

Задача 38, 31 (для самостоятельного решения). Решить предыдущую задачу при таких числовых данных: $S = 3500$ м; $\alpha = 52^{\circ}13'24''$; $dx = 1$ м; $dy = 2$ м. Выразить $d\alpha$ в секундах.

Указание. В формуле, полученной в ответе предыдущей задачи, $d\alpha$ измеряется в радианах. Чтобы получить $d\alpha$ в секундах, следует полученное число умножить на 206 264,8, т. е. на число секунд в одном радиане.

Ответ. 25'',6.

Задача 37, 32. Вычислить приближенно величину $(1,03)^{3,001}$.

Решение. Мы знаем, что $1^3 = 1$. Нам следует теперь произвести вычисления для того случая, когда основание степени 1 получит приращение 0,03, а показатель степени 3 — приращение 0,001. Будем исходить из функции $f(x, y) = x^y$ и воспользуемся формулой (37, 6).

Учитывая, что в нашем случае $\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln x$, получим $(x + \Delta x)^{y+\Delta y} \approx x^y + yx^{y-1}\Delta x + x^y \ln x \Delta y$.

У нас $x = 1$; $y = 3$; $\Delta x = 0,03$; $\Delta y = 0,001$, а потому $(1,03)^{3,001} \approx \approx 1^3 + 3 \cdot 1^{3-1} 0,03 + 1^3 \ln 1 \cdot 0,001 = 1 + 0,09 = 1,09$, т. к. $\ln 1 = 0$.

Задача 37, 33 (для самостоятельного решения). Вычислить приближенно: 1) $(0,97)^{2,02}$; 2) $(1,003)^{2,07}$; 3) $\sqrt{(6,03)^2 + (8,04)^2}$.

Указание. В последнем примере следует исходить из функции $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Ответ. 1) 0,94; 2) 1,006; 3) 10,05.

ТРИДЦАТЬ ВОСЬМОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание. Дифференцирование сложной функции от одной и нескольких независимых переменных.

1. Дифференцирование сложной функции от одной независимой переменной

Формула полной производной. Если $z = f(u, v)$, а u и v являются функциями независимой переменной x : $u = \varphi(x)$ $v = \psi(x)$, то u и z является функцией x .

В таком случае говорят, что z есть сложная функция аргумента x . Производная от функции z по независимой переменной x вычисляется по формуле

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dx}. \quad (38, 1)$$

Вычисленная по этой формуле производная называется полной производной от функции z по независимой переменной x .

Аналогично, если $z = f(u, v, w)$, а $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$, $w = \omega(x)$, то полная производная от функции z по независимой переменной x вычисляется по формуле

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dx} + \frac{\partial z}{\partial w} \frac{dw}{dx}. \quad (38.2)$$

Частный случай. Если $z = f(x, u, v)$ а u и v в свою очередь, также являются функциями x , т. е. $u = \varphi(x)$; $v = \psi(x)$, то

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dx}. \quad (38.3)$$

Читатель должен обратить внимание на то, что в правой части формулы (38.3) стоит частная производная $\frac{\partial z}{\partial x}$, вычисленная в предположении, что u и v — величины постоянные. Эту производную следует отличать от полной производной $\frac{dz}{dx}$, которая вычисляется в предположении, что u и v являются функциями x . Различие в этих двух производных объясняет также и различие в их обозначениях.

Задача 38.1. Найти $\frac{dz}{dx}$, если $z = \sin(3u + 2v - 4w)$, а $u = 2x^3$; $v = 3x^2$; $w = x^4$.

Решение. Здесь следует воспользоваться формулой (38.2). Определим производные, входящие в эту формулу:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= 3 \cos(3u + 2v - 4w); \quad \frac{\partial z}{\partial v} = 2 \cos(3u + 2v - 4w); \\ \frac{\partial z}{\partial w} &= -4 \cos(3u + 2v - 4w); \quad \frac{du}{dx} = 6x^2; \quad \frac{dv}{dx} = 6x; \quad \frac{dw}{dx} = 4x^3.\end{aligned}$$

Подставляя эти величины в (38.2), получим

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dx} &= [3 \cos(3u + 2v - 4w)] 6x^2 + [2 \cos(3u + 2v - 4w)] 6x - \\ &\quad - 4 \cos(3u + 2v - 4w) 4x^3.\end{aligned}$$

Вынося в правой части за скобку $\cos(3u + 2v - 4w)$ и заменяя под знаком косинуса u , v и w их выражениями через x , получим окончательно

$$\frac{dz}{dx} = (18x^2 + 12x - 16x^3) \cos(6x^3 + 6x^2 - 4x^4).$$

Задача 38.2 (для самостоятельного решения). Найти полную производную $\frac{du}{dt}$ функции $u = \sin \frac{x}{y}$, где $x = e^t$; $y = t^2$.

Указание. Формулу (38.1) следует переписать в виде

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Ответ. $\frac{du}{dt} = (t - 2) \cdot \frac{e^t}{t^3} \cdot \cos \frac{e^t}{t^2}$.

Задача 38, 3 (для самостоятельного решения). 1) $u = z^2 + y^2 + zy$; $z = \sin x$; $y = e^x$. Определить полную производную $\frac{du}{dx}$.

Указание. На основании формулы (38, 1)

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

2) $u = v^2 + vy$; $v = \ln x$; $y = e^x$.

Найти полную производную $\frac{du}{dx}$.

Указание. Применить формулу (38, 1), переписав ее в виде

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial v} \frac{dv}{dx} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dx}.$$

3) Найти полную производную $\frac{dz}{dx}$, если $z = f(u, v)$ $u = ax^2 + bx + c$; $v = ax + b$.

Ответ. 1) $\frac{du}{dx} = 3e^{3x} + e^x(\sin x + \cos x) + \sin 2x$; 2) $\frac{du}{dx} =$

$$= \frac{2v+y}{x} + ve^x; \quad \frac{du}{dx} = \frac{2 \ln x + e^x}{x} + e^x \ln x; \quad 3) \quad \frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u}(2ax + b) + \frac{\partial z}{\partial v} a.$$

Задача 38, 4. Определить полную производную функции

$$u = e^{ax}(y - z); \quad y = a \sin x; \quad z = \cos x.$$

Решение. Здесь следует применить формулу (38, 3), так как функция u зависит от x как непосредственно, так и через посредство функций y и z . Определим производные, входящие в правую часть этой формулы:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = ae^{ax}(y - z); \quad \frac{\partial u}{\partial y} = e^{ax}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -e^{ax}; \quad \frac{dy}{dx} = a \cos x; \quad \frac{dz}{dx} = -\sin x;$$

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dx} = ae^{ax}(y - z) + e^{ax}a \cos x - e^{ax}(-\sin x) = \\ &= e^{ax}(a^2 + 1) \sin x. \end{aligned}$$

Задача 38, 5 (для самостоятельного решения). Найти $\frac{dz}{dx}$, если $z = f(x, u, v)$, $u = \frac{1}{x}$; $v = \ln x$.

Указание. Применить формулу (38, 3).

Ответ. $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} \frac{1}{x^2} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{1}{x}$.

Задача 38, 6 (для самостоятельного решения). $z = \sqrt{x^2 + y^2}$; $y = \sin^2 x$. Найти $\frac{dz}{dx}$ и $\frac{\partial z}{\partial x}$.

Указание. $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx}.$

Ответ. $\frac{dz}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \sin 2x.$

Задача 38, 7 (для самостоятельного решения). Найти $\frac{dz}{dx}$, если

- 1) $z = u^v$, где $u = \sin x$; $v = \operatorname{tg} x$; 2) $z = uvw$, где $u = \sin x$; $v = \ln x$; $w = \operatorname{tg} x$.

Ответ. 1) $\frac{dz}{dx} = (\sin x)^{\operatorname{tg} x} (1 + \sec^2 x \ln \sin x);$

$$2) \frac{dz}{dx} = \sin x \ln x + \frac{\sin^2 x}{x \cos x} + \frac{\sin x \ln x}{\cos^2 x}.$$

Задача 38, 8 (для самостоятельного решения). Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{dz}{dx}$, если $z = x^y$, где $y = \ln x$.

Ответ. $\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}; \quad \frac{dz}{dx} = x^y \left(\frac{y}{x} + \frac{\ln x}{x} \right).$

Задача 38, 9 (для самостоятельного решения). Найти $\frac{dz}{dx}$, если

$$z = \frac{x}{e^y}, \text{ где } y = \sin^3 x.$$

Ответ. $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{y} e^y \left(1 - \frac{3x}{y} \sin^2 x \cos x \right).$

Задача 38, 10 (для самостоятельного решения). Найти $\frac{dz}{dx}$, если

- 1) $z = \ln(x^2 + y^2)$, где $y = e^{xz}$; 2) $z = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$, где $y = \cos x$.

Ответ. 1) $\frac{dz}{dx} = \frac{2x}{x^2 + y^2} (1 + 2ye^{xz})$, а вместо y можно подставить e^{xz} ; 2) $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+y^2} \sin x.$

Задача 38, 11. Движение точки задано уравнениями

$$x = 3t^2; \quad y = 2t^4; \quad z = 4t^6.$$

С какой скоростью возрастает ее расстояние от начала координат?

Решение. Расстояние r точки от начала координат определяется формулой $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, где x , y и z — координаты точки.

Для решения задачи следует найти $\frac{dr}{dt} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial r}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial r}{\partial z} \frac{dz}{dt}$,

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\frac{dx}{dt} = 6t; \quad \frac{dy}{dt} = 8t^3; \quad \frac{dz}{dt} = 24t^5.$$

Ответ. $\frac{dr}{dt} = \frac{18t + 16t^5 + 96t^9}{\sqrt{9 + 4t^4 + 16t^8}}.$

2. Дифференцирование сложной функции от нескольких независимых переменных

Если $z = f(u, v)$ — функция от двух переменных u и v , а каждая из них есть в свою очередь функция двух независимых переменных x и y , то и z есть функция независимых переменных x и y , а ее частные производные по этим переменным вычисляются по формулам

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (38, 4)$$

Частный случай. Если функция z зависит от x и y не только через посредство u и v , но и явно, т. е. $z = f(x, y, u, v)$, то имеют место формулы:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (38, 5)$$

причем следует иметь в виду, что производные $\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)$ и $\left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)$ от функции z вычисляются в предположении, что u и v — величины постоянные.

Задача 38, 12. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = \ln(u^2 + v^2)$, а

$$u = x \cos y; \quad v = y \sin x.$$

Решение. Следует воспользоваться формулами (38, 4). Определим частные производные, входящие в эти формулы:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{u^2 + v^2} \cdot 2u; \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{1}{u^2 + v^2} \cdot 2v; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \cos y;$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = y \cos x; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -x \sin y; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \sin x.$$

Подстановка этих производных в (38, 4) дает

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{2u}{u^2 + v^2} \cos y + \frac{2v}{u^2 + v^2} y \cos x = \frac{2}{u^2 + v^2} (u \cos y + vy \cos x) = \\ &= \frac{2}{x^2 \cos^2 y + y^2 \sin^2 x} (x \cos^2 y + y^2 \sin x \cos x); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{2u}{u^2 + v^2} x \sin y + \frac{2v}{u^2 + v^2} \sin x = \frac{2}{u^2 + v^2} (v \sin x - ux \sin y) = \\ &= \frac{2}{x^2 \cos^2 y + y^2 \sin^2 x} (y \sin^2 x - x^2 \sin y \cdot \cos y). \end{aligned}$$

Задача 38, 13. Определить $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = \arctg \frac{u}{v}$, а $u = x \sin y$, $v = x \cos y$.

Решение. Здесь опять-таки следует применить формулы (38, 4). Определяем частные производные, входящие в эти формулы:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{1 + \frac{u^2}{v^2}} \cdot \frac{1}{v} = \frac{v}{u^2 + v^2}; \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{1}{1 + \frac{u^2}{v^2}} \left(-\frac{u}{v^2} \right) = -\frac{u}{u^2 + v^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sin y; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \cos y; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x \cos y; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -x \sin y.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{v}{u^2 + v^2} \sin y - \frac{u}{u^2 + v^2} \cos y = \frac{1}{u^2 + v^2} (v \sin y - u \cos y) = \\ &= \frac{1}{x^2 \sin^2 y + x^2 \cos^2 y} (x \sin y \cos y - x \sin y \cos y) = 0; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 1. \end{aligned}$$

Задача 38, 14 (для самостоятельного решения). Определить $\frac{\partial u}{\partial t}$; $\frac{\partial u}{\partial v}$; $\frac{\partial u}{\partial w}$, если $u = \ln \cos \frac{xy}{\sqrt[4]{z}}$, где $x = tvw$; $y = e^{\frac{t}{v}}$; $z = \sqrt[4]{\frac{tv}{w}}$.

Указание. Формулы (38, 4) в данном случае для определения, например, $\frac{\partial u}{\partial t}$ запишутся так:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t}$$

и аналогично для $\frac{\partial u}{\partial v}$ и $\frac{\partial u}{\partial w}$.

Ответ. $\frac{\partial u}{\partial t} = -\operatorname{tg} \frac{xy}{\sqrt[4]{z}} \left(\frac{yw}{\sqrt[4]{z}} + \frac{xe^{\frac{t}{v}}}{v \sqrt[4]{z}} - \frac{xyv}{4z \sqrt[4]{z} \sqrt{tvw}} \right)$.

Задача 38, 15. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = f(u, v)$ а $u = x + y$; $v = x - y$.

Решение. Применяя формулы (38, 4), получаем, учитывая, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} = 1; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 1; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -1; \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot 1 + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot 1 = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot 1 + \frac{\partial z}{\partial v} (-1) = \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v}.$$

Задача 38, 16 (для самостоятельного решения). Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = f(u, v)$, а $u = x^2 + y^2$; $v = xy$.

Ответ. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \frac{\partial z}{\partial u} + y \frac{\partial z}{\partial v}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y \frac{\partial z}{\partial u} + x \frac{\partial z}{\partial v}.$

Задача 38, 17. Доказать, что функция $z = y^{\varphi} (x^2 - y^2)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$.

Решение. Обозначим $x^2 - y^2 = u$. Тогда заданная функция

$$z = y\varphi(u). \quad (38, 6)$$

Легко усмотреть, что z зависит от x только через посредство u , а от y — как непосредственно, так и через посредство u . Поэтому

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y\varphi'(u) \frac{\partial u}{\partial x} = y\varphi'(u) 2x = 2xy\varphi'(u).$$

Производная $\frac{\partial z}{\partial y}$ должна быть определена по второй из формул (38, 5). Входящая в эту формулу производная $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \varphi(u)$, а потому, учитывая, что $\frac{\partial u}{\partial y} = -2y$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \varphi(u) + y\varphi'(u) \frac{\partial u}{\partial y} = \varphi(u) - 2y^2\varphi'(u).$$

Подставляя найденные выражения $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в левую часть заданного уравнения, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{1}{x} 2xy\varphi'(u) + \frac{1}{y} [\varphi(u) - 2y^2\varphi'(u)] = \\ &= 2y\varphi'(u) + \frac{1}{y} \varphi(u) - 2y\varphi'(u) = \frac{1}{y} \varphi(u) = \frac{1}{y} \frac{z}{y} = \frac{z}{y^2}. \end{aligned}$$

так как на основании (38, 6) $\varphi(u) = \frac{z}{y}$.

Задача 38, 18. Доказать, что функция $z = xy + x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$.

Решение. Обозначим $\frac{y}{x} = u$. Тогда заданная функция перепишется в виде

$$z = xy + x\varphi(u) \quad (38, 7)$$

и очевидно, что z зависит от x и y как непосредственно, так и через посредство u . Поэтому частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ следует отыскивать по формулам (38, 5). Учитывая, что

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = y + \varphi(u), \quad \text{а} \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = x$$

и, кроме того,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x};$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y + \varphi(u) + x\varphi'(u) \left(-\frac{y}{x^2}\right) = y + \varphi(u) - \frac{y}{x}\varphi'(u);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x + x\varphi'(u) \frac{1}{x} = x + \varphi'(u).$$

Подставляя значения $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в левую часть заданного уравнения, получим

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = x \left[y + \varphi(u) - \frac{y}{x} \varphi'(u) \right] + y [x + \varphi'(u)] = xy + x\varphi(u) -$$

$$- y\varphi'(u) + xy + y\varphi'(u) = xy + \underbrace{x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)}_z + xy = xy + z.$$

Задача 38, 19 (для самостоятельного решения). Доказать, что функция $z = x + y + \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = x + y$.

Указание. Обозначить $\frac{x}{y} = u$ и воспользоваться формулами (38, 5). Учесть, что $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 1$; $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 1$.

Задача 38, 20 (для самостоятельного решения). Доказать, что функция $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \varphi(x - y)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = x + y$.

Указание. Обозначить $x - y = u$ и воспользоваться формулами (38, 5), в которых $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = x$; $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = y$.

Задача 38, 21 (для самостоятельного решения). Доказать, что функция $z = e^{y\varphi}\left(ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\right)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(x^2 - y^2) \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = xyz.$$

Указание. Положить $ye^{\frac{x^2}{2y^2}} = u$, воспользоваться формулами (38, 5) и учесть, что $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0$; $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = e^y$.

Задача 38, 22 (для самостоятельного решения). Доказать, что функция $z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) - x^2 - y^2$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - x^2 - y^2$.