Указание. Искомая сумма $S = \sum_{i=1}^{n} m_i [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2]$.

Ответ.

$$x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}; \quad y = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots + m_ny_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}$$

СОРОК ТРЕТЬЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

Если на поверхности через точку M на ней провести всевозможные кривые и к ним в этой точке провести касательные прямые (они называются касательными к поверхности), то окажется, что все эти касательные лежат в одной плоскости, которая называется касательной плоскостью к поверхности в точке M, а перпендикуляр к касательной плоскости, восстановленный к ней в точке касания M, называется нормалью к поверхности.

1. Если поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$, разрешенным относительно z (т. е. в явной форме), а точка касания M имеет координаты (x_0, y_0, z_0), то уравнение касательной плоскости записывается так:

$$z - z_0 = z'_x(x_0, y_0)(x - x_0 + z'_y(x_0, y_0)(y - y_0), \tag{43,1}$$

а нормаль к поверхности в точке M определяется уравнением

$$\frac{x - x_0}{z'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{z'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}. \tag{43,2}$$

Символы $z'_x(x_0, y_0)$ и $z'_y(x_0, y_0)$ означают, что производные функции $z = f(x, y)$ вычислены при значениях $x = x_0$, $y = y_0$.

2. Если поверхность определена уравнением $f(x, y, z) = 0$, неразрешенным относительно z (уравнение поверхности задано в неявной форме), а точка касания имеет координаты (x_0, y_0, z_0), то касательная плоскость определяется уравнением

$$f'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \\ + f'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0, \tag{43,3}$$

а нормаль к поверхности в точке M (x_0, y_0, z_0)

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{f'_z(x_0, y_0, z_0)}. \tag{43,4}$$

Символы $f_x(x_0, y_0, z_0)$, $f'_y(x_0, y_0, z_0)$, $f'_z(x_0, y_0, z_0)$ *означают частные производные функции $f(x, y, z)$ вычисленные для значений $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$.*

Задача 43,1. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = x^2 + 3y^2$ в точке, для которой $x = 1$; $y = 1$.

Решение. Прежде всего определим аппликату точки касания: $z(1,1) = 1^2 + 3 \cdot 1^2 = 4$. Итак, точка касания имеет координаты (1, 1, 4), т. е. $x_0 = 1$; $y_0 = 1$; $z_0 = 4$. Так как уравнение поверхности разрешено относительно z, то касательная плоскость и нормаль определяются уравнениями (43,1) и (43,2). Определяем частные производные функции $z: z'_x(x, y) = 2x$; $z'_y(x, y) = 6y$. Вычислим теперь значения частных производных в точке касания: $z'_x(1, 1) = 2$; $z'_y(1, 1) = 6$.

Подставляя эти значения и координаты точки касания в уравнения (43,1) и (43,2), получим уравнение касательной плоскости $z - 4 = 2(x - 1) + 6(y - 1)$, или $2x + 6y - z - 4 = 0$. Уравнение нормали $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-4}{-1}$.

Задача 43,2 (для самостоятельного решения). Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхностям:

1) к эллиптическому параболоиду $z = 2x^2 + y^2$ в точке (1, 1, 3);
2) к поверхности $z = x^4 + 2x^2y - xy + x$ в точке (1, 0, 2);
3) к гиперболическому параболоиду $z = xy$ в точке (1, 2, 2).

Ответ.

1) $4x + 2y - z - 3 = 0$; $\frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{-1}$;

2) $5x + y - z - 3 = 0$; $\frac{x-1}{5} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-2}{-1}$;

3) $2x + y - z - 2 = 0$; $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{-1}$.

Задача 43,3. Определить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности
$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 8z - 1 = 0$ в точке M (1, 2, 2).

Решение. Здесь уравнение поверхности задано в неявной форме (оно не разрешено относительно z), а потому касательная плоскость и нормаль к поверхности определяется уравнениями (43,3) и (43,4). Обозначим левую часть уравнения поверхности через $f(x, y, z)$, найдем частные производные этой функции и их значения в точке касания M: $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_M$, $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_M$ и $\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_M$,

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 8z - 1;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 4; \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_M = 2 \cdot 1 - 4 = -2;$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 2y + 6; \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_M = 2 \cdot 2 + 6 = 10;$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2z - 8; \quad \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_M = 2 \cdot 2 - 8 = -4.$$

Подставляя найденные значения частных производных и координаты точек касания в уравнения (43,3) и (43,4), получим уравнение касательной плоскости

$-2(x-1)+10(y-2)-4(z-2)=0$, или $x-5y+2z+5=0$;

уравнение нормали

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-5}=\frac{z-2}{2}.$$

Задача 43,4 (для самостоятельного решения). Определить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхностям в заданных на них точках:

1) $x^2+y^2-x+2y+4z-13=0$ в точке (2, 1, 2);
2) $x^2+2y^2-3z^2+xy+yz-2xz+16=0$ в точке (1, 2, 3);
3) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ в точке (x_0, y_0, z_0).

Ответ.

1) $3x+4y+4z-18=0$; $\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-2}{4}$;

2) $x-6y+9z-16=0$; $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-6}=\frac{z-3}{9}$;

3) $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0z}{c^2}=1$; $\frac{y-x_0}{\frac{x_0}{a^2}}=\frac{y-y_0}{\frac{y_0}{b^2}}=\frac{z-z_0}{\frac{z_0}{c^2}}$.

Указание (к пункту 3). Воспользоваться тем, что $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}=1$.

Задача 43,5 (для самостоятельного решения). Определить уравнение той касательной плоскости к эллипсоиду $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, которая отсекает равные отрезки на координатных осях.

Указание. Воспользоваться уравнением, полученным при решении предыдущей задачи. Отрезки, отсекаемые этой плоскостью на координатных осях, равны: $\frac{a^2}{x_0}$; $\frac{b^2}{y_0}$; $\frac{c^2}{z_0}$.

По условию задачи $\frac{a^2}{x_0}=\frac{b^2}{y_0}=\frac{c^2}{z_0}$.

Обозначив каждое из этих отношений через k, получим

$$x_0=\frac{a^2}{k};\ y_0=\frac{b^2}{k};\ z_0=\frac{c^2}{k}.$$

Так как точка (x_0, y_0, z_0) — точка касания, то ее координаты удовлетворяют уравнению поверхности, а потому, подставляя полученные значения x_0, y_0, z_0 вместо текущих в уравнение эллипсоида, получим

$$\frac{a^2}{k^2}+\frac{b^2}{k^2}+\frac{c^2}{k^2}=1,\ \text{а}\ k=\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2};$$

тогда

$$x_0 = \frac{a^2}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}};\ y_0 = \frac{b^2}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}};\ z_0 = \frac{c^2}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Подставляя эти значения в уравнение касательной плоскости к эллипсоиду, полученное в предыдущей задаче, имеем окончательно

$$x + y + z \pm \sqrt{a^2+b^2+c^2} = 0.$$

Задача 43,6 (для самостоятельного решения). В такой точке эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ нормаль к нему образует равные углы с осями координат?

Указание. Из уравнения нормали к эллипсоиду, полученного в задаче 43,4, следует, что направляющие косинусы нормали равны:

$$\cos\alpha = \frac{x_0}{a^2A};\ \cos\beta = \frac{y_0}{b^2A};\ \cos\gamma = \frac{z_0}{c^2A},$$

где

$$A = \pm\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4} + \frac{z_0^2}{c^4}}.$$

Из условия задачи следует, что

$$\frac{x_0}{a^2A} = \frac{y_0}{b^2A} = \frac{z_0}{c^2A},$$

или

$$x_0 = Aa^2k;\ y_0 = Ab^2k;\ z_0 = Ac^2k,$$

где k — общее значение написанных выше отношений. Так как точка $M(x_0, y_0, z_0)$ — точка касания, то ее координаты удовлетворяют уравнению эллипсоида, а потому

$$A^2a^2k^2 + A^2b^2k^2 + A^2c^2k^2 = 1;\ Ak = \pm\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}};$$

координаты точки, удовлетворяющей условию задачи,

$$x_0 = \pm\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}};\ y_0 = \pm\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}};\ z_0 = \pm\frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Задача 43,7. К поверхности $x^2 + 3y^2 + z^2 = 1$ провести касательную плоскость, параллельную плоскости $2x + 4y + z = 0$.

Решение. Запишем уравнение поверхности в виде $f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + z^2 - 1 = 0$. Обозначим координаты точки касания M через x_0, y_0, z_0. Определим значения частных производных функции $f(x, y, z)$ в этой точке:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x;\ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_M = 2x_0;\ \frac{\partial f}{\partial y} = 6y;\ \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_M = 6y_0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2z;\ \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_M = 2z_0.$$

Уравнение касательной плоскости запишется в виде (43,3):

$$x_0(x-x_0)+3y_0(y-y_0)+z_0(z-z_0)=0.$$

Так как точка касания $M(x_0, y_0\ z_0)$ принадлежит поверхности, то $x_0^2+3y_0^2+z_0^2=1$ и уравнение касательной плоскости может быть записано так:

$$x_0x+3y_0y+z_0z-1=0 \qquad (A)$$

Из условия параллельности этой плоскости и заданной в условии задачи плоскости $2x+4y+z=0$ следует, что

$$\frac{x_0}{2}=\frac{3y_0}{4}=\frac{z_0}{1}.$$

Обозначая каждое отношение через k, получим, что

$$x_0=2k;\ y_0=\frac{4}{3}k;\ z_0=k.$$

Подставляя эти значения в уравнение поверхности, получим:

$$4k^2+3\cdot\frac{16}{9}k^2+k^2=1.$$

Откуда $k=\pm\frac{3}{\sqrt{93}}$ и, значит,

$$x_0=\pm\frac{6}{\sqrt{93}};\ y_0=\pm\frac{4}{\sqrt{93}};\ z_0=\pm\frac{3}{\sqrt{93}}.$$

Подставляя это значение в уравнение (A), получим окончательно уравнение касательной плоскости:

$$2x+4y+z=\pm\frac{\sqrt{93}}{3}.$$

Таким образом, оказалось, что условию задачи удовлетворяют две плоскости.

Задача 43,8 (для самостоятельного решения). К поверхности $x^2+2y^2+z^2=1$ провести касательную плоскость, параллельную плоскости $x-y+2z=0$

Ответ. $x-y+2z\pm\sqrt{\frac{11}{2}}=0.$