СОРОК ВТОРОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Экстремум функции нескольких независимых переменных. Наибольшее и наименьшее значении функции двух независимых переменных.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

1. Экстремум функции

***Определение* 1.** *Функция $u = f(x, y, z, \ldots, v)$ при некоторой системе значений $x_0, y_0, z_0 \ldots, v_0$ независимых переменных имеет максимум (минимум), если приращение функции*

$$\Delta u = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z, \ldots, v_0 + \Delta v) - f(x_0, y_0, \ldots, v_0)$$

отрицательно (положительно) при всевозможных, достаточно малых по абсолютной величине как положительных, так и отрицательных значениях

$$\Delta x, \Delta y, \Delta z, \ldots, \Delta v.$$

Максимум или минимум функции называется ее экстремумом.

Необходимые условия экстремума

Если функция $u = f(x, y, z, \ldots, v)$ достигает экстремума при значениях независимых переменных $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0, \ldots, v = v_0, \ldots$, то при этих значениях или выполняются равенства

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0; \frac{\partial u}{\partial y} = 0; \frac{\partial u}{\partial z} = 0; \ldots; \frac{\partial u}{\partial v} = 0, \qquad (42,1)$$

или частные производные при этих значениях не существуют.

Иначе: ***в точке экстремума первый дифференциал функции равен нулю или не существует. Количество уравнений (41,1) равно числу независимых переменных. Точки, в которых выполняются равенства (42,1), называются стационарными точками функции.***

Равенства (42,1) выражают необходимое, но недостаточное условие экстремума функции нескольких независимых переменных. Это значит, что не при всех тех значениях независимых переменных, при которых эти равенства выполняются, функция имеет экстремум.

Достаточные условия экстремума

Для того чтобы решить вопрос, какие из значений независимых переменных, получаемых из уравнений (42,1), доставляют функции максимум или минимум, или ни то, ни другое, обращаются к исследованию дифференциала второго порядка этой функции.

Если при значениях независимых переменных, найденных из уравнений (42,1), дифференциал второго порядка функции сохраняет постоянный знак при всевозможных достаточно малых по абсолютной величине приращениях независимых переменных, то функция при этих значениях имеет экстремум, причем максимум будет в том случае, когда дифференциал второго порядка отрицателен, а минимум — когда он положителен.

Если дифференциал второго порядка при значениях независимых переменных, найденных из системы уравнений (42,1), не сохраняет постоянного знака, то для этих значений функция не имеет ни максимума, ни минимума.

Если же окажется, что при этих значениях дифференциал второго порядка обратится в нуль, то решение вопроса об экстремуме требует исследование дифференциалов порядка выше, чем второй.

Правило определения экстремума функции двух независимых переменных

Чтобы определить экстремум функции $z = f(x, y)$ двух независимых переменных, следует:

1) Определить стационарные точки, в которых функция может достигать экстремума, для чего надо решить систему уравнений

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial z}{xy} = 0;$$

2) Определить вторые частные производные

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

3) Вычислить значения вторых частных производных в каждой стационарной точке, а полученные числа обозначить соответственно через A, B и C.

4) Составить выражение $\Delta = AC - B^2$. При этом,

а) если $\Delta > 0$, то экстремум в стационарной точке есть: если $A > 0$, то будет минимум, а при $A < 0$ — максимум;

б) если $\Delta < 0$, то экстремума в рассматриваемой стационарной точке нет;

в) если $\Delta = 0$, то имеет место сомнительный случай, и для заключения об экстремуме надо привлечь к рассмотрению частные производные порядка выше второго (этот случай в программу не входит и нами не рассматривается).

Задача 42, 1. Исследовать на экстремум функцию

$$z = 2x^3 + 2y^3 - 36xy + 430.$$

Решение. Прежде всего определяем $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2 - 36y; \ \frac{\partial z}{\partial y} = 6y^2 - 36x. \qquad (42, 2)$$

Решаем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \end{cases} \qquad (42, 1)$$

которая в нашем случае запишется так:

$$\begin{cases} 6x^2 - 36y = 0, \\ 6y^2 - 36x = 0; \end{cases}$$

после сокращения на 6 имеем

$$\begin{cases} x^2 - 6y = 0, \\ y^2 - 6x = 0. \end{cases} \qquad (42,3)$$

Из первого уравнения $y = \frac{x^2}{6}$. Подставляя его во второе уравнение, получим $\frac{x^4}{36} - 6x = 0$, или $x^4 - 216x = 0$, которое перепишем так:

$$x(x^3 - 216) = 0.$$

Разлагая на множители выражение в скобках, получим уравнение $x(x - 6)(x^2 + 6x + 36) = 0$.

Отсюда следует, что $x_1 = 0$; $x_2 = 6$, а остальные два корня — комплексные, которые нас не интересуют (это корни уравнения $x^2 + 6x + 36 = 0$).

Подставляя эти значения x в равенство $y = \frac{x^2}{6}$, получаем, что $y_1 = 0$; $y_2 = 6$.

Итак, есть две пары решений системы уравнений (42,3):

$$1)\ x_1 = 0;\ y_1 = 0;\ \ 2)\ x_2 = 6;\ y_2 = 6.$$

Теперь определим число Δ, для чего найдем

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2};\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \text{ и } \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Из (42,2) получаем, что

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x;\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -36;\ \ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12y,$$

Поставим теперь сюда сначала первую пару решений, а потом вторую и определим числа A, B, C и Δ.

Для первой пары решений:

$$A = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} = 0;\ B = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} = -36;\ C = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} = 0,$$

а потому число $\Delta = AC - B^2 = -36$.

Так как $\Delta < 0$, то при $x = 0$; $y = 0$ функция не имеет ни максимума, ни минимума.

Для второй пары решений:

$$A = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{\substack{x=6\\y=6}} = 72;\ B = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_{\substack{x=6\\k=6}} = -36;\ C = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{\substack{x=6\\y=6}} = 72.$$

Теперь число $\Delta = AC - B^2 = 72 \cdot 72 - 36^2 = 3888$, и так как оно положительно, то экстремум при значениях $x = 6$; $y = 6$ есть. Учитывая, что A — число положительное, заключаем, что при этих значениях x и y имеет место минимум. Чтобы определить минимальное значение функции, подставим в нее $x = 6$, $y = 6$ и получим $z_{\min} = -2$.

Замечание. Из $\Delta > 0$ следует, что $AC - B^2 > 0$, $AC > B^2$, т. е. $AC > 0$, а это означает, что A и C в случае, когда функция имеет экстремум, имеют один и тот же знак.

При решении этого примера читатель усмотрел, что не все значения независимых переменных, которые получаются при решении системы (42,1), доставляют функции экстремум. Так, значения $x = 0$ и $y = 0$, хотя и являются решениями системы (42,1), но при них функция не имеет ни максимума, ни минимума (экстремума нет).

Задача 42, 2. Исследовать на экстремум функцию

$$z = 14x^3 + 27xy^2 - 69x - 54y.$$

Решение. Находим прежде всего $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 42x^2 + 27y^2 - 69;\ \frac{\partial z}{\partial y} = 54xy - 54. \qquad (42,4)$$

Решаем систему уравнений

$$\begin{cases} 42x^2 + 27y^2 - 69 = 0, \\ 54xy - 54 = 0. \end{cases}$$

После очевидных сокращений эта система запишется так:

$$\begin{cases} 14x^2 + 9y^2 = 23, \\ xy = 1. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим 4 пары решений, при которых исследуемая функция может иметь экстремум.

Первая пара: $x_1 = 1$; $y_1 = 1$; вторая пара: $x_2 = \frac{3}{\sqrt{14}}$; $y_2 = \frac{\sqrt{14}}{3}$; третья пара: $x_3 = -1$; $y_3 = -1$; четвертая пара: $x_4 = \frac{-3}{\sqrt{14}}$; $y_4 = -\frac{\sqrt{14}}{3}$.

Теперь определим, какие именно из этих значений доставляют функции экстремум.

Определим из (42,4) вторые частные производные:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 84x; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 54y; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 54x.$$

Для каждой пары значений определим числа A, B и C и число Δ.

1. Для $x_1 = 1$; $y_1 = 1$ имеем

$$A = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{\substack{x=1\\y=1}} = 84; \quad B = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_{\substack{x=1\\y=1}} = 54; \quad C = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{\substack{x=1\\y=1}} = 54.$$

Число $\Delta = AC - B^2 = 84 \cdot 54 - 54^2 > 0$.

Экстремум есть, а так как $A > 0$, то имеет место минимум

$$z_{\min} = 14 \cdot 1 + 27 \cdot 1 \cdot 1 - 69 - 54 = -82.$$

2. Для $x_2 = \frac{3}{\sqrt{14}}$; $y_2 = \frac{\sqrt{14}}{3}$

$$A = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{\substack{x=x_2\\y=y_2}} = \frac{252}{\sqrt{14}}; \quad B = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_{\substack{x=x_2\\y=y_2}} = 18\sqrt{14}$$

$$C = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{\substack{x=x_2\\y=y_2}} = \frac{162}{\sqrt{14}}; \quad \Delta = AC - B^2 = \frac{252}{\sqrt{14}}\,\frac{162}{\sqrt{14}} - (18\sqrt{14})^2 < 0,$$

и при $x = \frac{3}{\sqrt{14}}$; $y = \frac{\sqrt{14}}{3}$ экстремума нет.

3. Для $x_3 = -1$; $y_3 = -1$

$$A = -84; \quad B = -54; \quad C = -54;$$

$$\Delta = AC - B^2 = (-84)(-54) - (-54)^2 > 0.$$

Экстремум есть, и именно максимум, так как $A = -84 < 0$;

$$z_{\max} = -14 - 27 + 69 + 54 = 82.$$

4. Для $x_4 = -\frac{3}{\sqrt{14}}$; $y_4 = -\frac{\sqrt{14}}{3}$ имеем

$$A = -\frac{252}{\sqrt{14}};\ B = -18\sqrt{14};\ C = -\frac{162}{\sqrt{14}};$$

$$\Delta = AC - B^2 = \left(-\frac{252}{\sqrt{14}}\right)\left(-\frac{162}{\sqrt{14}}\right) - (-18\sqrt{14})^2 < 0.$$

Экстремума при значениях $x = x_4$ и $y = y_4$ нет.

Задача 42, 3 (для самостоятельного решения). Исследовать на экстремум функцию

$$z = \frac{x^2}{2} + 2xy + \frac{y^2}{2} - 4x - 5y.$$

Ответ. Экстремума нет.

Задача 42, 4 (для самостоятельного решения). Исследовать на экстремум функцию $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

Указание. Система уравнений $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ и $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ приведет к системе уравнений

$$\begin{cases} x^3 - x + y = 0, \\ y^3 + x - y = 0. \end{cases}$$

Почленное сложение даст уравнение $x^3 + y^3 = 0$, откуда следует, что $y = -x$.

Подставляя в первое уравнение, получим $x^3 - 2x = 0$, откуда $x_1 = 0$; $x_2 = \sqrt{2}$; $x_3 = -\sqrt{2}$, а $y_1 = 0$; $y_2 = -\sqrt{2}$; $y_3 = \sqrt{2}$.

Имеем три пары решений: 1) $x_1 = 0$; $y_1 = 0$; 2) $x_2 = \sqrt{2}$; $y_2 = -\sqrt{2}$; 3) $x_3 = -\sqrt{2}$; $y_3 = \sqrt{2}$.

Ответ. $z_{\min} = -8$ при $x_2 = \sqrt{2}$, $y_2 = -\sqrt{2}$ и при $x_3 = -\sqrt{2}$, $y_3 = \sqrt{2}$. Вопрос об экстремуме при $x = 0$, $y = 0$ остается открытым.

Задача 42, 5 (для самостоятельного решения). Исследовать на экстремум функции: 1) $z = x^3y^2(12 - x - y)$; 2) $z = xy(xy(x + y - 1))$; 3) $z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$.

Ответ. 1) Максимум при $x = 6$; $y = 4$; $z_{\max} = 6912$;

2) минимум при $x = \frac{1}{3}$; $y = \frac{1}{3}$; $z_{\min} = -\frac{1}{27}$;

3) минимум при $x = 5$; $y = 6$; $z_{\min} = -86$.

Задача 42,6. Найти экстремум функции

$$u = x^2 + y^2 + z^2 + xy - x + y - 2z.$$

Решение. Здесь мы имеем дело с функцией трех независимых переменных. Определим частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + y - 1;\ \frac{\partial u}{\partial y} = 2y + x + 1;\ \frac{\partial u}{\partial z} = 2z - 2$$

и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x + y - 1 = 0. \\ 2y + x + 1 = 0. \\ 2z - 2 = 0; \end{cases}$$

получаем $x = 1$; $y = -1$; $z = 1$.

Значит, при этих значениях независимых переменных возможен экстремум.

Для того чтобы сделать заключение, будет ли он, надо обратиться к исследованию дифференциала второго порядка этой функции. Известно, что дифференциал первого порядка

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz.$$

Дифференциал второго порядка читатель определит самостоятельно и получит, что

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dxdy +$$
$$+ 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} dxdz + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} dydz.$$

У нас

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2; \ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2; \ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 2; \ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 1; \ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 0; \ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 0,$$

а потому

$$d^2u = 2dx^2 + 2dy^2 + 2dz^2 + 2dxdy = 2(dx^2 + dxdy + dy^2) + 2dz^2.$$

Выражение, стоящее в скобках, не отрицательно при любых dx и dy: $(a^2 + b^2) \geqslant -ab$, а последнее слагаемое положительно.

Таким образом, $d^2u > 0$ при любых dx, dy и dz.

Тем самым мы доказали, что при $x = 1$; $y = -1$ и $z = 1$ функция u достигает минимума, а $u_{\min} = -2$.

Задача 42,7 (для самостоятельного решения). Определить экстремум функции $u = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$.

Ответ. При $x = -\frac{2}{3}$; $y = -\frac{1}{3}$; $z = 1$ функция достигает минимума, а $u_{\min} = -\frac{4}{3}$.

2. Отыскание наибольших и наименьших значений функции двух независимых переменных в замкнутой области

Функция ограниченная и дифференцируемая в замкнутой области достигает в этой области своего наибольшего и наименьшего значения или во внутренних точках этой области, которые являются точками стационарности функции, или на ее границе.

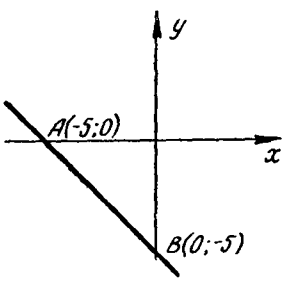
Для того чтобы найти наибольшее и наименьшее значение функции, надо: 1) Найти стационарные точки функции, для чего следует решить систему уравнений $\frac{dz}{dx}=0$; $\frac{dz}{dy}=0$;

2) вычислить в стационарных точках значения функции; 3) найти наибольшее и наименьшее значение функции на каждой линии, ограничивающей область; 4) сравнить все полученные значения. Наибольшее из них будет наибольшим, а наименьшее — наименьшим значением функции в замкнутой области.

Задача 42,8. Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$$z=x^2-xy+2y^2+3x+2y+1$$

в замкнутом треугольнике, ограниченном осями координат и прямой $x+y+5=0$ (фиг. 42,1).



Фиг. 42,1.

Решение. 1) Находим стационарные точки функции:

$$\frac{dz}{dx}=2x-y+3; \qquad \frac{dz}{dy}-x+4y+2.$$

Решаем систему уравнений

$$\begin{cases} 2x-y+3=0 \\ -x+4y+2=0 \end{cases}$$

и находим, что $x=-2$; $y=-1$. Итак, имеется одна стационарная точка $(-2,\ -1)$.

2) Определяем значение функции в этой точке:

$$z(-2,\ -1)=-3$$

(запись $z(-2,\ -1)$ означает, что ищется значение функции $z=z(x,\ y)$ при $x=-2$, $y=-1$).

Переходим к исследованию функции на границах области, которая состоит из отрезка оси Ox, отрезка оси Oy и отрезка AB прямой.

а) На оси Ox $y=0$, а заданная функция принимает при $y=0$ такой вид: $z=x^2+3x+1$ $(-5\leqslant x\leqslant 0)$.

Эта функция должна быть рассмотрена на отрезке $[-5,0]$. Так как на этом отрезке функция z непрерывна, то она достигает на нем как наибольшего, так и наименьшего своего значения. Это может произойти или в точках стационарности функции, где $\frac{dz}{dx}=0$, или на концах рассматриваемого отрезка.

Определим прежде всего точку стационарности

$$\frac{dz}{dx}=2x+3;\quad 2x+3=0;\quad x=-\frac{3}{2}.$$

Определим значение функции при $x = -\frac{3}{2}$ и на концах отрезка $[-5,0]$:

$$z\left(-\frac{3}{2},\ 0\right) = -\frac{5}{4};\ z[-5,0] = 11;\ z[0,0] = 1.$$

Сравнение показывает, что $(z_{\text{наиб.}})_{OA} = 11$; $(z_{\text{наим.}})_{OA} = -\frac{5}{4}$.

б) На оси Oy: $x = 0$, а данная функция при $x = 0$ запишется так:

$$z = 2y^2 + 2y + 1\ \ (-5 \leqslant y \leqslant 0).$$

Эта функция — функция одной независимой переменной. Она должна быть рассмотрена на отрезке $[-5,0]$ (см. фиг. 42,1). Определим на этом отрезке ее наименьшее и наибольшее значения, которые в силу непрерывности должны существовать. Прежде всего определяем точки стационарности функции:

$$\frac{dz}{dy} = 4y + 2;\ 4y + 2 = 0;\ y = -\frac{1}{2}.$$

Определим значение функции при $y = -\frac{1}{2}$, а также на концах рассматриваемого отрезка:

$$z\left(0,\ -\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2};\ z(0,\ -5) = 41;\ z(0,\ 0) = 1;$$

$$(z_{\text{наиб.}})_{OB} = 41;\ \ (z_{\text{наим.}})_{OB} = \frac{1}{2}.$$

в) Наконец, исследуем данную функцию на отрезке прямой AB, принадлежащем границе области.

Уравнение прямой AB $x + y + 5 = 0$. Поэтому на ней $y = -x - 5$.

Подставляя это значение y в заданную функцию, получаем

$$z = 4x^2 + 26x + 41.$$

Наибольшее и наименьшее значение этой функции должно быть определено для значений $-5 \leqslant x \leqslant 0$:

$$\frac{dz}{dx} 8x + 26;\ 8x + 26 = 0;\ x = -\frac{13}{4}.$$

Находим соответствующее значение y. Из $y = -x - 5$ следует, что

$$y = -\left(-\frac{13}{4}\right) - 5 = \frac{13}{4} - 5 = -\frac{7}{4}.$$

Итак, рассмотрению подлежит точка $\left(-\frac{13}{4}, -\frac{7}{4}\right)$ (надо следить за тем, чтобы исследуемые точки принадлежали рассматриваемой области):

$$z\left(-\frac{13}{4}, -\frac{7}{4}\right) = -\frac{5}{4}; \; z(-5, 0) = 11; \; z(-5, 0) = 41;$$

$$(z_{\text{наиб.}})_{AB} = 41; \quad (z_{\text{наим.}})_{AB} = -\frac{5}{4}.$$

Сравнивая теперь значение функции z в стационарной точке $(-2, -1)$ с наибольшими и наименьшими значениями на отрезках OA, OB и AB, найденными в пунктах а), б) и в), усматриваем, что в заданной замкнутой области

$$z_{\text{наиб.}} = z(0, -5) = 41,$$

$$z_{\text{наим.}} = z(-2, -1) = -3;$$

таким образом, оказалось, что наименьшего своего значения функция достигла в стационарной точке $(-2, -1)$, а наибольшего — на границе области, в точке $(0, -5)$.

Задача 42,9 (для самостоятельного решения). Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2 - 6x + 4y + 2$ в прямоугольнике с вершинами: $A(1, -3)$; $B(1, 2)$; $C(4, 2)$; $D(4, -3)$

$$(1 \leqslant x \leqslant 4); \quad (-3 \leqslant y \leqslant 2).$$

Указания. В стационарной точке $(3, -2)$ $z(3, -2) = -11$. Рассматривая границу области, получаем: 1) На отрезке AB: $z = z(1, y) = y^2 + 4y - 3$. Наибольшего значения на AB функция достигает в точке B $(1, 2)$ и $(z_{\text{наиб.}})_{AB} = 9$, а наименьшее ее значение на AB в точке $(1, -2)$ и $(z_{\text{наим.}})_{AB} = -7$;

2) на отрезке CD: $z = z(4, y) = y^2 + 4y - 6$. На CD наибольшего значения функция достигает в точке C $(4, 2)$ и $(z_{\text{наиб.}})_{CD} = 6$, а наименьшее ее значение в точке $(4, -2)$ и $(z_{\text{наим.}})_{CD} = -10$;

3) на отрезке $BC: z = z(x, 2) = x^2 - 6x + 14$; наибольшего значения функция достигает в точке $B(1, 2)$; а $(z_{\text{наиб.}})_{BC} = 9$; $(z_{\text{наим.}})_{BC} = 5$;

4) на отрезке $AD: z = z(x - 3) = x^2 - 6x - 1$; $(z_{\text{наиб.}})_{AD} = -6$; $(z_{\text{наим.}})_{AD} = -10$.

Сравнить полученное значение функции в стационарной точке $(3, -2)$ с ее наибольшими и наименьшими значениями на границе области.

Ответ. В рассматриваемой области функция достигает наименьшего значения в стационарной точке: $z_{\text{наим.}} = -11$. Наибольшего значения функция достигает на отрезке AB в точке $(1, 2)$ и $z_{\text{наиб.}} = 9$.

Задача 42, 10 (для самостоятельного решения). Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = xy(x+y+1)$ в замкнутой области, ограниченной линиями $y = \frac{1}{x}$; $x = 1$; $x = 2$; $y = -\frac{3}{2}$.

Ответ. Стационарные точки: $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$; $(0, -1)$; $(-1, 0)$; $(0, 0)$ находятся вне рассматриваемой области. Наибольшего значения функция достигает на границе области в точке $\left(2, \frac{1}{2}\right)$; а $z_{\text{наиб.}} = 3{,}5$. Наименьшего значения функция достигает в точке $\left(2, -\frac{3}{2}\right)$, а $z_{\text{наим.}} = -4{,}5$.

Задача 42, 11 (для самостоятельного решения). Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = \cos x \cos y \cos(x+y)$ в замкнутом квадрате, ограниченном линиями $x = 0$; $x = \pi$; $y = 0$, $y = \pi$.

Указания. 1) После определения частных производных $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ их выгодно представить в виде:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{2}[\sin(2x+2y) + \sin 2x];$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{2}[\sin(2x+2y) + \sin 2y].$$

2) Из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{2}[\sin(2x+2y) + \sin 2x] = 0 \\ -\frac{1}{2}[\sin(2x+2y) + \sin 2y] = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (A)$$

следует, что $\sin 2x = \sin 2y$, и тогда $2\cos(x+y)\sin(x-y) = 0$. Отсюда получаем, что

$$x - y = k\pi, \qquad (B)$$

$$x + y = \frac{\pi}{2}(2k+1), \qquad (C)$$

где k — любое целое число. Но условие задачи требует, чтобы выполнялись неравенства $0 \leqslant x \leqslant \pi$; $0 \leqslant y \leqslant \pi$, а потому должно быть $-\pi \leqslant x - y \leqslant \pi$ и $0 \leqslant x + y \leqslant 2\pi$; поэтому в (B) можно брать $k = -1$; $k = 0$ и $k = 1$, а в (C) $k = 0$ и $k = 1$.

$$\begin{cases} x - y = 0, & \text{откуда } y = x; \\ x - y = -\pi, & \text{»} \quad y = x + \pi; \\ x - y = \pi, & \text{»} \quad y = x - \pi; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2} & \text{»} \quad y = \frac{\pi}{2} - x; \\ x + y = \frac{3\pi}{2} & \text{»} \quad y = \frac{3\pi}{2} - x. \end{cases}$$

Подставляя в первое уравнение системы (A) первые три значения y, получим уравнение $\sin 4x + \sin 2x = 0$, а подстановка в это же уравнение последних двух значений y приводит к уравнению $\sin 2x = 0$.

Из этих уравнений находим стационарные точки:

$$(0,\ 0)\ (0,\ \pi):\left(\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{3}\right);\ \left(\frac{2}{3}\pi,\ \frac{2}{3}\pi\right);\ (\pi,\ \pi);\ \left(\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right);\ \left(0,\ \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right);\ \left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right);\ \left(\pi,\ \frac{\pi}{2}\right);\ (\pi,\ 0)$$

(решения, находящиеся вне данного квадрата, отброшены).

3) Теперь следует отобрать из стационарных точек те, которые лежат внутри квадрата;

$$\left(\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{3}\right),\ \left(\frac{2}{3}\pi,\ \frac{2}{3}\pi\right);\ \left(\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right).$$

4) На прямой $y = 0$ имеем $f(x,\ 0) = \cos^2 x$,
» » $y = \pi$ имеем $f(x,\ \pi) = \cos^2 x$,
» » $x = 0$ имеем $f(0,\ y) = \cos^2 y$,
» » $x = \pi$ имеем $f(\pi,\ y) = \cos^2 y$.

На каждой из этих прямых наибольшее значение функции равно 1, а наименьшее — нулю. Наибольшее значение функция имеет в вершинах квадрата, а наименьшее, равное нулю, — в точках $\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right);\ \left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right);\ \left(0,\ \frac{\pi}{2}\right);\ \left(\pi,\ \frac{\pi}{2}\right)$.

Ответ. Наибольшего значения функция достигает в вершинах квадрата и $z_{\text{наиб.}} = 1$; наименьшего — в стационарных точках

$$\left(\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{3}\right);\ \text{и}\ \left(\frac{2}{3}\pi,\ \frac{2}{3}\pi\right)\ \text{и}\ z_{\text{наим.}} = -\frac{1}{8}.$$

Задача 42, 12. Доказать, что из всех треугольников имеющих данный периметр $2p$, наибольшую площадь имеет равносторонний треугольник.

Решение. Обозначим стороны треугольника через x, y и z. По формуле Герона площадь треугольника

$$S = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}.$$

Замечая, что $z = 2p - x - y$, мы получим S как функцию только двух независимых переменных,

$$S = \sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)}.$$

Вместо того, чтобы искать экстремум этой функции, будем искать экстремум ее квадрата

$$f(x,\ y) = S^2 = p(p-x)(p-y)(x+y-p);$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = p(p-y)(2p-2x-y);\ \frac{\partial f}{\partial y} = p(p-x)(2p-2y-x).$$

Решаем систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} p(p-y)(2p-2x-y)=0 \\ p(p-x)(2p-2y-x)=0 \end{aligned}\right\}.$$

Эта система приводит к таким четырем системам:

$$1)\ \left.\begin{aligned} p-y=0 \\ p-x=0 \end{aligned}\right\}, \qquad 2)\ \left.\begin{aligned} 2p-2x-y=0 \\ 2p-2y-x=0 \end{aligned}\right\},$$

$$3)\ \left.\begin{aligned} 2p-2x-y=0 \\ p-x=0 \end{aligned}\right\}; \qquad 4)\ \left.\begin{aligned} 2p-2y-x=0 \\ p-y=0 \end{aligned}\right\}.$$

Находим стационарные точки:

$$(p,\ p);\ \left(\frac{2}{3}p,\ \frac{2}{3}p\right);\ (p,\ 0);\ (0,\ p).$$

Исследованию подлежит только одна точка $M\left(\frac{2}{3}p,\ \frac{2}{3}p\right)$, так как остальные точки не удовлетворяют смыслу задачи: не может быть треугольника, у которого сторона равна половине периметра.

Исследуем на экстремум точку $M\left(\frac{2}{3}p,\ \frac{2}{3}p\right)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-2p(p-y);\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2p(p-x);\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=p(2x+2y-3p);$$

$$A=\left(\frac{d^2 f}{\partial x^2}\right)_M=-\frac{2}{3}p^2;\quad B=\left(\frac{d^2 f}{\partial x\partial y}\right)_M=-\frac{1}{3}p^2;$$

$$C=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_M=-\frac{2}{3}p^2;$$

$$\Delta=AC-B^2=\left(-\frac{2}{3}p^2\right)\left(-\frac{2}{3}p^2\right)-\left(-\frac{1}{3}p^2\right)^2p^2=$$

$$=\frac{4}{9}p^4-\frac{1}{9}p^4=\frac{1}{3}p^4>0;$$

$\Delta>0$, а так как $A<0$, то в исследуемой точке функция достигает максимума. Итак, в единственной стационарной точке функция достигает максимума, а потому и наибольшего значения: таким образом, при $x=\frac{2}{3}p$, $y=\frac{2}{3}p$ функция достигает и наибольшего значения. Но тогда $z=2p-x-y=\frac{2}{3}p$. А так как $x=y=z$, то треугольник — равносторонний.

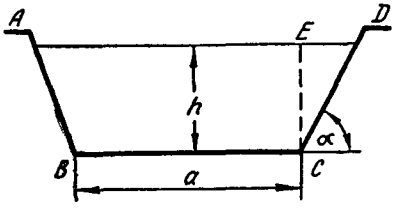
Задача 42, 13. Канал, подводящий воду к турбине, имеет в сечении равнобедренную трапецию, площадь которой задана и равна S. Определить глубину канала и угол α откоса так, чтобы периметр, смоченный водой, был наименьшим*.

---

* Периметр, смоченный водой, называется «мокрым». Он влияет на трение и от его величины зависят расходы на сооружение канала.

Решение. «Мокрый» периметр обозначим буквой L, и тогда (фиг. 42, 2) $L = AB + BC + CD$. Так как $h = CD \sin\alpha$, то $CD = AB = \frac{h}{\sin\alpha}$. Учитывая, что $BC = a$, получаем, что $L = a + \frac{2h}{\sin\alpha}$.

Таким образом, L есть функция трех независимых переменных: a, h и α. Условие задачи позволяет одну из переменных исключить. Требуется, чтобы площадь сечения была постоянна и равна S. В трапеции $S = \frac{BC + AD}{2} h$. Но $BC = a$, а $AD = BC + 2ED = a + 2h \operatorname{ctg}\alpha$, а потому



Фиг. 42,2.

$$S = \frac{2a + 2h \operatorname{ctg}\alpha}{2} h;$$

$$S = (a + h \operatorname{ctg}\alpha) h;$$

откуда следует, что

$$a = \frac{S}{h} - h \operatorname{ctg}\alpha,$$

и для L получаем формулу

$$L = \frac{S}{h} - h \operatorname{ctg}\alpha + \frac{2h}{\sin\alpha},$$

в которой только две независимых переменных — h и α. (S — величина постоянная).

Находим

$$\frac{\partial L}{\partial h} = -\frac{S}{h^2} - \operatorname{ctg}\alpha + \frac{2}{\sin\alpha}; \quad \frac{\partial L}{\partial \alpha} = h \operatorname{cosec}^2\alpha - \frac{2h\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$$

и решаем систему двух уравнений:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{S}{h^2} - \operatorname{ctg}\alpha + \frac{2}{\sin\alpha} &= 0 \\ h \operatorname{cosec}^2\alpha - \frac{2h\cos\alpha}{\sin^2\alpha} &= 0 \end{aligned}\right\};$$

после упрощений эта система запишется так:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{S}{h^2} + \frac{2 - \cos\alpha}{\sin\alpha} &= 0 \\ \frac{h(1 - 2\cos\alpha)}{\sin^2\alpha} &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Из второго уравнения следует, что $h(1 - 2\cos\alpha) = 0$, откуда или $h = 0$, или $1 - 2\cos\alpha = 0$. Но глубина h не может быть равна нулю, а потому остается только $1 - 2\cos\alpha = 0$ или $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, а $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Найденное значение α подставим в первое уравнение и получим

$$-\frac{S}{h^2}+\frac{2-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=0;\ \frac{S}{h^2}=\sqrt{3};\quad h^2=\frac{S}{\sqrt{3}},\ \text{а}\ h=\frac{\sqrt{S}}{\sqrt[4]{3}}.$$

Теперь определим значения производных второго порядка при найденных значениях α и h:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial h^2}=\frac{2S}{h^3};\ \frac{\partial^3 L}{\partial \alpha^2}=2\,\frac{1-\cos\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^3\alpha}\,h;\ \frac{\partial^2 L}{\partial\alpha\partial h}=\frac{1-2\cos\alpha}{\sin^2\alpha}.$$

Находим числа A, B и C:

$$A=\frac{6}{\sqrt{S}\sqrt[4]{3}};\ B=0;\ C=\frac{4}{3}\sqrt[4]{3}\sqrt{S};$$

$$\Delta=AC-B^2=\frac{6}{\sqrt[4]{S}\sqrt[4]{3}}\,\frac{4}{3}\sqrt[4]{3}\sqrt{S}>0.$$

Значит, экстремум есть, а так как $A>0$, то при найденных значениях h и α функция L достигает минимума, и $L_{\min}=2\sqrt{S}\sqrt[4]{3}$.

Задача 42, 14. Два пункта P_1 и P_2 отстоят от двух пересекающихся под прямым углом прямых, которые принимаются за оси прямоугольной системы координат Ox и Oy, на расстояния соответственно равные: $x_1=a_1$, $S_1=b_1$; $x_2=a_2$, $y_2=b_2$ (все эти числа положительны). P_1 и P_2 надо соединить телеграфным проводом так, чтобы провод сначала шел к какой-нибудь точке Q_1, на положительной части оси Ox, от нее к точке Q_2 на положительной части оси Oy, а после этого — от Q_2 к P_2 (фиг. 42, 3), где на осях Ox и Oy надо поместить точки Q_1 и Q_2, чтобы длина телеграфной линии была наименьшей?

Решение. Все обозначения указаны на фиг. 42, 3. Длина телеграфной линии

$$L=P_1Q_1+Q_1Q_2+Q_2P_2;$$

$$P_1Q_1=\sqrt{b_1^2+(a_1-x)^2};\ Q_1Q_2=\sqrt{x^2+y^2};\ Q_2P_2=\sqrt{a_2^2+(b_2-y)^2};$$

$$L=\sqrt{b_1^2+(a_1-x)^2}+\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{a_2^2+(b_2-y)^2}$$

Z — функция двух независимых переменных — x и y. Приступаем к определению стационарных точек:

$$\frac{\partial L}{\partial x}=-\frac{a_1-x}{\sqrt{b_1^2+(a_1-x)^2}}+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

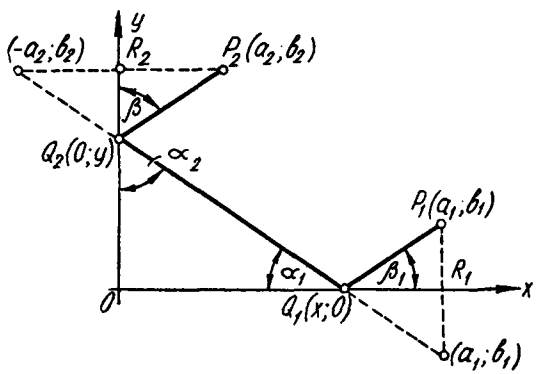
$$\frac{\partial L}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{b_2-y}{\sqrt{a_2^2+(b_2-y)^2}}.$$

Решаем систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} -\frac{a_1-x}{\sqrt{b_1^2+(a_1-x)^2}}+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}&=0\\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{b^2-y}{\sqrt{a_2^2+(b_2-y)^2}}&=0\end{aligned}\right\}.$$

Запишем уравнения системы так:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}&=\frac{a_1-x}{\sqrt{b_1^2=(a_1-x)^2}}\\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}&=\frac{b_2-y}{\sqrt{a_2^2+(b_2-y)^2}}\end{aligned}\right\}.$$



Фиг. 42,3

Возводя в квадрат обе части каждого уравнения,

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{x^2+y^2}&=\frac{(a_1-x)^2}{b_1^2+(a_1-x)^2}\\ \frac{y^2}{x^2+y^2}&=\frac{(b_2-y)^2}{a_2^2+(b_2-y)^2}\end{aligned}\right\}.$$

Отсюда следует, что

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2+y^2}{x^2}&=\frac{b_1^2+(a_1-x)^2}{(a_1-x)^2}\\ \frac{x^2+y^2}{y^2}&=\frac{a_2^2+(b_2-y)^2}{(b_2-y)^2}\end{aligned}\right\}.$$

Поэтому

$$\left.\begin{aligned} 1+\frac{y^2}{x^2} &= \frac{b_1^2}{(a_1-x)^2}+1 \\ \frac{x^2}{y^2}+1 &= \frac{a_2^2}{(b_2-y)^2}+1 \end{aligned}\right\}.$$

После очевидных упрощений получаем

$$\left.\begin{aligned} \frac{y^2}{x^2} &= \frac{b_1^2}{(a_1-x)^2} \\ \frac{x^2}{y^2} &= \frac{a_2^2}{(b_2-y)^2} \end{aligned}\right\}, \text{ или } \left.\begin{aligned} \frac{y}{x} &= \frac{b_1}{a_1-x} \\ \frac{x}{y} &= \frac{a_2}{b_2-y} \end{aligned}\right\}.$$

Перемножая почленно уравнения последней системы, получим

$$1=\frac{a_2b_1}{(a_1-x)(b_2-y)};\ a_1-x=\frac{a_2b_1}{b_2-y}.$$

Отсюда

$$x=a_1-\frac{a_2b_1}{b_2-y}=\frac{a_1b_2-a_1y-a_2b_1}{b_2-y}.$$

Но из второго уравнения последней системы следует, что $x=\frac{a_2y}{b_2-y}$. Сравнивая это значение с только что полученным, имеем

$$\frac{a_2y}{a_2-y}=\frac{a_1b_2-a_1y-a_2b_1}{b_2-y},$$

откуда следует, что

$$a_2y=a_1b_2-a_1y-a_2b_1,$$

или

$$a_1y+a_2y=a_1b_2-a_2b_1;$$

$$y=\frac{a_1b_2-a_2b_1}{a_1+a_2}.$$

Определите самостоятельно x; получите $x=\frac{a_1b_2-a_2b_1}{b_1+b_2}$, причем $a_1b_2-a_2b_1>0$, так как $x>0$ и $y>0$ по условию. Значения x и y можно определить значительно проще, если рассмотреть геометрическое значение уравнений системы (A) (вообще от такого истолкования никогда не следует отказываться, так как оно часто приводит к значительным упрощениям).

В первом уравнении системы (A)

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\alpha_1;\quad \frac{a_1-x}{\sqrt{b_1^2+(a_1-x)^2}}=\cos\beta_1,$$

а потому

$$\cos\alpha_1=\cos\beta_1 \text{ и } \alpha_1=\beta_1.$$

Второе уравнение системы (A) дает:

$$\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\cos\alpha_2;\ \frac{b_2-y}{\sqrt{a_2^2+(b_2-y)^2}}=\cos\beta_2 \text{ и } \alpha_2=\beta_2.$$

Из этого мы заключаем, что треугольники $P_1Q_1R_1$, Q_1OQ_2 и $P_2Q_2R_2$ подобны, т. к. они имеют по равному острому углу.

Из подобия треугольников следует, что $\frac{b_1}{a_1-x}=\frac{y}{x}=\frac{b_2-y}{a_2}$.

Отсюда уже просто можно найти значения x и y, которые были найдены раньше.

Теперь самостоятельно докажите, что

1) найденные значения x и y доставляют функции L минимум;

2) кратчайшая длина провода $L_{\text{наим}}=\sqrt{(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2}$;

3) для построения точек Q_1 и Q_2 следует поступить так; перпендикуляры P_1R_1 и P_2R_2 продолжить за точки R_1 и R_2 на расстояния, равные этим перпендикулярам, и концы полученных отрезков соединить прямой линией. Эта линия пересечет ось Ox в точке Q_1, а ось Oy в точке Q_2 (следует написать уравнение прямой, проходящей через точки $(a_1, -b_1)$ и $(-a_2, b_2)$ и найти координаты точек пересечения этой прямой с координатными осями).

Задача 42,15 (для самостоятельного решения). Число a разделить на три слагаемых так, чтобы произведение этих трех слагаемых было наибольшим.

Ответ. Каждое слагаемое равно $\frac{a}{3}$ $\left(\text{полученный результат}\right.$ допускает простое геометрическое истолкование: из всех прямоугольных параллелепипедов, у которых сумма трех измерений есть величина постоянная, равная a, наибольший объем имеет куб с ребром, равным $\left.\frac{a}{3}\right)$.

Задача 42,16 (для самостоятельного решения). Требуется изготовить из жести коробку без крышки в виде прямоугольного параллелепипеда заданного объема V так, чтобы затрата материала была наименьшей. Определить размеры коробки.

Ответ. Основание параллелепипеда — квадрат со стороной $a=\sqrt[3]{V}$, а высота его $h=\frac{\sqrt[3]{V}}{2}$.

Задача 42,17. Задано n неподвижных материальных точек P_i с массами m_i и координатами $P_i(x_i, y_i)$ $(i=1, 2, 3 \ldots, n)$. Найти координаты x и y точки $P(x, y)$, для которой сумма квадратов ее расстояний от этих неподвижных точек, помноженных на массу соответствующих точек, имеет наименьшее значение.

Указание. Искомая сумма $S = \sum_{i=1}^{n} m_i [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2]$.

Ответ.

$$x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}; \quad y = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots + m_ny_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}$$

СОРОК ТРЕТЬЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

Если на поверхности через точку M на ней провести всевозможные кривые и к ним в этой точке провести касательные прямые (они называются касательными к поверхности), то окажется, что все эти касательные лежат в одной плоскости, которая называется касательной плоскостью к поверхности в точке M, а перпендикуляр к касательной плоскости, восстановленный к ней в точке касания M, называется нормалью к поверхности.

1. Если поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$, разрешенным относительно z (т. е. в явной форме), а точка касания M имеет координаты (x_0, y_0, z_0), то уравнение касательной плоскости записывается так:

$$z - z_0 = z'_x(x_0, y_0)(x - x_0 + z'_y(x_0, y_0)(y - y_0), \tag{43,1}$$

а нормаль к поверхности в точке M определяется уравнением

$$\frac{x - x_0}{z'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{z'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}. \tag{43,2}$$

Символы $z'_x(x_0, y_0)$ и $z'_y(x_0, y_0)$ означают, что производные функции $z = f(x, y)$ вычислены при значениях $x = x_0$, $y = y_0$.

2. Если поверхность определена уравнением $f(x, y, z) = 0$, неразрешенным относительно z (уравнение поверхности задано в неявной форме), а точка касания имеет координаты (x_0, y_0, z_0), то касательная плоскость определяется уравнением

$$f'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \\ + f'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0, \tag{43,3}$$

а нормаль к поверхности в точке M (x_0, y_0, z_0)

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{f'_z(x_0, y_0, z_0)}. \tag{43,4}$$

Символы $f_x(x_0, y_0, z_0)$, $f'_y(x_0, y_0, z_0)$, $f'_z(x_0, y_0, z_0)$ *означают частные производные функции $f(x, y, z)$ вычисленные для значений $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$.*