Решение задачи можно, конечно, провести сразу по формуле (39, 14), и тогда было бы

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y(y-1)x^{y-2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial x \partial y} = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^y \ln^2 x.$$

Подставляя эти значения в (39, 14), получим выражение d^2z, уже ранее найденное. В нем следует сделать замены, указанные выше.

Задача 39, 24 (для самостоятельного решения). Найти дифференциал второго порядка функции $z = f(u, v)$, где $u = x^2 + y^2$; $v = xy$.

Указание. Здесь u и v — промежуточные переменные, а x и y — независимые переменные.

Формула (39, 14) должна быть переписана в виде

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} du^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} du dv + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} dv^2 + \frac{\partial z}{\partial u} d^2u + \frac{\partial z}{\partial v} d^2v;$$

$$du = 2x\,dx + 2y\,dy; \quad du^2 = 4(x^2\,dx^2 + 2xy\,dx\,dy + y^2\,dy^2);$$

$$d^2u = 2\,dx^2 + 2\,dy^2; \quad d^2v = 2dx\,dy.$$

Ответ.

$$d^2z = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}4x^2 + 4xy\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + 2\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot y^2\right)dx^2 +$$

$$+ 2\left(4xy\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2y^2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + 2x^2\frac{\partial^2 z}{\partial v \partial v} + xy\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + \frac{\partial z}{\partial v}\right)dx\,dy +$$

$$+ \left(4y^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + 4xy\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + 2\frac{\partial z}{\partial v} + x^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)dy^2.$$

Задача 39, 25 (для самостоятельного решения). Использовать результат, полученный в предыдущей задаче, если $z = e^u \cos v$, а u и v имеют те же значения, что и в задаче (39, 24).

СОРОКОВОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Линии и поверхности уровня. Производная функции по заданному направлению. Градиент функции.

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Физическим полем называется часть пространства, в которой происходит физическое явление.

1. Скалярное поле

Физическое поле называется скалярным, если физическое явление, его образующее, характеризуется функцией $f = f(x, y, z)$, *зависящей* ***только от координат*** *точек пространства, в кото-*

ром это явление происходит. Скалярное поле полностью определено заданием одной функции $f(x, y, z)$ трех независимых переменных.*

Если физическое явление образовало скалярное поле, то каждой точке $P(x_1, y_1, z_1)$ пространства, в котором происходит это явление, ставится в соответствие определенное число, характеризующее это явление в рассматриваемой точке. Это число есть частное значение функции $f(x, y, z)$, вычисленное в точке $P(x_1, y_1, z_1)$ (примерами скалярного поля являются: поле электрического потенциала, давление в атмосфере).

2. Поверхность уровня

Если однозначная функция $f(x, y, z$ соответствует скалярному полю, образованному физическим явлением, то ***поверхностью уровня*** *(иначе эквипотенциальной поверхностью) этого поля называется поверхность, во всех точках которой функция $f(x, y, z)$ сохраняет одно и то же значение.*

Поверхности уровня имеют уравнение

$$f(x, y, z) = c, \tag{40, 1}$$

где c — постоянная величина.

Придавая постоянной c различные числовые значения, получим семейство поверхностей уровня. Через каждую точку пространства проходит одна поверхность уровня.

Во всех точках поверхности уровня физическое явление протекает одинаково.

Уравнение поверхности уровня, проходящей через точку $P(x_1, y_1, z_1)$, имеет вид

$$f(x, y, z) = f(x_1, y_1, z_1). \tag{40, 2}$$

3. Производная по направлению

Производная от функции $f(x, y, z)$ по направлению $(\bar{l})$ характеризует скорость изменения функции $f(x, y, z)$ по этому направлению.

Эта производная вычисляется по формуле

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos(l, x) + \frac{\partial f}{\partial y}\cos(l, y) + \frac{\partial f}{\partial z}\cos(l, z). \tag{40, 3}$$

---

* Предполагается, что функция $f(x, y, z)$ — однозначная непрерывная функция x, y, z, имеющая непрерывные частные производные первого порядка $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$.

Производная $\frac{\partial f}{\partial l}$ равна нулю по любому направлению, касательному к поверхности уровня. Она достигает своего наибольшего значения по направлению нормали к поверхности уровня.

4. Градиент функции

Градиентом скалярной функции $f(x, y, z)$ называется вектор, проекции которого на координатные оси Ox, Oy и Oz соответственно равны $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ и $\frac{\partial f}{\partial r}$, т. е.

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\bar{k}. \qquad (40, 4)$$

На основании этого определения проекции вектора $\operatorname{grad} f$ *на координатные оси запишутся так:*

$$(\operatorname{grad} f)_x = \frac{\partial f}{\partial x}; \quad (\operatorname{grad} f)_y = \frac{\partial f}{\partial y}; \quad (\operatorname{grad} f)_z = \frac{\partial f}{\partial z} \qquad (40, 5)$$

(предполагается при этом, что $f(x, y, z)$ — однозначная непрерывная функция, имеющая непрерывные частные производные).

Мудуль вектора $\operatorname{grad} f$ *вычисляется по формуле*

$$|\operatorname{grad} f| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}. \qquad (40, 6)$$

Если $\bar{\tau}$ — единичный вектор направления $(\bar{l})$,

$$\bar{\tau} = \cos(l, x)\,\bar{i} + \cos(l, y)\,\bar{j} + \cos(l, z)\,\bar{k},$$

то формула (40, 3) запишется так:

$$\frac{\partial f}{\partial l} = (\operatorname{grad} f \cdot \tau). \qquad (40, 7)$$

Вектор* $\operatorname{grad} f$ *в каждой точке направлен по нормали к поверхности уровня, проходящей через эту точку, в сторону возрастания функции. Скорость изменения скалярной функции f по некоторому *направлению $(\bar{l})$ равна проекции вектора* $\operatorname{grad} f$ *на это направление, т. е.*

$$\frac{\partial f}{\partial l} = (\operatorname{grad} f)_l. \qquad (40, 8)$$

В этом состоит основное свойство градиента функции.

Задача 40, 1. Скалярное поле образовано функцией

$$V = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2}.$$

Найти поверхности уровня этого поля.

Решение. На основании формулы (40, 1) уравнение семейства поверхностей уровня найдем в виде

$$\sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2} = c,$$

или

$$R^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2.$$

Отсюда уже получаем окончательно $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 - c^2$. Поверхностями уровня является семейство концентрических сфер.

Задача 40, 2. Найти поверхности уровня скалярного поля

$$v = \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Решение. По формуле (40, 1) уравнение семейства поверхностей уровня имеет вид

$$\operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} = c.$$

Отсюда

$$\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \operatorname{tg} c,$$

и окончательно

$$z^2 = \operatorname{tg}^2 c\,(x^2 + y^2).$$

Это уравнение семейства круговых конусов с общей вершиной в начале координат. Их общей осью является ось Oz.

Задача 40, 3. Найти производную функции $f(x, y) = x^3 - y^3$ в точке $M(1, 1)$ в направлении $\bar{l}$, составляющем угол $\alpha = 60°$ с положительным направлением оси Ox.

Решение. В формуле (40, 3)

$$\cos(l, x) = \cos\alpha = \cos 60° = \frac{1}{2};$$

$$\cos(l, y) = \cos(90 - \alpha) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \cos(l, z) = 0.$$

Кроме того,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -3y^2.$$

Подстановка в (40, 3) дает

$$\frac{\partial f}{\partial l} = 3x^2 \quad \frac{1}{2} - 3y^2 \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

В точке $M(1, 1)$ имеем $x = 1$, $y = 1$. Подставляя эти значения x и y в последнее равенство, будем иметь

$$\frac{\partial f}{\partial l} = 3 \cdot \frac{1}{2} - 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}(1 - \sqrt{3}).$$

Итак, искомая производная

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{3}{2}(1 - \sqrt{3}).$$

Задача 40, 4. Найти производную функции $f(x \quad y) = 3x^2 - 6xy + y^2$ в точке $A\left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{2}\right)$ в направлении $\bar{l}$, составляющем угол α с положительным направлением оси Ox. В каком направлении эта производная имеет: а) наибольшее значение; б) наименьшее значение; в) значение, равное нулю?

Найти также градиент этой функции, его модуль и его направляющие косинусы.

Решение. По условию задачи $\cos(l, \ x) = \cos\alpha$, и тогда

$$\cos(l, \ y) = \cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha.$$

Дальше: $\frac{\partial f}{\partial x} = 6x - 6y$; $\frac{\partial f}{\partial y} = 4y - 6x$.

Подстановка в формулу (40, 3) дает

$$\frac{\partial f}{\partial l} = (6x - 6y)\cos\alpha + (2y - 6x)\sin\alpha;$$

в точке $A\left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{2}\right)$

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \left[6 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) - 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\right]\cos\alpha + \left[2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 6 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)\right]\sin\alpha,$$

т. е. $\frac{\partial f}{\partial l} = \cos\alpha + \sin\alpha$.

Теперь нам надо найти те значения α, при которых $\frac{\partial f}{\partial l}$ имеет значения: а) наибольшее, б) наименьшее, в) равное 0.

Обозначим $u = \cos\alpha + \sin\alpha$ и найдем экстремум этой функции $u' = -\sin\alpha + \cos\alpha$. Из уравнения $-\sin\alpha + \cos\alpha = 0$ следует, что $\operatorname{tg}\alpha = 1$, а $\alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

Считая, что α может изменяться от 0 до 2π, из последней формулы получаем

при $k = 0$ $\alpha_1 = \frac{\pi}{4}$ при $k = 1$ $\alpha_2 = \frac{5\pi}{4}$, $u'' = -\cos\alpha - \sin\alpha$, и так как $u''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4} = -\sqrt{2}$, то при $\alpha_1 = \frac{\pi}{4}$ функция u достигает максимума, а вместе с тем и наибольшего значения.

Таким образом, производная $\frac{\partial f}{\partial l}$ нашей функции имеет наибольшее значение по направлению, составляющему с положительным направлением оси Ox угол $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

При $\alpha = \frac{5}{4}\pi$ имеем $u''\left(\frac{5}{4}\pi\right) = \sqrt{2} > 0$. Производная $\frac{\partial f}{\partial l}$ имеет наименьшее значение по направлению, составляющему с положительным направлением оси Ox угол $\alpha = \frac{5}{4}\pi$.

Ответим теперь на последний вопрос задачи: надо найти то значение α, при котором $\frac{\partial f}{\partial l} = 0$, т. е. при котором $\cos\alpha + \sin\alpha = 0$. Решая это уравнение, имеем $\cos\alpha = -\sin\alpha$: $\operatorname{tg}\alpha = -1$ и для α, содержащегося между 0 и 2π, получаем

$$\alpha = \frac{3}{4}\pi \text{ и } \alpha = \frac{7}{4}\pi.$$

Другое решение этой же задачи: мы нашли, что направление наибыстрейшего роста функции составляет с положительным направлением оси Ox угол $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Известно, что **направление наибыстрейшего роста функции в данной точке совпадает с направлением вектора, являющегося градиентом этой функции,** который определяется формулой (40, 4), а длина его находится по формуле (40, 6).

Для нашей функции $f(x, y) = 3x^2 - 6xy + y^2$

$$\operatorname{grad} f = (6x - 6y)\cdot\bar{i} + (2y - 6x)\cdot\bar{j},$$

а в точке $A\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right)$ $(\operatorname{grad} f)_{\substack{x=-\frac{1}{3}\\ y=-\frac{1}{2}}} = \bar{i} + \bar{j}$.

Длина вектора $\operatorname{grad} f$ в этой точке

$$|\operatorname{grad} f| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2},$$

а его проекция на оси прямоугольной системы координат равна

$$(\operatorname{grad} f)_x = 1;\ (\operatorname{grad} f)_y = 1.$$

Известно, что направляющие косинусы вектора $\bar{a}$ находятся по формулам

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\bar{a}|};\quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\bar{a}|};$$

в нашем случае вектор $\operatorname{grad} f$ в точке $A\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right)$ имеет направляющие косинусы $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Значит, вектор $\operatorname{grad} f$ составляет в точке $A\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right)$ с положительным направлением оси Ox угол $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Этого и сле-

довало ожидать потому, что этот вектор указывает направление наибыстрейшего роста функции в данной точке, а мы нашли, что производная $\frac{\partial f}{\partial l}$, определяющая скорость изменения функции, достигает своего наибольшего значения именно по направлению $\bar{l}$, составляющему угол $\alpha = \frac{\pi}{4}$ с положительным направлением оси Ox.

Задача 40, 5. Определить производную функции

$$f(x, y, z) = x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2$$

в точке $A\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}, \frac{1}{\sqrt[3]{4}}, \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)$ в направлении $\bar{l}$, составляющем с осями прямоугольной системы координат Ox, Oy, Oz углы, соответственно равные α, β и γ, градиент этой функции, его величину и направляющие косинусы.

Решение 1. По формуле (40, 3) находим производную $\frac{\partial f}{\partial l}$ по указанному в задаче направлению. Чтобы воспользоваться этой формулой, найдем частные производные

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \text{ и } \frac{\partial f}{\partial z}; \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 2x(y^2 + z^2); \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y(x^2 + z^2); \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z(y^2 + x^2).$$

Подставляя эти значения производных в (40, 3), получим

$$\frac{\partial f}{\partial l} = 2x(y^2 + z^2)\cos\alpha + 2y(x^2 + z^2)\cos\beta + 2z(z^2 + y^2)\cos\gamma.$$

В точке $A\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}, \frac{1}{\sqrt[3]{4}}, \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)$ значение $\frac{\partial f}{\partial l}$ найдем, подставив в предыдущее равенство $x = y = z = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial l}\right)_A = \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma.$$

2. По формуле (40, 4)

$$\operatorname{grad} f = 2x(y^2 + z^2)\bar{i} + 2y(x^2 + z^2)\bar{j} + 2z(x^2 + y^2)\bar{k}.$$

В точке A $(\operatorname{grad} f)_A = \bar{i} + \bar{j} + k$, а его проекции на координатные оси и его модуль в этой точке равны:

$$(\operatorname{grad} f)_x = (\operatorname{grad} f)_y = (\operatorname{grad} f)_z = 1,$$

$$|\operatorname{grad} f| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}.$$

Направляющие косинусы вектора $\operatorname{grad} f$ в точке A равны:

$$\cos\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \cos\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \cos\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

(Контроль: $\cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1 = 1$).

Эти направляющие косинусы определяют направление наибыстрейшего роста нашей функции в точке A.

Если направление $\bar{l}$, о котором шла речь в задаче, совпадало бы с направлением вектора $\operatorname{grad} f$, то производная $\frac{\partial f}{\partial l}$ достигла бы своего наибольшего значения в этом направлении, и тогда в точке A

$$\left(\frac{\partial f}{\partial l}\right)_{\max} = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

Задача 40, 6. Найти $|\operatorname{grad} u|$ и направляющие косинусы градиента в точке $A(x_0, y_0, z_0)$, если функция $u = \frac{1}{r}$,

где $$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Решение. Чтобы воспользоваться формулой (40, 6) для определения $\operatorname{grad} u$, нам надо найти $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial z}$. У нас $u = \frac{1}{r}$, а потому проекция градиента этой функции на оси Ox

$$\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}, \text{ но } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

а потому $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}$, и тогда $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{r^2}\frac{x}{r}$,

или $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{x}{r^3}$.

Аналогично $\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)_y = \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{y}{r^3}$; $\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)_z = \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{z}{r^3}$.

Пользуясь формулой (40, 6), получаем, что

$$|\operatorname{grad} u| = \sqrt{\frac{x^2}{r^6} + \frac{y^2}{r^6} + \frac{z^2}{r^6}} = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^6}} = \sqrt{\frac{r^2}{r^6}} = \frac{1}{r^2}.$$

В точке A $|\operatorname{grad} u| = \frac{1}{r_0^2}$, где

$$r_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2.$$

Направляющие косинусы вектора $a = \operatorname{grad}\frac{1}{r}$ найдем по формулам

$$\cos(a, x) = \frac{a_x}{|\bar{a}|} = \frac{\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)_x}{\left|\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right|}; \quad \cos(\bar{a}\ y) = \frac{a_y}{|\bar{a}|} =$$

$$= \frac{\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)_y}{\left|\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right|}; \quad \cos(\bar{a}, z) = \frac{a_z}{|\bar{a}|} = \frac{\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)_s}{\left|\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right|}.$$

Подставляя в эти формулы найденные значения $\left|\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right|$, $\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)_x$, $\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)_y$ и $\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)_z$, получим

$$\cos(\bar{a}, x) = -\frac{x}{r^5};\ \cos(\bar{a}, y) = -\frac{y}{r^5};\ \cos(\bar{a}, z) = -\frac{z}{r^5}.$$

Чтобы найти значения направляющих косинусов градиента нашей функции в точке A, надо в последних формулах заменить x, y и z соответственно на x_0, y_0 и z_0, а r — на

$$r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}.$$

СОРОК ПЕРВОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Дифференцирование неявных функций.

1. Если независимая переменная x и функция y связаны уравнением

$$f(x, y) = 0, \tag{41, 1}$$

неразрешенным относительно y, то говорят, что y есть неявная функция x (или функция y от x задана неявно). Для того чтобы, не решая уравнение (41,1) относительно y, найти производную от y по x, пользуются формулой

$$y' = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}. \tag{41, 2}$$

Чтобы определить вторую производную от y по x, надо переписать (41. 2) в виде $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\, y' = 0$, продифференцировать его по x и в полученном выражении заменить y' уже найденным значением (41,2). Точно так же определяется y''' и т. д.

Запоминать достаточно громоздкие формулы для определения y'' и y''' не имеет смысла. На примерах будет показан метод определения производных высших порядков в рассматриваемом случае.

Задача 41, 1. Определить y' и y'', если функция y от x задана неявно уравнением $x^3 + y^3 - 3axy = 0$, где a — величина постоянная.

Решение. Обозначим левую часть этого уравнения через $f(x, y)$. Чтобы воспользоваться формулой (41, 2), найдем $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}\, 3x^2 - 3ay;\ \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3ax.$$

Подставляя эти выражения в (41, 2), получим после сокращения на 3

$$y' = -\frac{x^2 - ay}{y^2 - ax}. \tag{41, 3}$$