Задача 36, 19. В какой точке кривая $y = \ln x$ имеет наименьший радиус кривизны?

Решение. Находим по формуле (36, 16), что в произвольной точке $A(x, y)$ этой кривой $R = \frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{x}$.

Чтобы определить наименьшее значение R, находим производную

$$\frac{dR}{dx} = \frac{(2x^2-1)\sqrt{1+x^2}}{x^2},$$

приравниваем ее нулю и решаем уравнение $(2x^2-1)\sqrt{1+x^2} = 0$, откуда $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Критической точкой является также и $x = 0$. Но значения $x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ и $x = 0$ должны быть отброшены, так как для значений $x \leqslant 0$ функция $y = \ln x$ не существует (на кривой $y = \ln x$ нет точек с абсциссами $x \leqslant 0$). Осталось исследовать значение $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Найдите R'', подставьте в полученное выражение $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ и убедитесь, что $R''\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) > 0$. Это доказывает, что радиус кривизны кривой $y = \ln x$ будет наименьшим в точке с абсциссой $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, т. е. в точке $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2};\ -\frac{1}{2}\ln 2\right)$.

Задача 36, 20 (для самостоятельного решения). Доказать, что у цепной линии $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ радиус кривизны пропорционален квадрату ординаты $\left(R = \frac{1}{a}y^2\right)$ и что он равен длине нормали N.

Указание. $y' = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)$: $y'' = \frac{y}{a^2}$.

ТРИДЦАТЬ СЕДЬМОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Функции многих независимых переменных. Область существования. Частные производные. Полное приращение и полный дифференциал первого порядка функции нескольких независимых переменных.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

1. Переменные $x, y, z, \ldots t$ называются независимыми между собой, если каждая из них может принимать любые значения в своей области изменения, независимо от того, какие значения принимают при этом остальные переменные.

2. Переменная величина u называется функцией независимых переменных $x, y, z, \ldots, t$, если каждой системе значений этих переменных в области их изменения соответствует единственное определенное значение u.*

Символически функция u независимых переменных $x, y, z, \ldots, t$ записывается так:

$$y = f(x, y, z, \ldots, t). \qquad (37.1)$$

3. Областью существования функции $f(x, y, z, \ldots, t)$ называется совокупность значений независимых переменных $x, y, z, \ldots, t$, при которых функция определена (т. е. принимает действительные значения). Область существования функции называется также областью определения функции.

В дальнейшем для упрощения записей все определения и формулы приводятся только для функций от трех независимых переменных.

4. Частные приращения функции. Если $u = f(x, y, z)$ и одна из независимых переменных, например x, получила приращение Δx, то частным приращением $\Delta_x u$ функции называется разность $\Delta_x u = f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)$. Соответственно

$$\Delta_y u = f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z),$$

а

$$\Delta_z u = f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z).$$

5. Частные производные. Составим отношение $\frac{\Delta_x u}{\Delta x}$. Если при *стремлении Δx к нулю это отношение стремится к определенному пределу, то этот предел называется частной производной функции $u = f(x, y, z)$ по независимой переменной x и обозначается одним из символов $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$, u'_x, f'_x.*

Таким образом

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x},$$

или в более подробной записи

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}.$$

Аналогично определяются частные производные функции $u = f(x, y, z)$ по независимым переменным y и z. Частная производная по y обозначается одним из символов $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, u'_y, f'_y, $\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y u}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y}$, *а частная производная*

* Многозначные функции нами не рассматриваются.

по z — одним из символов: $\frac{\partial u}{\partial z}$; $\frac{\partial f}{\partial z}$; u'_z; f'_z

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta_z u}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z)^*}{\Delta z}.$$

Вычисление частных производных функции нескольких независимых переменных производится по тем же правилам, по которым вычисляются производные функции одной независимой переменной, только следует иметь в виду, что при определении частной производной надо считать постоянными все независимые переменные, кроме той, по которой вычисляется частная производная.

Задача 37, 1. Найти область существования функции $u = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

Решение. Представим функцию в виде $u = \sqrt{4 - (x^2 + y^2)}$. Очевидно, что функция определена для тех значений x и y, которые удовлетворяют неравенству $x^2 + y^2 \leqslant 4$. На языке геометрии это означает, что функция определена в точках, лежащих внутри окружности $x^2 + y^2 = 4$ и на ее границе, так как для всех точек, лежащих вне ее, имеет место неравенство $x^2 + y^2 > 4$.

Задача 37, 2. Найти область существования функции $z = \ln(x - y)$.

Решение. Так как отрицательные числа и нуль логарифмов не имеют, то должно выполняться неравенство $x - y > 0$, т. е. $y < x$.

Точки плоскости xOy, координаты которых удовлетворяют этому неравенству, расположены под прямой $y = x$, причем точки, лежащие на этой прямой, рассматриваться не могут. Короче: область определения функции — полуплоскость, расположенная под прямой $y = x$, причем сама прямая $y = x$ при рассмотрении не учитывается.

Задача 37, 3 (для самостоятельного решения). $u = \frac{z}{x + y}$. Найти область существования функции.

Ответ. Функция определена во всех точках пространства, кроме точек плоскости $x + y = 0$, так как в точках этой плоскости знаменатель дроби у заданной функции обращается в нуль.

Задача 37, 4 (для самостоятельного решения). Найти область существования функций: 1) $z = xy$ и 2) $z = x^2 + y^2$.

Ответ. Обе функции определены во всей плоскости xOy, т. е. при любых значениях x и y.

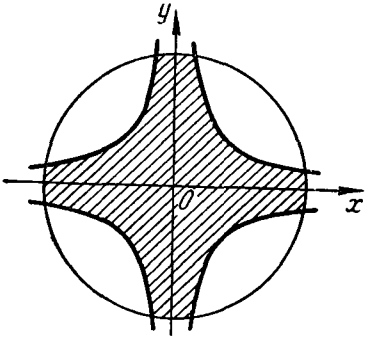
---

*) Следует иметь в виду, что символы $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, ... нельзя рассматривать как частные от деления, например ∂f на ∂x, так как ни ∂f, ни ∂x в отдельности смысла не имеют.

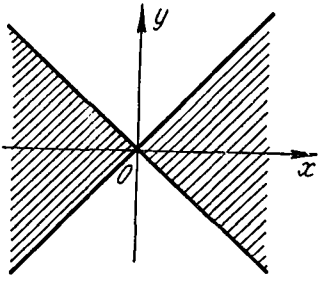
Задача 37, 5. Найти область существования функции $z = \arcsin(3 - x^2 - y^2)$.

Решение. Так как функция $u = \arcsin t$ определена для значений аргумента t из отрезка $[-1, +1]$, то искомая область существования найдется из условия $-1 \leqslant 3 - x^2 - y^2 \leqslant 1$, откуда следует, что $2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4$ и область существования функции заключена между двумя концентрическими окружностями: $x^2 + y^2 = 2$ и $x^2 + y^2 = 4$, причем могут рассматриваться и точки, принадлежащие этим окружностям.

Задача 37, 6 (для самостоятельного решения). Найти область существования функции $z = \arcsin 3xy$.



Фиг. 37,1.



Фиг. 37,2.

Ответ. Область существования ограничена двумя сопряженными гиперболами:

$$y = \frac{1}{3x} \text{ и } y = -\frac{1}{3x}.$$

Задача 37, 7 (для самостоятельного решения). Найти область существования функции $f(x, y) = \arcsin(1 - x^2 - y^2) + \arcsin 2xy$.

Ответ. Областью существования является общая часть областей существования слагаемых функций: 1) $\arcsin(1 - x^2 - y^2)$ и 2) $\arcsin 2xy$, т. е. область, изображенная на фиг. 37, 1.

Задача 37, 8. Найти область существования функции $u = \ln \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$.

Решение. Должно выполняться требование: $\frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} > 0$. Эта дробь положительна, когда положителен ее знаменатель, т. е. когда $x^2 - y^2 > 0$, или $y^2 < x^2$, а это влечет за собой неравенство $|y| < |x|$.

Рассмотрим два случая: 1) $x > 0$, 2) $x < 0$. 1) Если $x > 0$, то $|x| = x$, и тогда $|y| < x$, или $-x < y < x$. На языке геомет-

рии это означает, что область определения есть часть правой полуплоскости (т. к. рассматриваются значения $x > 0$), ограниченная прямыми $y = x$ и $y = -x$, причем точки, лежащие на этих прямых, рассматриваться не могут. 2) Если $x < 0$, то $|x| = -x$, и тогда $|y| < -x$, или $x < y < -x$.

Последние неравенства определяют ту часть левой полуплоскости, которая находится между прямыми $y = -x$ и $y = x$, причем опять-таки точки, принадлежащие этим прямым, не должны рассматриваться (фиг. 37, 2).

Задача 37, 9 (для самостоятельного решения). $u = \ln x + \ln y$. Найти область определения функции.

Ответ. Первый квадрант ($x > 0$, $y > 0$), причем оси Ox и Oy исключаются.

Задача 37, 10 (для самостоятельного решения). $u = \sqrt{\ln x + \ln y}$. Найти область определения функции.

Ответ. $x > 0$; $y > 0$; $xy \geqslant 1$. Область состоит из точек первого квадранта, лежащих над гиперболой $y = \frac{1}{x}$ и на ней.

Задача 37, 11. Найти частные производные функций: 1) $u = x^2 + 3xy + 4y^2$; 2) $u = \sin(3x + 5y - 4z)$; 3) $u = e^{\frac{x}{y}}$.

Решение. 1) Функция u — функция двух независимых переменных — x и y. При определении частной производной функции u по независимой переменной x вторая независимая переменная должна рассматриваться как величина постоянная. Поэтому $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 3y$, так как производная по x от $4y^2$ равна нулю, как производная от постоянной величины.

При отыскании $\frac{\partial u}{\partial y}$ независимая переменная x рассматривается как величина постоянная, а потому $\frac{\partial u}{\partial y} = 3x + 8y$.

2) Функция u — функция трех независимых переменных: x, y и z. При определении частной производной по каждой из этих переменных две других следует считать величинами постоянными. Поэтому $\frac{\partial u}{\partial x} = 3\cos(3x + 5y - 4z)$; $\frac{\partial u}{\partial y} = 5\cos(3x + 5y - 4z)$; $\frac{\partial u}{\partial z} = -4\cos(3x + 5y - 4z)$.

3) Заданная функция есть функция двух независимых переменных x и y. При дифференцировании по каждой из них вторая переменная должна рассматриваться как величина постоянная.

Поэтому $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y} e^{\frac{x}{y}}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} e^{\frac{x}{y}}$, так как $\left(\frac{x}{y}\right)'_x = \frac{1}{y}$, ибо производная от дроби с постоянным знаменателем равна производной числителя, разделенной на тот же знаменатель, а производная по y от дроби $\frac{x}{y}$ есть производная от дроби с постоян-

ным числителем x и переменным знаменателем y. Как известно, в таком случае

$$\left(\frac{x}{y}\right)_y = -\frac{x}{y^2}.$$

Задача 37, 12 (для самостоятельного решения). Найти частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ функций:

$$1)\ z = \frac{x}{y} + \frac{y}{x};\ 2)\ z = x^n + y^n;\ 3)\ z = \cos(ax + by).$$

Ответ. 1) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y} - \frac{y}{x^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{x}$;

2) $\frac{\partial z}{\partial x} = nx^{n-1}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = ny^{n-1}$

(при дифференцировании по x производная от y^n равна нулю, так как y^n рассматривается как величина постоянная, а при дифференцировании по y производная от x^n равна нулю, так как x^n считается теперь величиной постоянной).

3) $\frac{\partial z}{\partial x} = -a\sin(ax + by)$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -b\sin(ax + by)$.

Задача 37, 13 (для самостоятельного решения). Найти частные производные функций: 1) $u = ax + by + cz$; 2) $u = y\sin x + \sin y$; 3) $u = x^{\sin y}$ $(x > 0)$; 4) $u = z^{xy}$ $(z > 0)$, 5) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Ответ. 1) $\frac{\partial u}{\partial x} = a$; $\frac{\partial u}{\partial y} = b$; $\frac{\partial u}{\partial z} = c$ (при дифференцировании по x две другие независимые переменные считаются постоянными, а потому производная по x от by и от cz, как производная от постоянных, равна нулю. Аналогично при дифференцировании по y независимые переменные x и z считаются постоянными, и поэтому производная по y от ax и cz равна нулю и т. д.)

$$2)\ \frac{\partial u}{\partial x} = y\cos x;\ \frac{\partial u}{\partial y} = \sin x + \cos y;$$

$$3)\ \frac{\partial u}{\partial x} = \sin y \cdot x^{\sin y - 1};\ \frac{\partial u}{\partial y} = x^{\sin y} \cdot \cos y \cdot \ln x$$

(здесь при дифференцировании по x заданную функцию следует рассматривать как степенную. Основание степени x — величина переменная, а показатель степени $\sin y$ — величина постоянная.

При дифференцировании по y величину x следует рассматривать как постоянную, а $\sin y$ — как величину переменную, а потому в этом случае функцию $x^{\sin y}$ следует рассматривать как показательную).

$$4)\ \frac{\partial u}{\partial z} = xyz^{xy-1};\ \frac{\partial u}{\partial y} = xz^{xy}\ln z;\ \frac{\partial u}{\partial x} = yz^{xy}\ln z;$$

$$5)\ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}};\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}};\ \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Задача 37, 14 (для самостоятельного решения). Найти частные производные функций: 1) $z = e^x \cos y - e^y \sin x$;

$$2)\ z = \sqrt{x^2 + y^2};\quad 3)\ z = \operatorname{arctg}\frac{x}{y};$$

$$4)\ z = e^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}};\quad 5)\ u = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Ответ. 1) $\frac{\partial z}{\partial x} = e^x \cos y - e^y \cos x$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -e^x \sin y - e^y \sin x$;

2) $\frac{\partial z}{\partial x} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;

3) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x^2 + y^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{x^2 + y^2}$;

4) $\frac{\partial z}{\partial x} = -e^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}} \cdot \frac{y}{x^2 + y^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = e^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}} \cdot \frac{x}{x^2 + y^2}$;

5) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2 + z^2}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{xy}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}$;

$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{xz}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}$;

Задача 37, 15 (для самостоятельного решения). Известно, что сторона треугольника a определяется через две другие стороны и угол α между ними по формуле

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}.$$

Найти $\frac{\partial a}{\partial b}$, $\frac{\partial a}{\partial c}$ и $\frac{\partial a}{\partial \alpha}$.

Ответ. $\frac{\partial a}{\partial b} = \frac{b - c\cos\alpha}{\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}} = \frac{b - c\cos\alpha}{a}$;

$\frac{\partial a}{\partial c} = \frac{c - b\cos\alpha}{a}$; $\frac{\partial a}{\partial \alpha} = \frac{bc\sin\alpha}{a}$.

Задача 37, 16 (для самостоятельного решения). Сила тока согласно закону Ома вычисляется по формуле $I = \frac{V}{R}$. Найти $\frac{\partial I}{\partial V}$ и $\frac{\partial I}{\partial R}$.

Ответ. $\frac{\partial I}{\partial R} = -\frac{V}{R^2}$; $\frac{\partial I}{\partial V} = \frac{I}{R}$.

Задача 37, 17 (для самостоятельного решения). Формула Клапейрона $pV = RT$, где R — величина постоянная, связывает для идеального газа его объем V, давление p и абсолютную температуру T.

Считая каждую из этих величин V, p и T функцией, а две другие—независимыми переменными, определить частные производные этих функций.

Решение. 1) $V=\frac{RT}{p}$; $\frac{\partial V}{\partial T}=\frac{R}{p}$; $\frac{\partial V}{\partial p}=-\frac{RT}{p^2}$; 2) $p=\frac{RT}{V}$; $\frac{\partial p}{\partial T}=\frac{R}{V}$; $\frac{\partial p}{\partial V}=-\frac{RT}{V^2}$; 3) $T=\frac{pV}{R}$; $\frac{\partial T}{\partial p}=\frac{V}{R}$; $\frac{\partial T}{\partial V}=\frac{p}{R}$.

Докажите, что $\frac{\partial p}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial p}=-1$.

Задача 37, 18. Доказать, что функция $z=y^2\sin(x^2-y^2)$ удовлетворяет уравнению $y^2\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=2xz$.

Решение. $$\frac{\partial z}{\partial x}=y^2\underbrace{\cos(x^2-y^2)}_{\substack{\text{производная функции}\\ \sin(x^2-y^2)}}\cdot\underbrace{2x}_{\substack{\text{производная}\\ \text{по } x \text{ функции}\\ x^2-y^2\text{, стоящей}\\ \text{под знаком синуса}}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\underbrace{2y}_{\substack{\text{производная}\\ \text{по } y \text{ первого}\\ \text{сомножителя}}}\cdot\sin(x^2-y^2)+y^2\cdot\underbrace{\cos(x^2-y^2)}_{\substack{\text{производная функ-}\\ \text{ции } \sin(x^2-y^2)}}\underbrace{(-2y)}_{\substack{\text{производная}\\ \text{по } y \text{ функции}\\ x^2-y^2}}$$

Умножая обе части первого равенства на y^2, а второго — на xy и почленно складывая, получим

$$y^2\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=2xy^2\sin(x^2-y^2).$$

Но так как $z=y^2\sin(x^2-y^2)$, то правая часть последнего равенства есть $2xz$, и тем самым требуемое доказано.

Задача 37, 19 (для самостоятельного решения). Доказать, что функция $z=\ln(x^2+y^2)$ удовлетворяет уравнению

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

Задача 37, 20 (для самостоятельного решения). Доказать, что если $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, то имеет место равенство

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

Полный дифференциал и полное приращение функции. Связь между полным дифференциалом функции и ее полным приращением

Полное приращение функции $u=f(x, y, z)$ определяется по формуле

$$\Delta u=f(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)-f(x,\ y,\ z). \qquad (37, 2)$$

где Δx, Δy, Δz — приращения независимых переменных.

По определению приращения независимых переменных Δx, Δy, Δz и их дифференциалы dx, dy и dz — числа, между собою равные:

$$\Delta x=dx;\ \Delta y=\Delta y;\ \Delta z=dz.$$

Полный дифференциал функции $u = f(x, y, z)$ обозначается символом du и вычисляется по формуле

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial y}{\partial z} dz \qquad (37, 3)$$

и аналогично, если $z = f(x, y)$, то

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy. \qquad (37,4)$$

Полный дифференциал du функции есть главная часть ее приращения Δu, линейная относительно Δx, Δy и Δz, т. е. $\Delta u \approx du$, причем при бесконечно малых Δx, Δy и Δz разность $\Delta u - du$ — величина бесконечно малая высшего порядка малости, чем $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$.

Приближенное равенство $\Delta u \approx du$ на основании формулы (37, 3) может быть записано так:

$$\Delta u \approx \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz, \qquad (37,5)$$

или более подробно:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) \approx f(x, y, z) + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz. \qquad (37, 6)$$

Это приближенное равенство тем более точно, чем меньше величины dx, dy, dz.

Вычисление Δu приращения функции представляет собой задачу, значительно более сложную, чем вычисление ее дифференциала du, а потому в практических вычислениях с достаточной точностью при малых приращениях независимых переменных заменяют вычисление приращения функции вычислением ее дифференциала.

Задачи 37,21—37,22 являются упражнениями в вычислении полного приращения и полного дифференциала функции, а также в применении формулы (37,6) для приближенных вычислений.

Задача 37,21. Найти полное приращение Δu и полный дифференциал du функции $u(x, y) = 3x^2 + xy - y^2 + 1$.

Решение. $\Delta u = u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) = 3(x + \Delta x)^2 + (x + \Delta x)(y + \Delta y) - (y + \Delta y)^2 + 1 - (3x^2 + xy - y^2 + 1)$;

$$\Delta u = \underline{3x^2} + 6x\,\Delta x + 3(\Delta x)^2 + xy + y\Delta x + x\Delta y + \Delta x \cdot \Delta y - y^2 - 2y\Delta y - (\Delta y)^2 + 1 - \underline{3x^2} - xy + y^2 - 1;$$

$$\Delta u = \underbrace{(6x + y)\,\Delta x + (x - 2y)\,\Delta y}_{du} + \underbrace{3(\Delta x^2) + \Delta x\Delta y - (\Delta y)^2}_{\text{при бесконечно малых } \Delta x \text{ и } \Delta y \text{ — величина бесконечно малая высшего порядка по сравнению с } \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \qquad (37, 7)$$

Так как $\frac{\partial u}{\partial x} = 6x + y$, а $\frac{\partial u}{\partial y} = x - 2y$, то на основании формулы (37, 4)

$$du = (6x + y)\,dx + (x - 2y)\,dy; \quad (\Delta x = dx;\ \Delta y = dy). \qquad (37, 8)$$

Разность

$$\Delta u - du = 3(\Delta x)^2 + \Delta x \cdot \Delta y - (\Delta y)^2 *$$

представляет собой погрешность, которая возникает от замены приращения Δu функции ее дифференциалом du. В связи с этим примером решим такой числовой пример; найти для заданной функции ее полное приращение и полный дифференциал в точке (1,2), если: 1) $\Delta x = 1$, $\Delta y = 2$; 2) $\Delta x = 0{,}1$; $\Delta y = 0{,}2$; 3) $\Delta x = 0{,}01$; $\Delta y = 0{,}02$.

1) Подставляя в (37, 7) значения $x = 1$, $y = 2$, $\Delta x = 1$, $\Delta y = 2$, находим, что

$$\Delta u = (6 \cdot 1 + 2)\,1 + (1 - 2 \cdot 2)\,2 + 3 \cdot 1^2 + 1 \cdot 2 - 2^2 = \\ = 8 - 6 + 3 + 2 - 4 = 3;$$

подставляя эти же значения в (37, 8), получаем, что

$$du = (6 \cdot 1 + 2)\,1 + (1 - 2 \cdot 2)\,2 = 8 - 6 = 2,$$

а разность

$$\Delta u - du = 3 - 2 = 1. \qquad (37,9)$$

2) Подставим теперь в (37,7) и (37,8) значения $x = 1$, $y = 2$, $\Delta x = 0{,}1$, $\Delta y = 0{,}2$, получим:

$$\Delta u = (6 \cdot 1 + 2)\,0{,}1 + (1 - 2 \cdot 2)\,0{,}2 + 3\,(0{,}1)^2 + \\ + 0{,}1\ 0{,}2 - (0{,}2)^2 = 0{,}8 - 0{,}6 + 0{,}03 + 0{,}02 - 0{,}04; \\ \Delta u = 0{,}21,$$

а

$$du = (6 \cdot 1 + 2)\,0{,}1 + (1 - 2 \cdot 2)\,0{,}2 = 0{,}8 - 0{,}6 = 0{,}20; \\ \Delta u - du = 0{,}21 - 0{,}20 = 0{,}01. \qquad (37,10)$$

3) Подставим теперь в (37,7) и (37, 8) те же значения x и y, но возьмем $\Delta x = 0{,}01$, а $\Delta y = 0{,}02$;

$$\Delta u = (6 \cdot 1 + 2)\,0{,}01 + (1 - 2 \cdot 2)\,0{,}02 + 3\,(0{,}01)^2 + \\ + 0{,}01 \cdot 0{,}02 - (0{,}02)^2 = 0{,}08 - 0{,}06 + 0{,}0003 + 0{,}0002 - \\ - 0{,}0004 = 0{,}0201;$$

$$du = (6 \cdot 1 + 2)\,0{,}01 + (1 - 2 \cdot 2)\,0{,}02 = 0{,}08 - 0{,}06 = 0{,}02,$$

а

$$\Delta u - du = 0{,}0201 - 0{,}02 = 0{,}0001. \qquad (37,11)$$

---

* В выражениях $(\Delta x)^2$, $(\Delta y)^2$ скобки могут быть опущены, так как Δx, Δy рассматриваются как единый символ.

Сравнивая разности (37, 10), (37, 11) и (37, 12) между полным приращением функции и ее полным дифференциалом, мы усматриваем, что они уменьшаются вместе с уменьшением приращений Δx и Δy независимых переменных.

Этот пример иллюстрирует высказанное выше утверждение, что равенство (37, 5) тем более точно, чем меньше приращения независимых переменных.

Задача 37, 22 (для самостоятельного решения). Найти полное приращение функции $u = x^3y^2$ и ее полный дифференциал в точке (2,1) при: 1) $\Delta x = -0{,}1$, $\Delta y = -0{,}1$; 2) $\Delta x = -0{,}01$; $\Delta y = -0{,}01$. В обоих случаях сравнивать разности $\Delta u - du$.

Ответ. 1) $\Delta u = -2{,}4442$; $du = -2{,}8$; $\Delta u - du = 0{,}3558$; 2) $\Delta u = -0{,}2762$; $du = -0{,}2800$; $\Delta u - du = 0{,}0038$.

Задача 37, 23. Найти полный дифференциал функции $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$.

Решение. Полный дифференциал функции находится по формуле (37, 4). Найдем $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$;

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Поэтому

$$dz = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dx + \frac{y}{(x + \sqrt{y^2 + x^2})\sqrt{x^2 + y^2}}\, dy.$$

Задача 37, 24 (для самостоятельного решения). Найти полный дифференциал функций: 1) $z = \frac{ay - bx}{by - ax}$; 2) $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$; 3) $z = x\sin y + y\sin x$; 4) $u = x + ye^{\frac{x}{y}}$.

Ответ. 1) $dz = \frac{(b^2 - a^2)(xdy - ydx)}{(by - ax^2)}$; 2) $dz = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$;

3) $dz = (\sin y + y\cos x)\,dx + (x\cos y + \sin x)\,dy$; 4) $du = (1 + e^{\frac{x}{y}})\,dx + \left(1 - \frac{x}{y}\right)e^{\frac{x}{y}}\,dy$.

Задача 37, 25 (для самостоятельного решения). Найти полный дифференциал функций: 1) $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$; 2) $u = \frac{\operatorname{arctg} y}{1 + x^2}$;

3) $u = \ln\operatorname{tg}\frac{x}{y}$: 4) $u = \arcsin\frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; 5) $u = e^{\frac{x}{y}} + e^{\frac{z}{y}}$.

Ответ. 1) $du = -\dfrac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$;

2) $du = \dfrac{(1+x^2)\,dy - 2x\,(1+y^2)\,\mathrm{arctg}\,y\,dx}{(1+x^2)^2\,(1+y^2)}$;

3) $du = \dfrac{2}{y\sin\frac{2x}{y}}\,dx - \dfrac{2x}{y^2\sin\frac{2x}{y}}\,dy$;

4) $du = \dfrac{x\sqrt{2}\,(y\,dx - x\,dy)}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}}$;

5) $du = \dfrac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}\,dx - \left(e^{\frac{x}{y}}\cdot\dfrac{x}{y^2} + e^{\frac{z}{y}}\cdot\dfrac{z}{y^2}\right)dy + e^{\frac{z}{y}}\cdot\dfrac{1}{y}\,dz.$

Задача 37, 26. Для вычисления объема цилиндра были вычислены его высота и диаметр основания. При этом оказалось, что высота $h = 60$ *см*, а диаметр $D = 50$ *см*, и границы ошибок, допущенных при измерении, $\Delta h = \Delta D = 0{,}1$ *см*. Найти границу ошибки ΔV в объеме цилиндра, вычисленном по этим данным.

Решение. Объем цилиндра $V = \dfrac{\pi D^2 h}{4}$.

Считая, что $\pi \approx 3{,}14$ и подставляя сюда числовые данные задачи, получим, что $V = 117{,}75$ *дм*^{3}. Чтобы вычислить границу ошибки в полученном числе, примем, что $\Delta V \approx dV$.

$$dV = \frac{\partial V}{\partial D}\,dD + \frac{\partial V}{\partial h}\,dh.$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial V}{\partial D} = \frac{\pi D h}{2}, \quad a \quad \frac{\partial V}{\partial h} = \frac{\pi D^2}{4},$$

получаем, что

$$dV = \frac{\pi D h}{2}\,dD + \frac{\pi D^2}{4}\,dh.$$

Оценим абсолютную величину dV:

$$|dV| = \left|\frac{\pi D h}{2}\,dD + \frac{\pi D^2}{4}\,dh\right| \leqslant \frac{\pi D h}{2}\,|\Delta D| + \frac{\pi D^2}{4}\,|\Delta h|.$$

Подставляя числовые данные из условия задачи, получим, что граница ошибки равняется 0,7 *дм*^{3}. Таким образом, $\Delta V \approx$ $\approx 0{,}7$ *дм*^{3}.

Следует иметь в виду, что мы приняли $\pi = 3{,}14$, что также внесло ошибку в результат вычислений. Однако ошибка, возникшая из-за этого, значительно меньше той, которая возникла от неточности в измерении D и h.

Задача 37, 27. Для вычисления удельного веса тела его взвешивают и измеряют его объем. Оказывается, что вес $P = 326$ *г*, а объем $V = 126$ *см*^{3}; при этом границы ошибок величин P и V равны $\Delta P = 0{,}5$ *г*, $\Delta V = 1$ *см*^{3}.

Определить границу ошибки ΔD в удельном весе D, вычисленном по этим данным.

Решение. Удельный вес $D = \frac{P}{V} = \frac{326}{126} = 2{,}59\ \frac{г}{см^3}$. Теперь положим, что $\Delta D \approx dD$;

$$dD = \frac{\partial D}{\partial P} dP + \frac{\partial D}{\partial V} dV = \frac{1}{V} dP - \frac{P}{V^2} dV = \frac{VdP - PdV}{V^2};$$

$$|dD| = \left|\frac{V\Delta P - P\Delta V}{V^2}\right| = \frac{|V\Delta P - P\Delta V|}{V^2} \leqslant \frac{V|\Delta P| + P|\Delta V|}{V^2}.$$

Подставляя сюда числовые данные задачи, найдем, что граница ошибки $AD \approx 0{,}024\ \frac{г}{см^3}$.

Задача 37, 28 (для самостоятельного решения). Даны две точки $P(x, y)$ и $P_1(x_1, y_1)$. Насколько изменится расстояние S между ними, если координаты точек получат приращения dx, dy и dx_1, dy_1 и сколько процентов p от длины S составит это изменение.

Ответ. $dS = (dx - dx_1)\cos\alpha + (dy - dy_1)\sin\alpha_1$, где α — угол, образуемый с положительным направлением оси Ox прямой, проведенной из P_1 по направлению к P

$$\left(\frac{x - x_1}{S} = \cos\alpha; \quad \frac{y - y_1}{S} = \sin\alpha\right).$$

Количество процентов $p = \frac{dS}{S} \cdot 100$.

Задача 37, 29 (для самостоятельного решения). Решить предыдущую задачу с такими числовыми данными:

$$S = 4200\ м; \quad \alpha = 34°17'25''; \quad dx = -1 м;$$

$$dy = 3\ м; \quad dx_1 = 4\ м; \quad dy_1 = 2\ м.$$

Ответ. Расстояние S уменьшится на 3,65 *м*, или на 0,087%.

Задача 37, 30. Даны две точки $P(x, y)$ и $P_1(x_1, y_1)$. Расстояние между ними равно S, а угол α определяется, как и в задаче 37, 29. Точка P_1 неподвижна. Насколько изменится угол α, если координаты точки P станут равными $x + dx$, $y + dy$.

Указание. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y - y_1}{x - x_1}$; $\ln\operatorname{tg}\alpha = \ln(y - y_1) - \ln(x - x_1)$.

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha\cos^2\alpha} d\alpha = \frac{dy}{y - y_1} - \frac{dx}{x - x_1}$$

(x_1 и y_1 по условию — постоянные величины). Так как $y - y_1 = S\sin\alpha$, а $x - x_1 = S\cos\alpha$, то отсюда получается ответ

$$d\alpha = \frac{\cos\alpha}{S} \cdot dy - \frac{\sin\alpha}{S} dx.$$

Задача 38, 31 (для самостоятельного решения). Решить предыдущую задачу при таких числовых данных: $S = 3500$ *м*; $\alpha = 52°13'24''$; $dx = 1$ *м*; $dy = 2$ *м*. Выразить $d\alpha$ в секундах.

Указание. В формуле, полученной в ответе предыдущей задачи, $d\alpha$ измеряется в радианах. Чтобы получить $d\alpha$ в секундах, следует полученное число умножить на 206 264,8, т. е. на число секунд в одном радиане.

Ответ. $25'',6$.

Задача 37, 32. Вычислить приближенно величину $(1{,}03)^{3{,}001}$.

Решение. Мы знаем, что $1^3 = 1$. Нам следует теперь произвести вычисления для того случая, когда основание степени 1 получит приращение 0,03, а показатель степени 3 — приращение 0,001. Будем исходить из функции $f(x, y) = x^y$ и воспользуемся формулой (37, 6).

Учитывая, что в нашем случае $\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1}$; $\frac{\partial f}{\partial x} = x^y \ln x$, получим $(x + \Delta x)^{y+\Delta y} \approx x^y + yx^{y-1}\Delta x + x^y \ln x \Delta y$.

У нас $x = 1$; $y = 3$; $\Delta x = 0{,}03$; $\Delta y = 0{,}001$, а потому $(1{,}03)^{3{,}001} \approx 1^3 + 3 \cdot 1^{3-1}\, 0{,}03 + 1^3 \ln 1 \cdot 0{,}001 = 1 + 0{,}09 = 1{,}09$, т. к. $\ln 1 = 0$.

Задача 37, 33 (для самостоятельного решения). Вычислить приближенно: 1) $(0{,}97)^{2{,}02}$; 2) $(1{,}003)^{2{,}07}$; 3) $\sqrt{(6{,}03)^2 + (8{,}04)^2}$.

Указание. В последнем примере следует исходить из функции $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Ответ. 1) 0,94; 2) 1,006; 3) 10,05.

ТРИДЦАТЬ ВОСЬМОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание. Дифференцирование сложной функции от одной и нескольких независимых переменных.

1. Дифференцирование сложной функции от одной независимой переменной

Формула полной производной. *Если $z = f(u, v)$, а u и v являются функциями независимой переменной x: $u = \varphi(x)$ $v = \psi(x)$, то и z является функцией x.*

В таком случае говорят, что z есть сложная функция аргумента x. Производная от функции z по независимой переменной x вычисляется по формуле

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx}. \qquad (38, 1)$$

Вычисленная по этой формуле производная называется полной производной от функции z по независимой переменной x.