика функции:

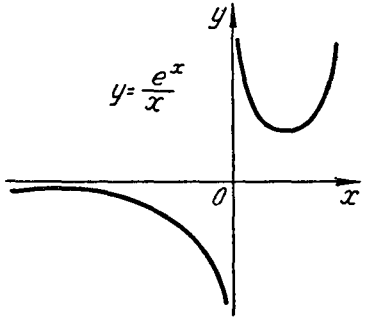
$$y''=\frac{e^x(x^2-2x+2)}{x^3}.$$

Определим критические точки второго рода:

Из уравнения $\frac{e^x(x-2x+2)}{x^3}=0$, учитывая, что $e^x \neq 0$ ни при одном конечном значении x, должно быть $x^2-2x+2=0$, т. е. $x=1\pm i$. Значит, нет действительных значений x, при которых вторая производная равна нулю.

Определим те значения x, при которых $y''=\infty$. Таким единственным значением является $x=0$. Значит, имеется одна критическая точка второго рода $x=0$. Но точки перегиба при $x=0$ не может быть, так как при $x=0$ заданная функция не существует. Итак, точек перегиба график функции не имеет.

Для определения интервалов выпуклости и вогнутости графика функции рассмотрим знак y'' на интервалах $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$ Выбрав в каждом из них произвольное значение x и вычислив при нем y'', получим такую последовательность знаков второй производной: —, +. Значит, на интервале $(-\infty, 0)$ кривая выпуклая, а на интервале $(0, +\infty)$ кривая вогнута.



Фиг. 35,3.

Еще раз подчеркиваем, что несмотря на то, что переходя через $x=0$ вторая производная поменяла знак, точка $x=0$ не является точкой перегиба, так как при $x=0$ не существует заданная функция (фиг. 35,3).

Задача 35,4 (для самостоятельного решения). Исследовать функцию $y=\frac{3x^3}{3x^2+4x+4}$ и построить эскиз графика.

Ответ. 1) Область существования функции — бесконечный интервал $(-\infty, +\infty)$: 2) функция непрерывна при любом x; 3) центра симметрии и оси симметрии нет; 4) вертикальных и горизонтальных асимптот нет; наклонная асимптота $y=x-\frac{4}{3}$; 5) экстремума нет, функция возрастает на всем интервале существования; 6) критические точки второго рода: а) $x_1=-6-2\sqrt{6}$, $y_1\approx-4{,}5$; б) $x_2=-6+2\sqrt{6}$; $y^2\approx-1{,}5$; в) $x_3=0$; $y_3=0$ является точками перегиба; 7) на интервале $(-\infty, -6-2\sqrt{6})$ кривая выпукла; на интервале $(-6-2\sqrt{6}; -6+2\sqrt{6})$ кривая вогнута; на интервале $(-6+2\sqrt{6}; 0)$ кривая выпукла, на интервале $(0, +\infty)$ кривая вогнута.

Задача 35,5 (для самостоятельного решения). Исследовать функцию $y=\frac{x}{e^x}$ и построить эскиз графика.

Ответ. 1) Область определения — интервал $(-\infty, +\infty)$; 2) функция не относится ни к четным, ни к нечетным: график функции не имеет ни центра, ни оси симметрии; 3) в интервале $(-\infty, 0)$ $y<0$ кривая находится под осью Ox, в интервале $(0, +\infty)$ кривая расположена над осью Ox, а в точке $(0, 0)$ она пересекает координатные оси; 4) вертикальных и наклонных асимптот нет. Горизонтальная асимптота $y=0$ — ось Ox; 5) на интервале $(-\infty, 1)$ функция возрастает; на интервале $(1, +\infty)$ — убывает. При $x=1$ максимум, $y_{\max}\approx 0{,}37$; 6) на интервале $(-\infty, 2)$ $y''<0$ кривая выпукла, на интервале $(2, +\infty)$ $y''>0$ кривая вогнута. Точка перегиба: $x=2$; $y\approx 0{,}3$.

Задача 35,6 (для самостоятельного решения). Исследовать функцию $y=\frac{x^2-2x+2}{x-1}$ и построить эскиз кривой.

Ответ. 1) Область определения — два бесконечных интервала: $(-\infty, 1)$ и $(1, +\infty)$; 2) точка разрыва одна: $x=1$; 3) функция не принадлежит ни к четным, ни к нечетным: кривая не имеет ни оси, ни центра симметрии; 4) асимптоты: вертикальная $x=1$; наклонная $y=x-1$; 5) критические точки первого рода: $x_1=0$; $x_2=1$; $x_3=2$. В интервале $(-\infty, 0)$ $y'>0$ функция возрастает; в интервале $(0,1)$ $y'<0$ функция убывает; в интервале $(1,2)$ $y'<0$ функция убывает; в интервале $(2, +\infty)$ $y'>0$ функция возрастает. При $x=0$ функция имеет максимум: $y_{\max}=-2$; при $x=2$ функция имеет минимум: $y_{\min}=2$. Экстремальные точки $(0, -2)$ и $(2,2)$; 6) $y''=\frac{2}{(x-1)^3}$. Критическая точка второго рода $x=1$. Перегиба в ней быть не может, так как в этой точке функции не существует: точки перегиба нет. При $x<1$ $y''<0$: на интервале $(-\infty, 1)$ кривая выпукла; при $x>1$ $y''>0$: на интервале $(1, +\infty)$ кривая вогнута.

Задача 35,7 (для самостоятельного решения). Исследовать функцию $y=\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3$ и построить эскиз ее графика.

Ответ. 1) Интервалы существования функции $(-\infty, -1)$; $(-,+\infty)$;

2) ни оси, ни центра симметрии кривая не имеет;

3) кривая пересекает ось Ox в точке $x=1$. В интервале $(-\infty, -1)$ кривая лежит над осью Ox, в интервале $(-1,1)$ — под осью Ox, а в интервале $(1, +\infty)$ — над осью Ox;

4) асимптоты: $x=-1$ — вертикальная, $y=1$ — горизонтальная;

5) критические точки первого рода; $x_1=-1$ и $x_2=1$. Значение $x=-1$ не должно рассматриваться, так как оно не принадлежит области существования функции; функция возрастает в интервалах, где она определена; экстремума нет;

6) критические точки второго рода: $x_1=-1$; $x_2=1$; $x_3=3$. Значение $x_1=-1$ не должно рассматриваться: $y(-1)$ не сущест-

вует. В интервале $(-\infty, -1)$ кривая вогнута, в интервале $(-1, 1)$ — выпукла, в интервале $(1,3)$ — вогнута, а интервале $(3, +\infty)$ — выпукла. Точки перегиба: $x = 1$ и $x=3$; их координаты: $(1, 0)$; $\left(3, \frac{1}{8}\right)$.

Задача 35,8 (для самостоятельного решения). Исследовать функцию $y = \frac{2x}{1+x^2}$ и построить эскиз графика.

Ответ. 1) Область определения — вся числовая ось;

2) функция — нечетная, кривая симметрична относительно начала координат;

3) горизонтальная асимптота $y = 0$ — ось Ox. Других асимптот нет;

4) критические точки первого рода: $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$: в интервале $(-\infty, -1)$ функция убывает, в интервале $(-1, 1)$ — возрастает, в интервале $(1, +\infty)$ убывает; при $x = -1$ — минимум, $y_{\min} = -1$; при $x = 1$ — максимум, $y_{\max} = 1$. Экстремальные точки $(-1, -1)$ и $(1, 1)$;

5) критические точки второго рода

$$x_1 = -\sqrt{3},\ x_2 = 0,\ x_3 = \sqrt{3}$$

являются точками перегиба.

В интервале $(-\infty, -\sqrt{3})$ $y'' < 0$ кривая выпукла, в интервале $(-\sqrt{3}, 0)$ $y'' > 0$ кривая вогнута, в интервале $(0, \sqrt{3})$ $y'' < 0$ — кривая выпукла, в интервале $(\sqrt{3}, +\infty)$ $y'' > 0$ кривая вогнута;

6) при $x < 0$ кривая расположена под осью Ox, а при $x > 0$ — над осью Ox.

Задача 35,9 (для самостоятельного решения). Исследовать функцию $y = x \ln x$ и построить эскиз ее графика.

Ответ. 1) Область существования функции — интервал $(0, +\infty)$: функция определена только при положительных значениях x;

2) ни оси симметрии, ни центра симметрии нет;

3) асимптот нет;

4) критическая точка первого рода $x = e^{-1}$. В интервале $(0, e^{-1})$ функция убывает, в интервале $(e^{-1}, +\infty)$ — возрастает. При $x = e^{-1}$ минимум: $y_{\min} = -e^{-1}$ 5) $y'' = \frac{1}{x}$. Критическая точка второго рода $x = 0$ не принадлежит области существования функции. Точек перегиба нет. Во всей области существования функции $y'' > 0$. Кривая выпукла. 6) Кривая пересекает ось Ox в точке $x = 1$. При $0 < x < 1$ кривая находится под осью Ox, а при $x > 1$ — над осью Ox.