

ТРИДЦАТЬ ДЕВЯТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Производные и дифференциалы высших порядков функций нескольких независимых переменных.

1. Производные высших порядков

Если задана функция двух независимых переменных $z = f(x, y)$ и вычислены ее частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, то они, вообще говоря, также являются функциями независимых переменных x и y , а потому от каждой из них можно вычислить производные как по x , так и по y .

Если вычислить частную производную по x от $\frac{\partial z}{\partial x}$, то получим частную производную второго порядка от функции z , взятую два раза по x . Эта производная обозначается символом $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ и, таким образом, $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

Если вычислить частную производную по y от $\frac{\partial z}{\partial x}$, то получим частную производную второго порядка функции z , взятую сначала по x , а потом по y . Эта производная обозначается символом $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и, таким образом, $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

Подобно этому частная производная по x от $\frac{\partial y}{\partial x}$ даст вторую частную производную функции z , вычисленную сначала по y , а потом по x . Она обозначается символом $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$;

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x},$$

а частная производная по y от $\frac{\partial z}{\partial y}$ есть вторая частная производная от функции z , взятая два раза по y . Она обозначается символом $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$; $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

Также вводятся частные производные порядка более высокого, чем второй.

Например, символ $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$ обозначает производную третьего порядка функции $z = f(x, y)$, вычисленную три раза по x .

Символ же $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2 \partial y}$ обозначает, что от функции z взята производная третьего порядка, причем она вычислялась два раза по x и от полученной производной $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ вычислена один раз производная по y и т. д.

Задача 39, 1. Найти частные производные третьего порядка функции $z = x^4 + 3x^3y - 4x^2y^2 + 5xy^3 - y^4$.

Решение. $\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 + 9x^2y - 8xy^2 + 5y^3$; (39, 1)

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3x^3 - 8x^2y + 15xy^2 - 4y^3. \quad (39, 2)$$

Если взять производную по x от $\frac{\partial z}{\partial x}$ (выражение (39, 1)), то получим, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 + 18xy - 8y^2$; если то же выражение (39, 1) продифференцировать по y , то получим

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 9x^2 - 16xy + 15y^2; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -8x^2 + 30xy - 12y^2.$$

Продифференцируем теперь по x производную $\frac{\partial z}{\partial y}$ (выражение (39, 2)) и получим, что

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 9x^2 - 16xy + 15y^2.$$

Читатель должен усмотреть разницу в обозначениях $\frac{\partial z}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Символ $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ означает, что от функции z сначала была взята производная по x , а результат был продифференцирован по y . Символ же $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ показывает, что от функции z была сначала вычислена производная по y , а полученный результат продифференцирован по x . Таким образом, производные $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ отличаются порядком, в котором велось дифференцирование.

Если продифференцировать по y производную $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, то получим третью производную $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 18x - 16y$.

Продифференцировав же по x производную $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, получим

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial z} = 18x - 16y.$$

Если вычислить производную по y от $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, получим

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = -16x + 30y.$$

Производная по x от $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ даст $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x^2} = 18x - 16y$.

Производные

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y} = -16x + 30y; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} = -16x + 30y.$$

наконец, если взять производную по x от $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, то получим $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 24x + 18y$, а если взять производную по y от $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, то получим $\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = 30x - 24y$.

Здесь опять-таки следует пометить, что производные

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y}; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x},$$

а также производные

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}$$

отличаются только порядком дифференцирования.

Оказалось, что

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x}; \quad (39, 3)$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}, \quad (39, 4)$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}. \quad (39, 5)$$

Это совпадение не является случайным. Имеет место такая важная теорема: *если частные производные непрерывны, то их значения не зависят от порядка дифференцирования.*

Задача 39, 2 (для самостоятельного решения). Найти частные производные второго порядка функций:

$$1) z = xy; \quad 2) z = e^{ax+by}; \quad 3) z = \ln(x^2 + y^2); \quad 4) z = e^{xy}.$$

Ответ. 1) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0;$

$$2) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a^2 e^{ax+by}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = ab e^{ax+by}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = b^2 e^{ax+by};$$

$$3) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}; \quad \frac{\partial z}{\partial x \partial y} = -4 \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 \cdot \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2};$$

$$4) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2 e^{xy}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^{xy} (xy + 1); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 e^{xy}.$$

Задача 39, 3. Определить производную $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$ функции $u = \sin(xy z)$.

Решение.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yz \cos(xyz); \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = z \cos(xyz) - xyz^2 \sin(xyz);$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = \cos(xyz) - xyz \sin(xyz) - 2xyz \sin(xyz) - x^2y^2z^2 \cos(xyz);$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = (1 - x^2y^2z^2) \cos xyz - 3xyz \sin xyz.$$

Задача 39, 4. Показать, что функции: 1) $z = \ln r$, где $r = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}$ и 2) $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ удовлетворяют уравнению Лапласа $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

Решение. 1) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x}$. Но так как

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x - x_1}{\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}} = \frac{x - x_1}{r},$$

то

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x - x_1) \frac{1}{r^2}.$$

Теперь вычислить $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, рассматривая правую часть последнего равенства как произведение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{r^2} - \frac{2r}{r^4} \frac{\partial r}{\partial x} (x - x_1).$$

Подставляя сюда найденное выше значение $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x - x_1}{r}$, получим

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{r^2} - \frac{2(x - x_1)^2}{r^4}.$$

Аналогично находим

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{r^2} - \frac{2(y - y_1)^2}{r^4}.$$

Подставляя найденные значения $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ в левую часть уравнения Лапласа и учитывая, что если

$$r = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2},$$

то $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r^2$, получим

$$\frac{1}{r^2} - \frac{2(x - x_1)^2}{r^4} + \frac{1}{r^2} - \frac{2(y - y_1)^2}{r^4} =$$

$$= \frac{2}{r^2} - \frac{2[(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2]}{r^4} = \frac{2}{r^2} - \frac{2r^2}{r^4} = \frac{2}{r^2} - \frac{2}{r^2} = 0,$$

и тем самым доказано требуемое.

$$2) \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \left(-\frac{y}{x} \right) = -\frac{y}{x^2 + y^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{y}{(x^2 + y^2)^2} 2x;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{x}{(x^2 + y^2)^2} 2y.$$

Подставляя найденные значения $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ в левую часть уравнения Лапласа, получим

$$\frac{y}{(x^2 + y^2)^2} 2x - \frac{x}{(x^2 + y^2)^2} 2y = 0,$$

и требуемое доказано.

Задача 39, 5 (для самостоятельного решения). Доказать, что функция $\varphi = \frac{1}{r}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Задача 39, 6 (для самостоятельного решения). Доказать, что функции 1) $v = r \cos \theta$ и 2) $v = \frac{\cos \theta}{r^2}$ удовлетворяют уравнению Лапласа в сферических координатах:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Задача 39, 7. Доказать, что если функция $u = u(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

то и функция

$$v = x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z}$$

также удовлетворяет этому уравнению.

Указание. Подставить в заданное уравнение вместо u функцию v и доказать, что $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(x \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right); \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(x \frac{\partial u}{\partial x} \right) = x \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(x \frac{\partial u}{\partial x} \right) = x \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial z^2} = x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

и, таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(x \frac{\partial u}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \\ + x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) &= 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \end{aligned}$$

так как по условию

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(y \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(y \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(y \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(z \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(z \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(z \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

Поэтому $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0$, что и требовалось.

Задача 39, 8. Известно, что $z = f(u, v)$, а переменные u и v являются функциями независимых переменных x и y .

$$u = \varphi(x, y); \quad v = \psi(x, y).$$

Определить $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

Решение. На основании формулы (38, 4)

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right) \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

Учитывая, что производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ являются, вообще говоря, функциями u и v , имеем, опять-таки на основании формул (38, 4)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right) &= \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right) \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \frac{\partial v}{\partial x}; \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right) &= \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right) \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned}$$

Подставляя эти значения в предыдущее равенство, получим окончательно, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial v}{\partial x} + \\ &+ \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{d^2 z}{du^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

Этим же путем найдем, что

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.$$

Задача 39, 9 (для самостоятельного решения). Вычислить $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

Функции $z = f(u, v)$, где $u = \varphi(x, y)$; $v = \psi(x, y)$.

Указание. Воспользоваться методом, с помощью которого была найдена производная $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ в предыдущей задаче, и учесть, что

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

Ответ:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}.$$

Замечание. Формулы, полученные в последних двух задачах, не должны запоминаться. Читатель должен усвоить метод, с помощью которого эти формулы были получены.

На применение этого метода предлагается задача 39, 10.

Задача 39, 10 (для самостоятельного решения). Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, если $z = f(u, v)$; $u = x^2 + y^2$, $v = xy$.

Указание.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = y; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = x; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 1;$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} 2x + \frac{\partial z}{\partial v} y;$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial u} 2x + \frac{\partial z}{\partial v} y \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial u} 2x \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial v} y \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right) 2x + \frac{\partial z}{\partial u} 2 + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right) y = \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right) \frac{\partial v}{\partial x} \right] \cdot 2x + \\ &+ \frac{\partial z}{\partial v} \cdot 2 + \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right) \frac{\partial v}{\partial x} \right] y = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) 2x + 2 \frac{\partial z}{\partial u} + \\ &+ \left(\frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial x} \right) y. \end{aligned}$$

Подставляя сюда значения частных производных функций u и v по x , получим окончательно:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 4x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 4xy \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + 2 \frac{\partial z}{\partial u}$$

(учтено, что $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u}$).

Ответ.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 4xy \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + 2 \frac{\partial z}{\partial u};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4xy \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2(x^2 + y^2) \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + xy \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + \frac{\partial z}{\partial v}.$$

Задача 39, 11 (для самостоятельного решения). Определить частные производные второго порядка функции $z = \varphi(u, v)$, где $u = x + y; v = x - y$.

$$\text{Ответ. } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial v^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}.$$

Задача 39, 12 (для самостоятельного решения). Доказать, что функции 1) $u = e^{kn^2 t} \sin nx$ и 2) $u = e^{-kn^2 t} \cdot \cos nx$ удовлетворяют уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Задача 39, 13. Показать, что функция

$$z = \varphi(x - at) + \psi(x + at)$$

удовлетворяет уравнению колебания струны

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

(функции φ и ψ — какие угодно дважды дифференцируемые функции).

Решение. Введем обозначения $x - at = u; x + at = v$. Тогда заданная функция перепишется так: $z = \varphi(u) + \psi(v)$;

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Но так как функция φ не зависит от v , а функция ψ — от u , то $\frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0$ и $\frac{\partial \psi}{\partial u} = 0$.

Если учесть, что $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$ и $\frac{\partial v}{\partial x} = 1$, то $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \psi}{\partial v}$;

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \psi}{\partial v} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial v} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial \psi}{\partial v} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial \psi}{\partial v} \right) \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2}, \end{aligned}$$

так как $\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) = 0$ и $\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial \psi}{\partial v} \right) = 0$; $\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t}$ (учтено, что $\frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0$ и $\frac{\partial \psi}{\partial u} = 0$).

Учитывая, что $\frac{\partial u}{\partial t} = -a$, а $\frac{\partial v}{\partial t} = a$, имеем $\frac{\partial z}{\partial t} = -a \frac{\partial \varphi}{\partial u} + a \frac{\partial \psi}{\partial v}$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(-a \frac{\partial \varphi}{\partial u} + a \frac{\partial \psi}{\partial v} \right) = -a \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) + a \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \psi}{\partial v} \right) = \\ &= -a \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial \psi}{\partial v} \right) \frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + a^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} \right). \end{aligned}$$

Умножая $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ на a^2 , убеждаемся, что действительно

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$$

что и требовалось.

Задача 39, 14 (для самостоятельного решения). Доказать, что функция

$$z = x\varphi(x+y) + y\psi(x+y)$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Указание. Положить $x+y=u$.

Задача 39, 15 (для самостоятельного решения). Показать, что функция

$$z = \varphi(xy) + \sqrt{xy}\psi\left(\frac{y}{x}\right)$$

удовлетворяет уравнению

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Указание. Ввести замену; $xy=u$; $\frac{y}{x}=v$.

2. Дифференциалы высших порядков

Аргументы x и y функции $z=f(x, y)$ — независимые переменные.

Дифференциалом второго порядка функции $z=f(x, y)$ называется дифференциал от дифференциала первого порядка; он обозначается через d^2z . Таким образом $d^2z=d(dz)$.

Дифференциал второго порядка вычисляется по формуле

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2. \quad (39, 6)$$

Дифференциал третьего порядка функции $z=f(x, y)$ есть дифференциал ее дифференциала второго порядка; обозначается он символом d^3z , т. е. $d^3z=d(d^2z)$.

Дифференциал третьего порядка вычисляется по формуле

$$d^3z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} dy^3. \quad (39, 7)$$

Если условиться над символами $\frac{\partial}{\partial x}$ и $\frac{\partial}{\partial y}$ производить все арифметические действия по тем же правилам, по которым они производятся над числами, а произведение

$$\frac{\partial^m}{\partial x^m} \frac{\partial^n}{\partial y^n} u$$

заменять частной производной $\frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n}$, то формулы для вычисления d^2z и d^3z можно в символической записи переписать так:

$$d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 z, \quad (39, 8)$$

$$d^3z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^3 z \quad (39, 9)$$

и вообще для дифференциала порядка n функции $z = f(x, y)$ имеет место символическая формула

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n z. \quad (39, 10)$$

При вычислении по формуле (39, 10) следует применить известную из алгебры формулу Ньютона для возведения бинома в целую и положительную степень.

Например, выражение $\frac{\partial^2}{\partial x^3} dx^3 \frac{\partial^2}{\partial y^2} dy^2 \cdot z$ следует заменить выражением $\frac{\partial^6 z}{\partial x^3 \partial y^2} dx^3 dy^2$, а выражение $\frac{\partial^2}{\partial x^2} dx^2 \frac{\partial}{\partial y} dy \cdot z$ выражением $\frac{\partial^8 z}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy$ и т. д....

Вычисление дифференциалов любого порядка функции $z = f(x, y)$, где x и y — независимые переменные, по формулам, приведенным в этом параграфе, не может вызвать у читателя никаких затруднений, так как по существу все вычисления сводятся к определению частных производных высших порядков, которые читатель уже умеет находить.

Мы разъясним при решении задач другой способ нахождения дифференциалов высших порядков, который даст возможность определять их, минуя вычисление частных производных, а по известному выражению дифференциала мы сможем находить и частные производные.

Задача 39, 16. Найти d^2z функции $z = x^2y^2$.

Решение. Первый способ. Воспользуемся формулой (39, 6), для чего определим все частные производные, входящие в нее:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^2; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2y; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y^2; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4xy; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x^2.$$

Подставляя вторые производные в (39, 6), находим, что

$$d^2z = 2y^2dx^2 + 8xydxdy + 2x^2dy^2.$$

Второй способ. Определим сначала дифференциал первого порядка заданной функции, опираясь на основные формулы:

$$dz = y^2d(x^2) + x^2d(y^2) = y^2 \cdot 2xdx + x^2 \cdot 2ydy = 2xy^2dx + 2x^2ydy = 2xy(ydx + xdy).$$

Для определения d^2z дифференцируем dz , но при этом следует иметь в виду, что так как x и y — независимые переменные, то их дифференциалы dx и dy — величины постоянные, которые при дифференцировании выносятся за знак дифференциала. Учитывая это, получим

$$\begin{aligned} d^2z &= d(dz) = d[2xy(ydx + xdy)] = 2[d(xy)(ydx + xdy) + \\ &+ xyd(ydx + xdy)] = 2[(ydx + xdy)(ydx + xdy) + \\ &+ xy \cdot (dydx + dx dy)] = 2[(ydx + xdy)^2 + xy \cdot 2dx dy] = \\ &= 2[(y^2dx^2 + 2xydxdy + x^2dy^2) + 2xydxdy] = \\ &= 2y^2dx^2 + 8xydxdy + 2x^2dy^2. \end{aligned} \quad (39, 11)$$

Теперь уже, зная дифференциал второго порядка, можно найти частные производные второго порядка. Легко усмотреть, что коэффициент при dx^2 равен $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, коэффициент при $dxdy$ есть $2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, а коэффициент при dy^2 есть $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$. Это следует из того, что при произвольных dx и dy равенство

$$Adx^2 + Bdx dy + Cdy^2 = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2$$

имеет место только при условии, что

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = A; \quad 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = B; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = C.$$

Таким образом, из (39, 11) заключаем, что

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y^2; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4xy; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x^2$$

и совпадает с ранее найденными значениями этих производных.

Сейчас подробно двумя способами будет решена еще одна задача.

Задача 39, 17. Найти дифференциал третьего порядка d^3z функции $z = \cos(x + 2y^2)$.

Решение. Первый способ. Воспользуемся формулой (39, 7), для чего прежде всего определим частные производные третьего порядка, входящие в эту формулу.

Производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\sin(x + 2y^2); \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -4y \sin(x + 2y^2).$$

Производные второго порядка:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= -\cos(x + 2y^2); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -4y \cos(x + 2y^2); \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= -4 \sin(x + 2y^2) - 16y^2 \cos(x + 2y^2). \end{aligned} \quad (39, 12)$$

Производные третьего порядка

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \sin(x + 2y^2); \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 4y \sin(x + 2y^2);$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = -4 \cos(x + 2y^2) + 16y^2 \sin(x + 2y^2);$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} &= -16y \cos(x + 2y^2) - 32y \cos(x + 2y^2) + 64y^3 \sin(x + 2y^2) = \\ &= -48y \cos(x + 2y^2) + 64y^3 \sin(x + 2y^2).\end{aligned}\quad (39, 13)$$

Подставляя значения третьих частных производных в (39, 7), получим, что

$$\begin{aligned}d^3z &= \sin(x + 2y^2) dx^3 + 3 \cdot 4y \sin(x + 2y^2) dx^2 dy + \\ &+ 3[-4 \cos(x + 2y^2) + 16y^2 \sin(x + 2y^2)] dx dy^2 + \\ &+ [-48y \cos(x + 2y^2) + 64y^3 \sin(x + 2y^2)] dy^3.\end{aligned}$$

Второй способ. Теперь мы вычислим третий дифференциал d^3z тремя последовательными дифференцированиями:

$$dz = -\sin(x + 2y^2) dx - 4y \sin(x + 2y^2) dy;$$

$$dz = -\sin(x + 2y^2) \cdot (dx + 4ydy).$$

Дифференцируя второй раз, следует помнить, что дифференциалы dx и dy независимых переменных должны рассматриваться как величины постоянные, а потому они должны выноситься за знак дифференциала

$$\begin{aligned}d^2z &= d(dz) = d[-\sin(x + 2y^2) \cdot (dx + 4ydy)] = \\ &= d[-\sin(x + 2y^2)] \cdot (dx + 4ydy) + [-\sin(x + 2y^2)] d(dx + 4ydy) = \\ &= [-\cos(x + 2y^2) dx - 4y \cos(x + 2y^2) dy] (dx + 4ydy) + \\ &\quad + [-\sin(x + 2y^2)] 4ydy = -\cos(x + 2y^2) dx^2 - \\ &\quad - 4y \cos(x + 2y^2) dydx - 4y \cos(x + 2y^2) dxdy - \\ &- 16y^2 \cos(x + 2y^2) dy^2 - 4 \sin(x + 2y^2) dy^2 = -\cos(x + 2y^2) dx^2 - \\ &- 8y \cos(x + 2y^2) dxdy - [16y^2 \cos(x + 2y^2) + 4 \sin(x + 2y^2)] dy^2.\end{aligned}$$

Читатель легко заметит, что коэффициенты при dx^2 , $dxdy$ и dy^2 равны соответственно $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, которые были найдены выше в выражениях (39, 12).

Чтобы упростить определение дифференциала третьего порядка, выражение дифференциала второго порядка перепишем в виде

$$d^2z = -\cos(x + 2y^2) (dx^2 + 8ydydx + 16y^2dy^2) - 4 \sin(x + 2y^2) dy^2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} d^3z = d(d^2z) &= d[-\cos(x+2y^2)(dx^2 + 8y dx dy + 16y^2 dy^2)] + \\ &+ d[-4 \sin(x+2y^2) dy^2] = d[-\cos(x+2y^2)](dx^2 + 8y dx dy + 16y^2 dy^2) + \\ &+ [-\cos(x+2y^2)]d(dx^2 + 8y dx dy + 16y^2 dy^2) + \\ &+ d[-4 \sin(x+2y^2)]dy^2 = [\sin(x+2y^2) dx + \\ &+ 4y \sin(x+2y^2) dy](dx^2 + 8y dx dy + 16y^2 dy^2) + \\ &+ [-\cos(x+2y^2)](8dy dx dy + 32y dy dy^2) + \\ &+ [-4 \cos(x+2y^2) dx - 16y \cos(x+2y^2) dy]dy^2 = \\ &= \sin(x+2y^2) dx^3 + 4y \sin(x+2y^2) dx^2 dy + 8y \sin(x+2y^2) dx^2 dy^2 + \\ &+ 32y^2 \sin(x+2y^2) dx dy^2 + 16y^2 \sin(x+2y^2) dx dy^2 + \\ &+ 64y^3 \sin(x+2y^2) dy^3 - 8 \cos(x+2y^2) dx dy^2 - \\ &- 32y \cos(x+2y^2) dy^3 - 4 \cos(x+2y^2) dx dy^2 - \\ &- 16y \cos(x+2y^2) dy^3 = \sin(x+2y^2) dx^3 + 12y \sin(x+2y^2) dx^2 dy + \\ &+ [48y^2 \sin(x+2y^2) - 12 \cos(x+2y^2)] dx dy^2 + \\ &+ [64y^3 \sin(x+2y^2) - 48y \cos(x+2y^2)] dy^3. \end{aligned}$$

Теперь легко усмотреть, что коэффициенты при dx^3 , $dx^2 dy$, $dx dy^2$ и dy^3 равны соответственно: $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$, $3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$, $3 \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$ и $\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$, значения которых были найдены выше (выражения (39, 13)).

Задача 39, 18 (для самостоятельного решения). Найти двумя способами $d^2 z$ функции $z = x^3 y^3$.

Ответ. $d^2 z = 6x y^3 dx^2 + 18x^2 y^2 dx dy + 6x^3 y dy^2$.

Задача 39, 19 (для самостоятельного решения). Найти двумя способами дифференциал третьего порядка функции $z = \sin(2x + y)$

при $x = \frac{\pi}{2}$; $y = 0$.

Ответ. $d^3 z = 8dx^3 + 12dx^2 dy + 6dxdy^2 + dy^3$.

Задача 39, 20 (для самостоятельного решения). Найти дифференциал второго порядка функций:

1) $z = e^{x-y^2} + \cos x$; 2) $z = y \ln x$;

3) $z = xy$; 4) $z = e^{ax+by}$; 5) $y + e^{xy}$.

Ответ.

1) $d^2 z = (e^{x-y^2} - \cos x) dx^2 - 4ye^{x-y^2} dx dy + 2e^{x-y^2} (2y^2 - 1) dy^2$;

2) $d^2 z = -\frac{y}{x^2} dx^2 + \frac{2}{x} dx dy$;

3) $d^2 z = 2dxdy$; 4) $d^2 z = e^{ax+by} (adx + bdy)^2$;

5) $d^2 z = e^{xy} y^2 dx^2 + 2e^{xy} (xy + 1) dx dy + x^2 e^{xy} dy^2$.

Задача 39, 21 (для самостоятельного решения). Найти дифференциалы третьего порядка функций:

1) $z = x^4 y - xy^4$;

2) $z = x \sin y + y \cos x$;

определить все частные производные третьего порядка.

О т в е т.

$$1) \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 24xy; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 12x^2; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y^2} = -12y^2; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = -24xy;$$

$$2) \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = y \sin x; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = -\cos x; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = -\sin y; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = -x \cos y.$$

б) Аргументы x и y функции $z = f(x, y)$ являются функциями одной или нескольких независимых переменных.

Задача 39, 22. Вычислить дифференциал второго порядка функции $z = f(x, y)$, где $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$.

Решение. Здесь уже x и y — не независимые переменные, а функции независимых переменных u и v , т. е. заданная функция является сложной.

Если при вычислении дифференциала первого порядка функции $z = f(x, y)$ совершенно безразлично, будут ли аргументы независимыми переменными или функциями других независимых переменных (свойство инвариантности дифференциала первого порядка), то при вычислении дифференциалов высших порядков надо строго различать эти два случая.

Так как $z = f(x, y)$, то $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$.

При повторном дифференцировании мы теперь не можем уже, как это делалось раньше, считать дифференциалы dx и dy величинами постоянными, потому что x и y — не независимые переменные, а функции независимых переменных u и v . Поэтому

$$d^2z = d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx\right) + d\left(\frac{\partial z}{\partial y} dy\right) =$$

$$= d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) dx + \frac{\partial z}{\partial x} d(dx) + d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) dy + \frac{\partial z}{\partial y} d(dy);$$

$$d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) dx + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) dy = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dy;$$

$$d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) dx + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) dy = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy;$$

$$d(dx) = d^2x; \quad d(dy) = d^2y.$$

Подставляя только что найденные величины в предыдущее равенство, получим, что

$$d^2z = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dy\right) dx + \frac{\partial z}{\partial x} d^2x + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy\right) dy + \frac{\partial z}{\partial y} d^2y.$$

Окончательно после приведения подобных членов получаем

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial z}{\partial x} d^2x + \frac{\partial z}{\partial y} d^2y,$$

или в другой записи (символической):

$$d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^2 z + \frac{\partial z}{\partial x} d^2x + \frac{\partial z}{\partial y} d^2y. \quad (39, 14)$$

Сравнивая эту формулу с формулой (39, 6) или (39, 8) для вычисления второго дифференциала функции $z = f(x, y)$ в том случае, когда аргументы x и y являются независимыми переменными, мы видим, что в рассматриваемом случае появились два дополнительных слагаемых $\frac{\partial z}{\partial x} d^2x$ и $\frac{\partial z}{\partial y} d^2y$.

Заметим, что формула (39, 6) является частным случаем формулы (39, 14), так как если x и y — независимые переменные, то dx и dy — величины постоянные, а потому их дифференциалы $d^2x = 0$ и $d^2y = 0$, добавочные слагаемые становятся равными нулю и мы получаем из (39, 14) формулу (39, 6).

Формулу (39, 6) вряд ли имеет смысл запоминать. Значительно важнее уяснить метод, с помощью которого она была получена.

Задача 39, 23. Определить d^2z , если $z = x^y$, где $x = uv$; $y = u + v$.

Решение. Дифференциал первого порядка

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = yx^{y-1} dx + x^y \ln x dy;$$

$$\begin{aligned} d^2z &= d(dz) = d(yx^{y-1} dx) + d(x^y \ln x dy) = d(yx^{y-1}) dx + \\ &\quad + yx^{y-1} d(dx) + d(x^y \ln x) dy + x^y \ln x \cdot d(dy) = \\ &= [dy \cdot x^{y-1} + yd(x^{y-1})] dx + yx^{y-1} d^2x + \\ &\quad + [d(x^y) \ln x + x^y d(\ln x)] dy + x^y \ln x \cdot d^2y. \end{aligned}$$

Нам осталось вычислить дифференциалы $d(x^{y-1})$; $d(x^y)$ и $d(\ln x)$:

$$\begin{aligned} d(x^{y-1}) &= \frac{\partial}{\partial x}(x^{y-1}) dx + \frac{\partial}{\partial y}(x^{y-1}) dy = \\ &= (y-1)x^{y-2} dx + x^{y-1} \ln x dy; \\ d(x^y) &= yx^{y-1} dx + x^y \ln x dy; \\ d(\ln x) &= \frac{1}{x} dx. \end{aligned}$$

Подставляя эти величины в предыдущее равенство, имеем

$$\begin{aligned} d^2z &= \{x^{y-1} dy + y[(y-1)x^{y-2} dx + x^{y-1} \ln x dy]\} dx + \\ &\quad + yx^{y-1} d^2x + [(yx^{y-1} dx + x^y \ln x dy) \ln x + x^y \cdot \frac{1}{x} dx] dy + \\ &\quad + x^y \ln x \cdot d^2y = y(y-1)x^{y-2} dx^2 + 2(x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x) dx dy + \\ &\quad + x^y \ln^2 x \cdot dy^2 + yx^{y-1} d^2x + x^y \ln x \cdot d^2y. \quad (39, 14) \end{aligned}$$

На основании данных задачи надо в последнее выражение подставить $x = uv$; $y = u + v$; $dx = u dv + v du$; $dx^2 = (udv + vdu)^2$; $dy = du + dv$; $dy^2 = (du + dv)^2$; $d^2x = du dv + dv du = 2 du dv$; $d^2y = 0$, так как du и dv , как дифференциалы независимых переменных, — величины постоянные, а значит, их дифференциалы равны нулю.

Решение задачи можно, конечно, провести сразу по формуле (39, 14), и тогда было бы

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y(y-1)x^{y-2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial xy} = x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^y \ln^2 x.$$

Подставляя эти значения в (39, 14), получим выражение d^2z , уже ранее найденное. В нем следует сделать замены, указанные выше.

Задача 39, 24 (для самостоятельного решения). Найти дифференциал второго порядка функции $z = f(u, v)$, где $u = x^2 + y^2$; $v = xy$.

Указание. Здесь u и v — промежуточные переменные, а x и y — независимые переменные.

Формула (39, 14) должна быть переписана в виде

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} du^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} dudv + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} dv^2 + \frac{\partial z}{\partial u} d^2u + \frac{\partial z}{\partial v} d^2v;$$

$$du = 2x dx + 2y dy; \quad du^2 = 4(x^2 dx^2 + 2xy dx dy + y^2 dy^2);$$

$$d^2u = 2dx^2 + 2dy^2; \quad d^2v = 2dx dy.$$

Ответ.

$$\begin{aligned} d^2z = & \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} 4x^2 + 4xy \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + 2 \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \cdot y^2 \right) dx^2 + \\ & + 2 \left(4xy \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + 2x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} + xy \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + \frac{\partial z}{\partial v} \right) dx dy + \\ & + \left(4y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + 4xy \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + 2 \frac{\partial z}{\partial v} + x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \right) dy^2. \end{aligned}$$

Задача 39, 25 (для самостоятельного решения). Использовать результат, полученный в предыдущей задаче, если $z = e^u \cos v$, а u и v имеют те же значения, что и в задаче (39, 24).

СОРОКОВОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Линии и поверхности уровня. Производная функции по заданному направлению. Градиент функции.

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Физическим полем называется часть пространства, в которой происходит физическое явление.

1. Скалярное поле

Физическое поле называется скалярным, если физическое явление, его образующее, характеризуется функцией $f = f(x, y, z)$, зависящей только от координат точек пространства, в кото-