Подставляя в эти формулы найденные значения $\left|\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right|$, $\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)_x$, $\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)_y$ и $\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)_z$, получим

$$\cos(\bar{a}, x) = -\frac{x}{r^5};\ \cos(\bar{a}, y) = -\frac{y}{r^5};\ \cos(\bar{a}, z) = -\frac{z}{r^5}.$$

Чтобы найти значения направляющих косинусов градиента нашей функции в точке A, надо в последних формулах заменить x, y и z соответственно на x_0, y_0 и z_0, а r — на

$$r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}.$$

СОРОК ПЕРВОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Дифференцирование неявных функций.

1. Если независимая переменная x и функция y связаны уравнением

$$f(x, y) = 0, \tag{41, 1}$$

неразрешенным относительно y, то говорят, что y есть неявная функция x (или функция y от x задана неявно). Для того чтобы, не решая уравнение (41,1) относительно y, найти производную от y по x, пользуются формулой

$$y' = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}. \tag{41, 2}$$

Чтобы определить вторую производную от y по x, надо переписать (41. 2) в виде $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\, y' = 0$, продифференцировать его по x и в полученном выражении заменить y' уже найденным значением (41,2). Точно так же определяется y''' и т. д.

Запоминать достаточно громоздкие формулы для определения y'' и y''' не имеет смысла. На примерах будет показан метод определения производных высших порядков в рассматриваемом случае.

Задача 41, 1. Определить y' и y'', если функция y от x задана неявно уравнением $x^3 + y^3 - 3axy = 0$, где a — величина постоянная.

Решение. Обозначим левую часть этого уравнения через $f(x, y)$. Чтобы воспользоваться формулой (41, 2), найдем $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}\, 3x^2 - 3ay;\ \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3ax.$$

Подставляя эти выражения в (41, 2), получим после сокращения на 3

$$y' = -\frac{x^2 - ay}{y^2 - ax}. \tag{41, 3}$$

Чтобы определить y'', перепишем равенство (41,3) в таком виде:

$$x^2 - ay + (y^2 - ax)\,y' = 0. \qquad (41,4)$$

Продифференцируем его по x, помня, что y есть функция от x. Здесь следует применить правило дифференцирования сложной функции. Получим

$$2x - ay' + (2yy' - a)\,y' + (y^2 - ax)\,y'' = 0,$$

или

$$2x - 2ay' + 2yy'^2 + (y^2 - ax)\,y'' = 0.$$

Подставляя сюда вместо y' его значение из (41,3), получим

$$2x - 2a \cdot \left(-\frac{x^2 - ay}{y^2 - ax}\right) + 2y \cdot \left(\frac{x^2 - ay}{y^2 - ax}\right)^2 + (y^2 - ax)\,y'' = 0.$$

Отсюда

$$y'' = -\frac{2x + 2a\dfrac{x^2 - ay}{y^2 - ax} + 2y\left(\dfrac{x^2 - ay}{y^2 - ax}\right)^2}{y^2 - ax},$$

или

$$y'' = -\frac{2x\,(y^2 - ax)^2 + 2a\,(x^2 - ay)\,(y^2 - ax) + 2y\,(x^2 - ay)^2}{(y^2 - ax)^3}.$$

Если в числителе дроби раскрыть скобки и сделать приведение подобных членов, то получится выражение $2xy^4 + 2x^4y - 6ax^2y^2 + 2a^3xy$, которое выгодно переписать в виде $2xy\,(x^3 + y^3 - 3axy) + 2a^3xy$. Так как по условию $x^3 + y^3 - 3axy$ равняется нулю, то окончательно числитель дроби равен $2a^3xy$, а

$$y'' = -\frac{2a^3xy}{(y^2 - ax)^3}, \quad \text{или} \quad y'' = \frac{2a^3xy}{(ax - y^2)^3}.$$

Задача 41, 2. Функция y от x задана уравнением

$$x^2 - 3xy + 4y^2 - 2x + 3y + 2 = 0.$$

Определить y', y'', y''' при $x = 2$; $y = 0$.

Решение. Обозначим левую часть заданного уравнения через $f(x, y)$. Имеем:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 3y - 2; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -3x + 8y + 3,$$

и на основании (41,2)

$$y' = -\frac{2x - 3y - 2}{-3x + 8y + 3}. \qquad (41,5)$$

Подставляя вместо x и y их значения, имеем

$$y'(2,0) = -\frac{2\cdot 2-3\cdot 0-2}{-3\cdot 2+8\cdot 0+3}; \quad y'(2,0) = \frac{2}{3}.$$

Перепишем (41,5) в виде

$$2x-3y-2-(3x-7y-3)\,y' = 0.$$

Продифференцируем это равенство по x, имея опять-таки в виду, что y есть функция x:

$$2-3y'-(3-8y')\,y'-(3x-8y-3)\,y'' = 0. \qquad (41,6)$$

Подставляя сюда вместо x и y их значения, а вместо y' — найденное выше его значение $\left(y' = \frac{2}{3}\right)$, получим

$$2-3\cdot\frac{2}{3}-\left(3-8\cdot\frac{2}{3}\right)\frac{2}{3}-(3\cdot 2-8\cdot 0-3)\,y'' = 0,$$

откуда

$$+\frac{14}{9}-3y'' = 0; \text{ а } y'' = \frac{14}{27}.$$

Для определения y''' продифференцируем опять по x равенство (41,6):

$$-3y''-(-8y'')\,y'-(3-8y')\,y''-(3-8y')\,y''-(3x-8y-3)\,y''' = 0.$$

Подставляя сюда данные значения x и y и уже найденные значения y' и y'', получим, что

$$-294+243y''' = 0, \text{ а } y''' = \frac{98}{81}.$$

Задача 41, 3 (для самостоятельного решения). Кривая определена уравнением $x^2+2xy+y^2-4x+2y-2 = 0$.

Определить, в какую сторону направлена вогнутость этой кривой в точке (1,1).

Указание. Направление вогнутости кривой в данной точке определяется знаком второй производной в этой точке. Поэтому следует найти y''.

Ответ. $y' = 0$; $1+2y'+y'^2+(x+y+1)\,y'' = 0$; $y'' = -\frac{1}{3}$. Кривая в точке (1,1) обращена вогнутостью в сторону отрицательных ординат.

Задача 41, 4 (для самостоятельного решения). Найти y''' функции, заданной в предыдущей задаче при тех же значениях x и y.

Указание. Продифференцировать по x полученное при решении предыдущей задачи равенство $1+2y'+y'^2+(x+y+1)\,y'' = 0$.

Ответ. $y''' = \frac{1}{3}$.

Задача 41, 5 (для самостоятельного решения). Функция y от x задана уравнениями:

$$1)\ x\sin y - \cos y + \cos 2y = 0,$$
$$2)\ y\sin x - \cos(x-y) = 0,$$
$$3)\ \sin x \ln y + \cos y \ln x = 0.$$

Найти y'.

Ответ. 1) $y' = -\dfrac{\sin y}{x\cos y + \sin y - 2\sin 2y}$;

2) $y' = \dfrac{y\cos x + \sin(x-y)}{\sin(x-y) - \sin x}$,

3) $y' = \dfrac{\cos x \ln y + \dfrac{1}{x}\cos y}{\sin y \ln x - \dfrac{1}{y}\sin x}$.

Задача 41, 6 (для самостоятельного решения). Кривая определена уравнением

$$x^2 - 2xy + 5y^2 - 2x + 4y + 1 = 0.$$

В точке $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ на ней определить уравнение касательной нормали, направление вогнутости, а также y'''.

Ответ. Уравнение касательной $2y + 1 = 0$; уравнение нормали $2x - 1 = 0$; $y'' = 1$. Кривая обращена вогнутостью в сторону положительных ординат; $y''' = -3$.

Указание 1. Касательная к кривой $f(x, y) = 0$ в точке $P(x_0, y_0)$ определяется уравнением $y - y_0 = y'(x_0, y_0)(x - x_0)$, а нормаль

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0, y_0)}(x - x_0).$$

1. Если функция z от двух независимых переменных x и y задается уравнением

$$f(x, y, z) = 0, \tag{41,7}$$

не разрешенным относительно z, то говорят, что z есть неявная функция переменных x и y. В этом случае частные производные функции z по независимым переменным x и y определяются по формулам

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}. \tag{41,8}$$

На примерах будет показано, как можно определить в рассматриваемом случае производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, не прибегая к готовым формулам (41,8).

На примерах будет также показан и метод определения частных производных

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2};\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y};\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Задача 41, 7. Функция z независимых переменных x и y задана уравнением $x^2+y^2+z^2=a^2$. Определить $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Решение. Первый способ. Перенесем a^2 в левую часть данного уравнения и обозначим ее через $f(x, y, z)$. Тогда $f(x, y, z)= = x^2+y^2+z^2-a^2=0$;

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x;\ \frac{\partial f}{\partial y}=2y;\ \frac{\partial f}{\partial z}=2z.$$

Подставляя эти значения в (41,8), будем иметь:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2x}{2z}=-\frac{x}{z};\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2y}{2z}=-\frac{y}{z}.$$

Второй способ. Продифференцируем данное уравнение и получим

$$2xdx+2ydy+2zdz=0,$$

отсюда

$$dz=-\frac{x}{z}dx-\frac{y}{z}dy. \qquad (41,9)$$

С другой стороны, мы знаем, что дифференциал функции $z=\varphi(x, y)$ вычисляется по формуле

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy. \qquad (41,10)$$

Сравнивая формулу (41,10) с выражением (41,9), мы заключаем, что

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z};\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z};$$

таким образом, мы определили искомые производные, не прибегая к готовым формулам (41,8).

Задача 41, 8. Функция z независимых переменных x и y задана неявно уравнением $4x^2+2y^2-3z^2+xy-yz+x-4=0$. Определить $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ при $x=1$; $y=1$; $z=1$.

Решение. Первый способ. Обозначим левую часть уравнения через $f(x, y, z)$. Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial x}=8x+y+1;\ \frac{\partial f}{\partial y}=4y+x-z;\ \frac{\partial f}{\partial z}=-6z-y.$$

По формулам (41,8) получаем

$$\frac{\partial z}{x\partial}=\frac{8x+4y+1}{6z+y};\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x+4y-z}{6z+y}. \qquad (41,11)$$

Подставляя сюда значения $x=1$; $y=1$; $z=1$. получим, что

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{13}{7};\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{4}{7}.$$

Второй способ. Дифференцируя заданное уравнение, получаем

$$8xdx+4ydy-6zdz+xdy+ydx-ydz-zdy+dx=0,$$

или

$$(8x+y+1)\,dx+(4y+x-z)\,dy+(-6z-y)\,dz=0,$$

откуда

$$dz=\frac{8x+y+1}{6z+y}dx+\frac{x+4y-z}{6z+y}dy;$$

сравнение с формулой (41,10) показывает, что

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{8x+y+1}{6z+y};\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x+4y-z}{6z+y},$$

что совпадает с выражениями (41,11), полученными раньше.

Задача 41,9 (для самостоятельного решения). Функция z независимых переменных x и y задана уравнениями:

$$1)\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0;\ 2)\ \frac{z^2}{p}+\frac{y^2}{q}-2z=0.$$

$$3)\ xy+xz+yz=1.$$

Определить $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$. Решение провести двумя способами.

Ответ. 1) $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{c^2x}{a^2z}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{c^2y}{b^2z}$;

2) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{p}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{q}$;

3) $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y+z}{x+y}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x+z}{x+y}$.

Задача 41,10. Из уравнения, заданного в задаче 41,7, определить вторые производные.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2};\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\ \text{и}\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Решение. В указанной задаче было получено, что

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z},\ \text{а}\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z}.$$

Поэтому

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{1\cdot z-\frac{\partial z}{\partial x}\cdot x}{z^2}.$$

Подставляя сюда значение $\frac{\partial z}{\partial x}$ получим, что

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{z - \left(-\frac{x}{z}\right)x}{z^2} = -\frac{z^2 + x^2}{z^2}.$$

Дифференцируя по y выражение $\frac{\partial z}{\partial x}$ и учитывая, что при дифференцировании по y переменная x, стоящая в числителе, рассматривается как величина постоянная (так как x и y — независимые переменные, то x не зависит от y), получаем

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{x}{z^2}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{z^2}\left(-\frac{y}{z}\right) = -\frac{xy}{z^3}.$$

Аналогично находим, что $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{y^2 + z^2}{z^3}$.

Задача 41, 11. Из уравнения $f(x, y, z) = 0$, в котором x рассматривается как функция независимых переменных y и z, определить $\frac{\partial x}{\partial y}$ и $\frac{\partial x}{\partial z}$.

Решение. Дифференцируя данное уравнение, получаем

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = 0,$$

откуда следует, что

$$dx = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}}dy - \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\frac{\partial f}{\partial x}}dz.$$

С другой стороны, если x есть функция y и z:

$$x = x(y, z), \text{ то } dx = \frac{\partial x}{\partial y}dy + \frac{\partial x}{\partial z}dz.$$

Сравнивая последнее равенство с предыдущим, получим, что

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}}; \quad \frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\frac{\partial f}{\partial x}}.$$

Задача 41, 12 (для самостоятельного решения). Из уравнения $f(x, y, z) = 0$, в котором y рассматривается как функция независимых переменных x и z, определить

$$\frac{\partial y}{\partial x} \text{ и } \frac{\partial y}{\partial z}.$$

Ответ. $\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$; $\frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$.