ДВАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Линейные неоднородные дифференциальные уравнения.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

1. Линейное неоднородное дифференциальное уравнение имеет вид

$$y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + p_2(x)\, y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}y' + p_n y = f(x). \tag{20,1}$$

2. Общее решение линейного неоднородного уравнения находится так:

а) Найти одно какое-нибудь его частное решение.

б) Найти общее решение соответствующего однородного уравнения.

в) Сложить эти два решения. Сумма их и будет общим решением уравнения (20,1).

Так, если частное решение неоднородного уравнения есть Y, а общее решение соответствующего однородного есть $C_1y_1+C_2y_2+ \ldots +C_ny_n$, то общее решение линейного неоднородного уравнения (20,1):

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3 + \ldots + C_ny_n + Y. \tag{20,2}$$

Условия, налагаемые на коэффициенты $p_i(x)$ и правую часть $f(x)$, изложены в пояснениях к уравнению (19,1).

3. Если правая часть уравнения (20,1) есть сумма двух функций:

$$y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + p_2(x)\, y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)\, y' + p_n(x)\, y = f_1(x) + f_2(x), \tag{20,3}$$

следует рассмотреть два уравнения, у которых левые части такие же, как в (20,3), но в одном из них правой частью будет функция $f_1(x)$, а во втором $f_2(x)$, т. е. рассмотреть уравнения

$$y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + p_2(x)\, y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)\, y' + p_n(x)\, y = f_1(x) \tag{20,4}$$

и

$$y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + p_2(x)\, y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)\, y' + p_n(x)\, y = f_2(x). \tag{20,5}$$

Если функции Y_1 и Y_2 — соответственно частные решения уравнений (20,4) и (20,5), то их сумма $Y_1 + Y_2$ будет частным решением уравнения (20,3). (Это свойство называется наложением решений и распространяется на случай, когда правая часть — сумма n функций).

4. Если известно общее решение однородного линейного уравнения, соответствующего заданному неоднородному, то его

частное решение Y можно найти с помощью квадратур методом, который указал Лагранж. Этот метод называется методом вариации (изменения) произвольных постоянных.

Получив общее решение (19,3)

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n$$

линейного однородного уравнения (19,2), поступают так: полагают, что в этом решении величины C_1, C_2, ... , C_n являются не постоянными, а функциями независимой переменной x. Записывают это так:

$$y = C_1(x)\,y_1 + C_2(x)\,y_2 + \ldots + C_n(x)\,y_n. \qquad (20,6)$$

Для определения функций $C_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ составляется система уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} C_1'(x)\,y_1 + C_2'(x)\,y_2 + \ldots + C_n'(x)\,y_n = 0 \\ C_1'(x)\,y_1' + C_2'(x)\,y_2' + \ldots + C_n'(x)\,y_n' = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1'(x)\,y_1^{(n-2)} + C_2'(x)\,y_2^{(n-2)} + \ldots + C_n'(x)\,y_n^{(n-2)} = 0 \\ C_1'(x)\,y_1^{(n-1)} + C_2'(x)\,y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n'(x)\,y_n^{(n-1)} = f(x) \end{array}\right\} \qquad (20,7)$$

Мы рассмотрим подробно этот метод для линейных дифференциальных неоднородных уравнений второго порядка:

$$y'' + p_1(x)\,y' + p_2(x)\,y = f(x). \qquad (20,8)$$

Получив общее решение

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 \qquad (20,9)$$

соответствующего однородного уравнения, поступают так: полагают, что в этом решении величины C_1 и C_2 являются не постоянными, а функциями независимой переменной x, и записывают это так:

$$y = C_1(x)\,y_1 + C_2(x)\,y_2.$$

Для определения функций $C_1(x)$ и $C_2(x)$ составляется система уравнений (20,7):

$$\left.\begin{array}{l} C_1'(x)\,y_1 + C_2'(x)\,y_2 = 0 \\ C_1'(x)\,y_1' + C_2'(x)\,y_2' = f(x) \end{array}\right\}. \qquad (20,10)$$

Определитель этой системы — определитель Вронского. Так как (20,9) есть общее решение уравнения (20,8), то функции y_1 и y_2 линейно независимы и их определитель Вронского не равен нулю.

Поэтому система (20,10) всегда имеет решение и притом единственное.

Решая эту систему уравнений относительно $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$, получим:

$$\left.\begin{aligned} C_1'(x) &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}}{W}; \quad C_1'(x) = -\frac{y_2 f(x)}{W} \\ C_2'(x) &= \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}}{W}; \quad C_2'(x) = \frac{y_1 f(x)}{W} \end{aligned}\right\}, \tag{20,11}$$

где определитель Вронского

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}.$$

Из (20,11) интегрированием находим:

$$\left.\begin{aligned} C_1(x) &= -\int \frac{y_2 f(x)}{W}\,dx + c_1; \\ C_2(x) &= \int \frac{y_1 f(x)}{W}\,dx + c_2. \end{aligned}\right\} \tag{20,12}$$

Подставляя (20,12) в (20,9), получим

$$y = \left(-\int \frac{y_2 f(x)}{W}\,dx + c_1\right) y_1 + \left(\int \frac{y_1 f(x)}{W}\,dx + c_2\right) y_2.$$

Раскрывая скобки, найдем

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_2 \int \frac{y_1 f(x)}{W}\,dx - y_1 \int \frac{y_2 f(x)}{W}\,dx.$$

Сравнивая с (20,2), замечаем, что первые два слагаемых $c_1 y_1 + c_2 y_2$ в правой части — общее решение однородного уравнения, соответствующего (20,8), а последние два слагаемых — частное решение неоднородного уравнения (20,8). Обозначая эти два слагаемых через Y, получаем формулу частного решения линейного неоднородного уравнения второго порядка

$$Y = y_2 \int \frac{y_1 f(x)}{W}\,dx - y_1 \int \frac{y_2 f(x)}{W}\,dx.$$

В более компактной форме частное решение линейного неоднородного уравнения второго порядка может быть записано так:

$$Y = \begin{vmatrix} \int \frac{y_1 f(x)}{W}\,dx & \int \frac{y_2 f(x)}{W}\,dx \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \tag{20,13}$$

Все величины, входящие в эту формулу, известны.

Замечание. Следует иметь в виду, что система (20,10), так же как и формула (20,13), имеет место тогда, когда коэффициент при старшей производной равен единице. Функция $f(x)$ есть правая часть уравнения при этом предположении.

5. Метод вариации произвольных постоянных — универсальный. Он позволяет при помощи квадратур определить частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (20,1), если известно общее решение соответствующего ему однородного уравнения.

Ниже будет рассмотрен случай, когда частное решение неоднородного уравнения (20,1) может быть найдено без применения метода вариации произвольных постоянных, и тем самым без вычисления интегралов.

Приступим к упражнениям, связанным с применением метода вариации произвольных постоянных.

Задача 20,1. Найти общее решение уравнения

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = x^4 - x^2,$$

зная, что частным решением соответствующего ему однородного уравнения является функция $y_1 = x^2$.

Решение. Прежде всего преобразуем уравнение так, чтобы коэффициент при старшей производной, т. е. при y'', был равен единице. Для этого обе части уравнения разделим на x^2 и получим

$$y'' - \frac{4}{x}y' + \frac{6}{x^2}y = x^2 - 1. \qquad (A)$$

Теперь правая часть уравнения $f(x) = x^2 - 1$. Отбросим ее и найдем общее решение уравнения

$$y'' - \frac{4}{x}y' + \frac{6}{x^2}y = 0, \qquad (B)$$

зная его одно частное решение. По формуле (19,6) определим второе частное решение:

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2}\,dx.$$

У нас $p(x) = -\frac{4}{x}$; $-\int p(x)\,dx = \int \frac{4}{x}\,dx = 4\ln x = \ln x^4$; $e^{-\int p(x)dx} = e^{\ln x^4} = x^4$. Помня, что $y_1 = x^2$, получаем

$$y_2 = x^2 \int \frac{x^4}{x^4}\,dx = x^2 \cdot x = x^3.$$

Итак, $y_2 = x^3$. Общее решение y_0 уравнения (B) запишется так:

$$y_0 = C_1x^2 + C_2x^3. \qquad (C)$$

Теперь применим формулу (20,13) для определения частного решения уравнения (A). Определитель Вронского

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 & x^3 \\ 2x & 3x^2 \end{vmatrix} = 3x^4 - 2x^4 = x^4;$$

$$\int \frac{y_1 f(x)}{W}\,dx = \int \frac{x^2(x^2-1)}{x^4}\,dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)dx = x + \frac{1}{x};$$

$$\int \frac{y_2 f(x)}{W}\,dx = \int \frac{x^3(x^2-1)}{x^4}\,dx = \int \left(x - \frac{1}{x}\right)dx = \frac{x^2}{2} - \ln|x|.$$

Подставляя в (20,13) значения интегралов и частные решения y_1 и y_2 уравнения (B), получим

$$Y = \begin{vmatrix} x + \frac{1}{x} & \frac{x^2}{2} - \ln|x| \\ x^2 & x^3 \end{vmatrix} = \frac{x^4}{2} + x^2 + x^2 \ln|x|.$$

Складывая это частное решение заданного неоднородного уравнения с общим решением (C) соответствующего ему однородного, получим общее решение заданного уравнения

$$y = \underline{C_1 x^2} + C_2 x^3 + \frac{x^4}{2} + \underline{x^2} + x^2 \ln|x|.$$

Это выражение можно упростить, если объединить подчеркнутые слагаемые и обозначить $C_1 + 1$ через c_1, а $C_2 = c_2$. Тогда

$$y = c_1 x^2 + c_2 x^3 + \frac{x^4}{2} + x^2 \ln|x|.$$

Задача 20,2. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$(2x + 1)\, y'' + (4x - 2)\, y' - 8y = 2e^x (2x + 1)^3,$$

зная, что функция $y_1 = e^{-2x}$ является частным решением соответствующего ему однородного уравнения.

Решение. Преобразуем уравнение (A) так, чтобы коэффициент при старшей производной y'' был равен единице. Разделим его обе части на $(2x + 1)$. Получим

$$y'' + \frac{4x - 2}{2x + 1} y' - \frac{8}{2x + 1} y = 2e^x (2x + 1)^2. \qquad (A)$$

Правая часть этого уравнения $f(x) = 2e^x (2x + 1)^2$. Отбросим правую часть и найдем общее решение полученного однородного уравнения

$$y'' + \frac{4x - 2}{2x + 1} y' - \frac{8}{2x + 1} y = 0. \qquad (B)$$

Здесь опять-таки чтобы найти y_2 следует воспользоваться формулой (19,6), в которой $p(x) = \frac{4x - 2}{2x + 1}$, $y_1 = e^{-2x}$ (согласно условию):

$$-\int p(x)\, dx = -\int \frac{4x - 2}{2x + 1} dx = -2\int \frac{2x - 1}{2x + 1} dx =$$

$$= -2\int \frac{2x + 1 - 2}{2x + 1} dx = -2\int \left(1 - \frac{2}{2x + 1}\right) dx = -2x +$$

$$+ 2\ln|2x + 1| = -2x + \ln(2x + 1)^2;$$

$$e^{-\int p(x) dx} = e^{-2x + \ln(2x+1)^2} = e^{-2x} (2x + 1)^2;$$

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x) dx}}{y_1^2} dx = e^{-2x} \int \frac{e^{-2x} (2x + 1)^2}{e^{-4x}} dx =$$

$$= e^{-2x} \int e^{2x} (4x^2 + 4x + 1)\, dx = \frac{1}{2} e^{-2x} (4x^2 + 1)\, e^{2x} = \frac{1}{2} (4x^2 + 1);$$

$$y_2 = \frac{1}{2} (4x^2 + 1).$$

Этот интеграл проще всего вычислить так:

$$\int e^{2x}(4x^2+4x+1)\,dx = e^{2x}(ax^2+bx+c).$$

Теперь следует продифференцировать обе части этого равенства, сократить на e^{2x} и сравнить коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях равенства. Получится, что

$$e^{2x}(4x^2+4x+1) = e^{2x}(2ax^2+2bx+2c+2ax+b).$$

Отсюда $2a=4;\quad 2b+2a=4;\quad 2c+b=1;$

$$a=2;\ b=0;\ c=\frac{1}{2}.$$

Итак, общее решение y_0 уравнения (B) запишется так:

$$y_0 = C_1e^{-2x} + C_2\frac{1}{2}(4x^2+1)$$

(в последующем множитель $\frac{1}{2}$ во втором слагаемом мы включим в состав произвольной постоянной C_2).

Чтобы воспользоваться формулой (20,13) для определения частного решения заданного неоднородного уравнения (A), определим вронскиан:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-2x} & \frac{1}{2}(4x^2+1) \\ -2e^{-2x} & 4x \end{vmatrix} = e^{-2x}(2x+1)^2.$$

Так как правая часть уравнения (A) $f(x) = 2e^x(2x+1)^2$, выражения для интегралов, входящих в (20,13), будут такими:

$$\int\frac{y_1f(x)}{W}\,dx = \int\frac{e^{-2x}2e^x(2x+1)^2}{e^{-2x}(2x+1)^2}\,dx = 2e^x;$$

$$\int\frac{y_2f(x)}{W}\,dx = \int\frac{\frac{1}{2}(4x^2+1)\,2e^x(2x+1)^2}{e^{-2x}(2x+1)^2}\,dx = \int e^{3x}(4x^2+1)\,dx =$$

$$= e^{3x}\left(\frac{4}{3}x^2 - \frac{8}{9}x + \frac{17}{27}\right).$$

(Последний интеграл вычислен способом, указанным выше).

Найденные значения интегралов и частные решения y_1 и y_2 уравнения (B) подставим в (20,13), получим частное решение Y заданного неоднородного уравнения:

$$Y = \begin{vmatrix} 2e^x & e^{3x}\left(\frac{4}{3}x^2 - \frac{8}{9}x + \frac{17}{27}\right) \\ e^{-2x} & \frac{1}{2}(4x^2+1) \end{vmatrix} = \frac{2}{27}(36x^2+12x+5)e^x.$$

Учитывая общее решение (B) однородного уравнения, соответствующего уравнению (A), и прибавляя к нему только что найденное частное решение заданного неоднородного уравнения, получим общее решение заданного уравнения:

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 (4x^2 + 1) + \frac{2}{27}(36x^2 + 12x + 5) e^x.$$

Задача 20,3 (для самостоятельного решения). Найти общее решение неоднородных линейных уравнений, зная одно частное решение соответствующего однородного уравнения:

1) $x^2y'' - xy' + y = 3x^3$; $y_1 = x$;
2) $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^5 \ln x$; $y_1 = x^2$;
3) $x^2y'' - 2y = x^2$; $y_1 = \frac{1}{x}$.

Ответ. 1) $y = C_1 x + C_2 x \ln|x| + \frac{3}{4} x^3$;

2) $y = C_1 x^2 + C_2 x + \frac{x^5}{12} \ln|x| - \frac{7}{144} x^5$;

3) $y = C_1 \frac{1}{x} + C_2 x^2 + \frac{1}{3} x^2 \ln|x|$.

МЕТОД НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТНОГО РЕШЕНИЯ НЕОДНОРОДНОГО ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Сведения из теории

Пусть в уравнении (20,1) коэффициентами являются не функции, а вещественные числа, а его правая часть $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = e^{\alpha x}[P(x) \cos \beta x + Q(x) \sin \beta x], \qquad (20,14)$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены, которые могут быть одной и той же степени, и разных степеней. Если они разной степени, то пусть n — их наивысшая степень (при $n = 0$ эти многочлены попросту постоянные величины).

Величины α и β — вещественные числа.

В рассматриваемом случае метод вариации произвольных постоянных для определения частного решения неоднородного уравнения, конечно, также применим. Однако здесь можно отыскать частное решение более простым способом, пользуясь которым не понадобится вычислять интегралы. Интегрирование уравнения можно провести с помощью только алгебраических операций при помощи метода, который называется методом неопределенных коэффициентов.

Если правая часть имеет вид (20,14), то следует рассмотреть два возможных случая:

1. Число $\alpha + \beta i$ не является корнем характеристического уравнения соответствующего однородного уравнения.

В этом случае частное решение неоднородного уравнения ищется в виде

$$Y = e^{\alpha x}[p(x)\cos\beta x + q(x)\sin\beta x], \qquad (20,15)$$

где $p(x)$ и $q(x)$ — многочлены одной и той же степени, равной наивысшей степени многочленов $P(x)$ и $Q(x)$. Коэффициенты многочленов $p(x)$ и $q(x)$ — числа, подлежащие определению. В (20,15) только эти коэффициенты и подлежат определению, числа же α и β — те же, что и в (20,14).

2. Если число $\alpha + \beta i$ является корнем кратности k ($k \geqslant 1$) характеристического уравнения соответствующего однородного уравнения, то частное решение неоднородного уравнения ищется в виде

$$Y = x^k[p(x)\cos\beta x + q(x)\sin\beta x], \qquad (20,16)$$

здесь $p(x)$ и $q(x)$ — многочлены, степень которых равна наивысшей степени многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ в (20,14), а коэффициенты многочленов $p(x)$ и $q(x)$ подлежат определению; показатель степени k равен кратности корня $\alpha + \beta i$ характеристического уравнения. Таким образом, и в этом случае определению подлежат только коэффициенты многочленов $p(x)$ и $q(x)$, все же остальные числа α, β и k — известны.

Неопределенные коэффициенты многочленов $p(x)$ и $q(x)$ как в том, так и в другом случае находятся так:

В заданное уравнение подставляется Y и сравниваются коэффициенты при одинаковых степенях независимой переменной в левой и правой частях равенства. Ниже на примерах мы укажем, как это выполняется практически.

Заметим, что рассматриваемый вид неоднородных линейных уравнений (коэффициенты постоянны, а правая часть имеет вид (20,14)) встречается очень часто, а техника их интегрирования исключительно проста. Мы рассмотрим различные возможные случаи сначала для линейных неоднородных уравнений второго порядка, а потом и порядка выше, чем второй.

Задача 20,4. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 7y' + 12y = 5. \qquad (A)$$

Решение. Уравнение линейное неоднородное. Прежде всего отбрасываем правую часть и решаем соответствующее однородное уравнение

$$y'' - 7y' + 12y = 0. \qquad (B)$$

Характеристическое уравнение

$$k^2 - 7k + 12 = 0$$

имеет корни:

$$k_1 = 3;\ k_2 = 4. \qquad (C)$$

Частные решения уравнения (B):

$$y_1 = e^{3x};\ y_2 = e^{4x}.$$

Общее решение однородного уравнения

$$y_0 = C_1e^{3x} + C_2e^{4x}. \qquad (D)$$

Теперь рассмотрим правую часть уравнения (A) и сравним ее с (20,14). Так как правая часть не содержит множителя $e^{\alpha x}$, то надо считать, что $\alpha = 0$ ($e^{\alpha x} = e^{0\cdot x} = e^0 = 1$).

Правая часть не содержит также ни синуса, ни косинуса. Это значит, что $\beta = 0$ ($\sin 0\cdot x = \sin 0 = 0$; $\cos 0\cdot x = \cos 0 = 1$). Число 5 в правой части надо рассматривать как многочлен нулевой степени.

Составляем число $\alpha + \beta i$, чтобы решить вопрос, является ли оно корнем характеристического уравнения. Так как у нас $\alpha = \beta = 0$, то $\alpha + \beta i = 0$. Из рассмотрения корней (C) характеристического уравнения видно, что 0 не является корнем характеристического уравнения. Значит, имеет место первый случай и частное решение надо искать в виде (20,15), в котором положить $\alpha = 0$, $\beta = 0$, а многочлены $p(x)$ и $q(x)$ — нулевой степени.

Таким образом, частное решение будем искать в виде

$$Y = A\ (A - \text{const}). \qquad (E)$$

Подставляя (E) в заданное уравнение (A), получим

$$\begin{array}{c|l} 12 & Y = A \\ (-7) & Y' = 0 \\ 1 & Y'' = 0 \end{array} \qquad (F)$$

Приравниваем сумму левых частей равенств (F) правой части заданного уравнения (мы вправе это сделать, так как предполагается, что Y — частное решение заданного уравнения. Так мы будем поступать и при решении последующих задач, не делая этой оговорки).

Учитывая это указание и складывая почленно равенства F, получаем

$$5 = 12A,$$

откуда $A = \frac{5}{12}$ и, следовательно, частное решение неоднородного уравнения $Y = \frac{5}{12}$.

Складывая Y с общим решением (D) однородного уравнения, находим общее решение заданного уравнения:

$$y = C_1e^{3x} + C_2e^{4x} + \frac{5}{12}.$$

Задача 20,5 (для самостоятельного решения). Найти общие решения уравнений: 1) $y'' - 6y' + 8y = 10$; 2) $y'' + 4y = 8$.

Ответ. 1) $y = C_1e^{2x} + C_2e^{4x} + \frac{5}{4}$; 2) $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + 2$.

Задача 20,6. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 5y' = 7. \qquad (A)$$

Решение. Соответствующее однородное уравнение имеет вид

$$y'' - 5y' = 0. \qquad (B)$$

Характеристическое уравнение: $k^2 - 5k = 0$.

Его корни: $k_1 = 0$; $k_2 = 5$. Частными решениями уравнения (B) являются: $y_1 = 1$; $y_2 = e^{5x}$. Общее решение этого уравнения:

$$y_0 = C_1 + C_2 e^{5x}. \qquad (C)$$

Сравним теперь правую часть уравнения (A) с (20,14).

Правая часть не содержит ни множителя $e^{\alpha x}$, ни тригонометрических функций. Значит, $\alpha = 0$ и $\beta = 0$. Поэтому число $\gamma + i\beta = 0$, а нуль есть простой (однократный) корень характеристического уравнения. Поэтому частное решение неоднородного уравнения (A) следует искать в виде (20,16), в котором надо взять $k = 1$; $\alpha = 0$; $\beta = 0$, а многочлены $p(x)$ и $q(x)$ должны быть той же степени, что и многочлен в правой части заданного уравнения, т. е. нулевой. Итак, $Y = Ax$.

$$\begin{array}{c|l} 0 & Y = Ax \\ (-5) & Y' = A \\ 1 & Y'' = 0 \end{array}$$

$$7 = -5A; \quad A = -\frac{7}{5}$$

Подставляя это значение A в выражение для Y, получим $Y = -\frac{7}{5}x$. Общее решение уравнения (A) будет суммой общего решения (C) соответствующего однородного уравнения и только что найденного частного решения заданного неоднородного. Тогда

$$y = C_1 + C_2 e^{5x} - \frac{7}{5}x.$$

Задача 20,7 (для самостоятельного решения).

Найти общие решения уравнений:

$$1)\ y'' + 6y' = 8; \quad 2)\ y'' - y' = 3.$$

Ответ. 1) $y = C_1 + C_2 e^{-6x} + \frac{4}{3}x$; 2) $y = C_1 + C_2 e^{x} - 3x$.

Задача 20,8 (для самостоятельного решения).

Найти решение уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - 6x = 2,$$

удовлетворяющее начальным условиям: $x(0) = 1$; $x'(0) = 0$.

Указание. Общее решение имеет вид:

$$x = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-2t} - \frac{1}{3}.$$

Ответ. $x = \frac{8}{15}e^{3t} + \frac{4}{5}e^{-2t} - \frac{1}{3}$.

Задача 20,9. Весомая частица массы m брошена вертикально вверх и при движении испытывает сопротивление, пропорциональное первой степени скорости. Определить закон движения частицы, если в начальный момент $t = 0$ положение точки определяется координатой $x = s_0$, а начальная скорость $v = v_0$.

Решение. На точку действуют две силы: 1) сила тяжести $\bar{P}$, (g — ускорение силы тяжести) и 2) сила сопротивления $\bar{f} = k^2 m\bar{v}$, где через $k^2 m$ обозначен для удобства коэффициент пропорциональности.

Направим ось Ox, по которой происходит движение, вертикально вниз.

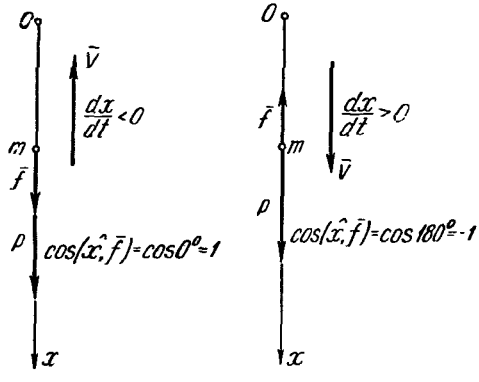
Уравнение движения будет таким:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = P\cos(\widehat{x, \bar{P}}) + f\cos(\widehat{x, \bar{f}}), \qquad (20{,}17)$$

где P и f — соответственно модули силы тяжести и силы сопротивления.

Следует учесть, что сила сопротивления направлена всегда противоположно направлению движения, а скорость — в сторону движения. Модуль силы сопротивления

$$f = \pm k^2 m\frac{dx}{dt}. \qquad (A)$$



К задаче 20,9

При движении частицы *вверх* проекция скорости отрицательна, т. е. $\frac{dx}{dt}<0$, а модуль вектора всегда положителен. Поэтому в (A) при движении вверх надо взять знак минус. В этом случае угол между силой сопротивления $\bar{f}$ и осью Ox равен 0°, вследствие чего $\cos(\widehat{x, \bar{f}}) = 1$, а произведение $f\cos(\widehat{x, \bar{f}}) = -k^2 m\frac{dx}{dt}$.

При движении частицы *вниз* проекция скорости $\frac{dx}{dt} > 0$. Для того, чтобы модуль силы $\bar{f}$ был величиной положительной, надо в (A) взять знак плюс. В этом случае угол между силой сопротивления $\bar{f}$ и осью Ox равен 180°, а потому $\cos(\widehat{x, \bar{f}}) = -1$, а произведение $f\cos(\widehat{x, \bar{f}})$ по-прежнему равно $-k^2 m\frac{dx}{dt}$. Учитывая, что сила тяжести направлена вертикально вниз, ее модуль

$P = mg$, угол между силой тяжести и осью Ox равен 0°, а $\cos(\widehat{x, P}) = 1$, уравнение движения запишем так:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - k^2 m\frac{dx}{dt}.$$

Сокращаем на m и переписываем уравнение в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2\frac{dx}{dt} = g. \qquad (B)$$

Мы получили линейное неоднородное уравнение (искомая функция —x, независимая переменная —t, правая часть равна g).

Отбрасываем правую часть и находим общее решение соответствующего однородного уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2\frac{dx}{dt} = 0. \qquad (C)$$

Его характеристическое уравнение: $r^2 + k^2 r = 0$, $r(r + k^2) = 0$.

(Конечно, буквой k здесь нельзя обозначать неизвестное характеристического уравнения, так как эта буква уже занята. Неизвестное характеристического уравнения мы обозначили буквой r).

Корни характеристического уравнения:

$$r_1 = 0;\ r_2 = -k^2. \qquad (D)$$

Частные решения уравнения (B):

$$x_1 = 1;\ x_2 = e^{-k^2 t}.$$

Его общее решение

$$x_0 = C_1 + C_2 e^{-k^2 t}. \qquad (E)$$

Теперь определим частное решение неоднородного уравнения (B). Сравнивая его правую часть с выражением (20,14), приходим к выводу, что $\alpha = \beta = 0$, поэтому число $\alpha + \beta i = 0$. Среди корней (D) характеристического уравнения нуль есть. Значит, число $\alpha + \beta i$ — корень характеристического уравнения простой (или однократный). В выражении (20,16) число $k = 1$. Так как g — величина постоянная, многочлен нулевой степени, то и в (20,16) надо $p(x)$ и $q(x)$ считать многочленами нулевой степени и, следовательно, учитывая, что $k = 1$, искать частное решение неоднородного уравнения в виде $X = At$:

$$\begin{array}{c|l} 0 & X = At \\ k^2 & X' = A \\ 1 & X'' = 0 \\ \hline & g = Ak^2;\ A = \frac{g}{k^2} \end{array}$$

Поэтому $X = \frac{g}{k^2}t$, а общее решение уравнения (B) будет равно сумме общего решения (E) уравнения (C) и только что найденного частного решения неоднородного уравнения

$$x = C_1 + C_2 e^{-k^2 t} + \frac{g}{k^2}t. \qquad (F)$$

Теперь нам осталось из начальных условий определить произвольные постоянные C_1 и C_2. Подставляя $t = 0$ и $x = s_0$, получим

$$s_0 = C_1 + C_2. \qquad (G)$$

Продифференцируем обе части (F)

$$\frac{dx}{dt} = -k^2 C_2 e^{-k^2 t} + \frac{g}{k^2}.$$

и поставим $t = 0$, а $\frac{dx}{dt} = v_0$:

$$v_0 = -k^2 C_2 + \frac{g}{k^2}.$$

Отсюда

$$C_2 = \frac{1}{k^2}\left(\frac{g}{k^2} - v_0\right).$$

Подставляя это значение в (G), найдем

$$C_1 = s_0 - \frac{1}{k^2}\left(\frac{g}{k^2} - v_0\right).$$

Найденные значения C_1 и C_2 подставим в (F) и получим окончательно решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$x = s_0 - \frac{1}{k^2}\left(\frac{g}{k^2} - v_0\right) + \frac{1}{k^2}\left(\frac{g}{k^2} - v_0\right)e^{-k^2 t} + \frac{g}{k^2}t,$$

или

$$x = s_0 + \frac{g}{k^2}t + \frac{1}{k^2}\left(\frac{g}{k^2} - v_0\right)(e^{-k^2 t} - 1).$$

Из полученного результата можно сделать интересный вывод: если бы время t неограниченно возрастало, то $e^{-k^2 t} \to 0$, и тогда

$$x = s_0 + \frac{g}{k^2}t + \frac{v_0}{k^2} - \frac{g}{k^4};\ x = \left(s_0 + \frac{v_0}{k^2} - \frac{g}{k^4}\right) + \frac{g}{k^2}t,$$

т. е. движение асимптотически приближается к равномерному со скоростью $\frac{dx}{dt} = \frac{g}{k^2}$.

Положение точки при очень большом t мало отличалось бы от того, которое бы она занимала, двигаясь равномерно со скоростью $\frac{g}{k^2}$, выйдя из начального положения, абсцисса которого равна $s_0 + \frac{v_0}{k^2} - \frac{g}{k^4}$.

Задача 20,10. Найти общее решение уравнения

$$y'' + y' + y = 3e^{2x}. \qquad (A)$$

Решение. Отбрасываем правую часть $3e^{2x}$ и будем искать общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$y'' + y' + y = 0. \qquad (B)$$

Его характеристическое уравнение

$$k^2 + k + 1 = 0$$

имеет корни

$$k_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i. \qquad (C)$$

Частные решения уравнения (B):

$$y_1 = e^{-\frac{1}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x; \quad y_2 = e^{-\frac{1}{2}x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x,$$

а его общее решение

$$y_0 = e^{-\frac{1}{2}x} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right). \qquad (D)$$

Теперь отыщем частное решение неоднородного уравнения (A). Сравнивая его правую часть с (20,14), заключаем, что $\alpha = 2$; $\beta = 0$, многочлен $P(x)$ имеет нулевую степень (множитель при e^{2x} — величина постоянная). Число $\alpha + \beta i = 2$ и не является корнем характеристического уравнения (среди корней (C) число 2 отсутствует). Частное решение следует искать в виде (20,15), полагая в нем $\alpha = 2$; $\beta = 0$; многочлены $p(x)$ и $q(x)$ надо взять нулевой степени. Таким образом, $Y = Ae^{2x}$:

$$\begin{array}{l|l} 1 & Y = Ae^{2x} \\ 1 & Y' = 2Ae^{2x} \\ 1 & Y'' = 4Ae^{2x} \end{array}$$

$$3e^{2x} = e^{2x}(A + 2A + 4A); \quad 3 = 7A; \quad A = \frac{3}{7}$$

и, значит $Y = \frac{3}{7} e^{2x}$. Общее решение заданного уравнения будет суммой этого частного решения неоднородного уравнения и общего решения (D) соответствующего однородного:

$$y = e^{-\frac{1}{2}x} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right) + \frac{3}{7} e^{2x}.$$

Задача 20,11 (для самостоятельного решения).
Найти общие решения уравнений:

1) $y'' + 2y' - 3y = 4e^{-x}$; 2) $\frac{d^2x}{dt^2} - 5\frac{dx}{dt} + 4x = 7e^{3t}$.

Ответ. 1) $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-3x} - e^{-x}$; 2) $x = C_1 e^{t} + C_2 e^{4t} - \frac{7}{2} e^{3t}$.

Задача 20,12. Найти общее решение уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 6\frac{dx}{dt} + 8x = 3e^{2t}. \qquad (A)$$

Решение. Находим общее решение соответствующего однородного уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 6\frac{dx}{dt} + 8x = 0. \qquad (B)$$

Корни его характеристического уравнения $k^2 - 6k + 8 = 0$ равны: $k_1 = 2$; $k_2 = 4$. Частные решения: $x_1 = e^{2t}$; $x_2 = e^{4t}$. Его общее решение

$$x_0 = C_1e^{2t} + C_2e^{4t}. \qquad (C)$$

Теперь приступим к отысканию частного решения неоднородного уравнения (A).

Сравнивая его правую часть с выражением (20,14), заключаем, что $\alpha = 2$; $\beta = 0$. Число $\alpha + \beta i = 2$. Но 2 есть простой корень характеристического уравнения. Поэтому частное решение неоднородного уравнения (A) ищем в виде (20,16), в котором $k = 1$, а независимую переменную x надо заменить на t, многочлены же $p(x)$ и $q(x)$ взять нулевой степени, т. е. такой же, как и многочлен, стоящий множителем при e^{2t} в правой части заданного уравнения. Таким образом, ищем частное решение уравнения (A) в виде $X = Ate^{2t}$ (члены, содержащие t уничтожились)

$$\begin{array}{r|l} 8 & X = Ate^{2t} \\ -6 & X' = e^{2t}(A + 2At) \\ 1 & X'' = e^{2t}(4A + 4At) \\ \hline & 3e^{2t} = e^{2t}(8At - 6A - 12At + 4A + 4At). \end{array}$$

Сокращая на e^{2t}, получим уравнение для определения неизвестного коэффициента A:

$$3 = -2A; \quad A = -\frac{3}{2},$$

и поэтому частное решение неоднородного уравнения

$$X = -\frac{3}{2}te^{2t},$$

а его общее решение будет суммой этого частного решения и общего решения (C) соответствующего однородного уравнения:

$$x = C_1e^{2t} + C_2e^{4t} - \frac{3}{2}te^{2t},$$

или

$$x = \left(C_1 - \frac{3}{2}t\right)e^{2t} + C_2e^{4t}.$$

Задача 20,13 (для самостоятельного решения).
Найти общие решения уравнений:

$$1)\ y''-7y'+12y=5e^{3x};\quad 2)\ y''-4y'=2e^{4t}.$$

Ответ. 1) $y=C_1e^{3x}+C_2e^{4x}-5xe^{3x}$;

$$2)\ y=C_1+C_2e^{4t}+\frac{1}{2}te^{4t}.$$

Задача 20,14. Найти общее решение уравнения

$$\frac{d^2r}{d\varphi^2}-6\frac{dr}{d\varphi}+9r=4e^{3\varphi}. \qquad (A)$$

Решение. Заданное уравнение — неоднородное линейное. Искомая функция — r, независимая переменная — φ. Однородное уравнение, соответствующее ему:

$$\frac{d^2r}{d\varphi^2}-6\frac{dr}{d\varphi}+9r=0. \qquad (B)$$

Характеристическое уравнение $k^2-6k+9=0$ имеет корни:

$$k_1=3;\quad k_2=3. \qquad (C)$$

Частные решения уравнения (B):

$$r_1=e^{3\varphi};\quad r_2=\varphi e^{3\varphi}. \qquad (D)$$

Общее решение уравнения (B)

$$r_0=C_1e^{3\varphi}+C_2\varphi e^{3\varphi}. \qquad (E)$$

Теперь отыщем частное решение неоднородного уравнения (A). Сравнивая его правую часть с (20,14), замечаем, что $\alpha=3$; $\beta=0$. Число $\alpha+\beta i=3$.

Среди корней (C) характеристического уравнения оно встречается дважды. (В таком случае говорят, что 3 — двукратный корень характеристического уравнения). Частное решение следует искать в виде (20,16), в котором надо взять $k=2$. Учитывая, что правая часть уравнения (A) имеет постоянный множитель, т. е. многочлен нулевой степени, надо и в (20,15) многочлены $p(\varphi)$ и $q(\varphi)$ взять нулевой степени.

Таким образом, частное решение надо искать в виде

$$R=\varphi^2Ae^{3\varphi}$$

(в формуле (20,16) мы заменили независимую переменную x независимой φ):

$$\begin{array}{r|l} 9 & R=\varphi^2Ae^{3\varphi} \\ -6 & R'=Ae^{3\varphi}(2\varphi+3\varphi^2) \\ 1 & R''=Ae^{3\varphi}(12\varphi+9\varphi^2+2) \\ \hline \multicolumn{2}{l}{4e^{3\varphi}=2Ae^{3\varphi};\quad 2A=4;\quad A=2} \end{array}$$

$$R=2\varphi^2e^{3\varphi}$$

Складывая это решение с общим решением (E) однородного уравнения, получим общее решение заданного уравнения:

$$r = C_1 e^{3\varphi} + C_2 \varphi e^{3\varphi} + 2\varphi^2 e^{3\varphi},$$

или

$$r = e^{3\varphi}(C_1 + C_2\varphi + 2\varphi^2).$$

Задача 20,15 (для самостоятельного решения).
Найти общие решения уравнений:

1) $y'' + 4y' + 4y = 5e^{-2\varphi}$; 2) $y'' - 2y' + y = 3e^t$.

Ответ.

1) $y = e^{-2\varphi}\left(C_1 + C_2\varphi + \frac{5}{2}\varphi^2\right)$; 2) $y = e^t\left(C_1 + C_2 t + \frac{3}{2}t^2\right)$.

Задача 20,16. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 8y' + 7y = 3x^2 + 7x + 8. \qquad (A)$$

Решение. Находим общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y'' - 8y' + 7y = 0. \qquad (B)$$

Характеристическое уравнение $k^2 - 8k + 7 = 0$ имеет корни:

$$k_1 = 1; \quad k_2 = 7. \qquad (C)$$

Частные решения уравнения (B):

$$y_1 = e^x; \quad y_2 = e^{7x}.$$

Его общее решение

$$y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{7x}. \qquad (D)$$

Переходим к определению частного решения неоднородного уравнения (A). В его правой части отсутствуют множитель $e^{\alpha x}$ и тригонометрические функции. Поэтому $\alpha = 0$; $\beta = 0$. Число $\alpha + \beta i = 0$, а нуль не является корнем характеристического уравнения (см. (C)). Частное решение следует искать в виде (20,15), причем многочлены $p(x)$ и $q(x)$ должны иметь вторую степень. (Очевидно многочлен $q(x)$ не будет участвовать, так как $\beta = 0$, а при многочлене $q(x)$ множитель $\sin \beta x = 0$. Частное решение ищем в виде $Y = Ax^2 + Bx + C$:

$$\begin{array}{r|l} 7 & Y = Ax^2 + Bx + C \\ -8 & Y' = 2Ax + B \\ 1 & Y'' = 2A \end{array}$$

$$3x^2 + 7x + 8 = 7Ax^2 + (7B - 16A)x + (2A - 8B + 7C).$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях буквы x в левой и правой частях этого равенства, получаем:

$$7A = 3; \quad A = \frac{3}{7};$$

$$7B - 16A = 7; \quad B = \frac{97}{49};$$

$$2A - 8B + 7C = 8; \quad C = \frac{1126}{343},$$

и, таким образом,

$$Y = \frac{3}{7}x^2 + \frac{97}{49}x + \frac{1126}{343}.$$

Общим решением заданного уравнения будет сумма этого частного решения неоднородного уравнения (A) и общего решения (D) соответствующего однородного уравнения (B):

$$y = C_1e^x + C_2e^{7x} + \frac{3}{7}x^2 + \frac{97}{49}x + \frac{1126}{343}.$$

Задача 20,17 (для самостоятельного решения).
Найти общие решения уравнений:

1) $y'' - y' - 2y = x^3 - 5x^2 + 7x + 2$;

2) $x'' - 3x' - 4x = t^2$.

Ответ. 1) $y = C_1e^{-x} + C_2e^{2x} - \frac{1}{2}x^3 + \frac{13}{4}x^2 - \frac{33}{4}x + \frac{51}{8}$;

2) $x = C_1e^{-t} + C_2e^{4t} - \frac{1}{4}t^2 + \frac{3}{8}t - \frac{13}{32}$.

Задача 20,18. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 2y' = x^3 + 2x - 1. \qquad (A)$$

Решение. Соответствующее однородное уравнение

$$y'' - 2y' = 0. \qquad (B)$$

Его характеристическое уравнение $k^2 - 2k = 0$ имеет корни

$$k_1 = 0; \quad k_2 = 2. \qquad (C)$$

Частные решения уравнения (B):

$$y_1 = 1; \quad y_2 = e^{2x}.$$

Общее решение уравнения (B)

$$y_0 = C_1 + C_2e^{2x}. \qquad (D)$$

Теперь приступим к определению частного решения данного неоднородного уравнения (A). Сравнивая его правую часть с (20,14) и замечая, что в ней отсутствуют множитель $e^{\alpha x}$ и тригонометрические функции, заключаем, что $\alpha = 0$ и $\beta = 0$. Число $\alpha + \beta i = 0$. Но нуль есть среди корней (C) характеристического уравнения. Корень этот простой, однократный. Частное решение будем искать

в виде (20,16), в котором следует взять $k = 1$, а многочлены $p(x)$ и $q(x)$ — той же степени, что и многочлен в правой части уравнения (A), т. е. третьей. Ясно также, что многочлен $q(x)$ будет отсутствовать, так как множитель при нем $\sin \beta x = 0$ $(\beta = 0)$.

Итак, частное решение ищем в виде

$$Y = x(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\ *;$$

$$\begin{array}{r|l} 0 & Y = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx \\ -2 & Y' = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx + D \\ 1 & Y'' = 12Ax^2 + 6Bx + 2C \end{array}$$

$$x^3 + 2x - 1 = -8Ax^3 + (12A - 6B)x^2 + (6B - 4C)x + (2C - 2D).$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях буквы x в левой и правой частях этого равенства, получаем:

$$-8A = 1; \quad A = -\frac{1}{8};$$

$$12A - 6B = 0; \quad B = -\frac{1}{4};$$

$$6B - 4C = 2; \quad C = -\frac{7}{8};$$

$$2C - 2D = -1; \quad D = -\frac{3}{8}.$$

Таким образом, частное решение заданного неоднородного уравнения

$$Y = -\frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{4}x^3 - \frac{7}{8}x^2 - \frac{3}{8}x.$$

Складывая это частное решение уравнения (A) с общим решением (D) соответствующего ему однородного уравнения, получим общее решение заданного уравнения:

$$y = C_1 + C_2e^{2x} - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{4}x^3 - \frac{7}{8}x^2 - \frac{3}{8}x.$$

Задача 20,19 (для самостоятельного решения).

Найти решение уравнения

$$x'' + x' = t^2 + 2t,$$

удовлетворяющее начальным условиям: $x(0) = 4$; $x'(0) = -2$.

Ответ. $x = 2 + 2e^{-t} + \frac{1}{3}t^3$.

Задача 20,20. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 2y' + 4y = (x + 2)e^{3x}. \qquad (A)$$

Решение. Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y'' - 2y' + 4y = 0. \qquad (B)$$

* Такое умножение на x часто называется «усиленем».

Характеристическое уравнение $k^2 - 2k + 4 = 0$ имеет корни:

$$k_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}i. \qquad (C)$$

Частные решения уравнения (B):

$$y_1 = e^x \cos \sqrt{3}x; \quad y_2 = e^x \sin \sqrt{3}x.$$

Его общее решение

$$y_0 = e^x (C_1 \cos \sqrt{3}x + C_2 \sin \sqrt{3}x). \qquad (D)$$

Отыскиваем частное решение неоднородного уравнения (A). Сравнивая его правую часть с (20,14), заключаем, что $\alpha = 3$, $\beta = 0$. Многочлен $P(x)$ имеет первую степень. Число $\alpha + \beta i = 3$. Оно не является корнем характеристического уравнения. Поэтому частное решение ищем в виде (20,15) ($q(x) \sin \beta x = 0$, так как $\beta = 0$):

$$\begin{array}{r|l} 4 & Y = e^{3x}(Ax + B) \\ -2 & Y' = e^{3x}(3Ax + A + 3B) \\ 1 & Y'' = e^{3x}(9Ax + 6A + 9B) \\ \hline & (x+2)\,e^{3x} = e^{3x}(7Ax + 4A + 7B) \end{array}$$

Сокращая на e^{3x} и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим:

$$1 = 7A; \quad A = \frac{1}{7};$$

$$2 = 4A + 7B; \quad B = \frac{10}{49}.$$

Поэтому

$$Y = e^{3x}\left(\frac{1}{7}x + \frac{10}{49}\right).$$

Общее решение уравнения (A) есть сумма этого его частного решения и общего решения (D) соответствующего однородного уравнения:

$$y = e^x (C_1 \cos \sqrt{3}x + C_2 \sin \sqrt{3}x) + e^{3x}\left(\frac{1}{7}x + \frac{10}{49}\right).$$

Задача 20,21 (для самостоятельного решения).
Найти общие решения уравнений:

1) $\frac{d^2x}{dt^2} - 6\frac{dx}{dt} + 13x = e^t(t^2 - 5t + 2)$;

2) $\frac{d^2r}{d\theta^2} + 5\frac{dr}{d\theta} - 14r = e^{2\theta}(2\theta^3 - 3\theta - 1)$.

Указания. 1) Частное решение X неоднородного уравнения следует искать в виде

$$X = e^t(At^2 + Bt + C),$$

коэффициенты A, B и C определятся из равенства

$$t^2 - 5t + 2 = 8At^2 + (8B - 8A)\,t + (2A - 4B + 8C).$$

2) Частное решение R неоднородного уравнения следует искать в виде

$$R = \theta e^{2\theta}\,(A\theta^3 + B\theta^2 + C\theta + D).$$

Это удобно переписать так:

$$R = e^{2\theta}\,(A\theta^4 + B\theta^3 + C\theta^2 + D\theta),$$

коэффициенты A, B, C и D определятся из равенства
$2\theta^3 - 3\theta - 1 = 36A\theta^3 + (12A + 27B)\,\theta^2 + (18C + 6B)\,\theta + (9D + 2C)$.

Ответ. 1) $x = e^{3t}\,(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t) + e^t\left(\frac{1}{8}t^2 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{32}\right)$;

2) $r = C_1 e^{2\theta} + C_2 e^{-7\theta} + e^{2\theta}\left(\frac{1}{18}\theta^4 - \frac{2}{81}\theta^3 - \frac{77}{486}\theta^2 - \frac{166}{2187}\theta\right)$.

Задача 20,22. Найти общее решение уравнения

$$y'' + y = 5 \sin 2x. \qquad (A)$$

Решение. Рассмотрим соответствующее однородное уравнение

$$y'' + y = 0. \qquad (B)$$

Характеристическое уравнение $k^2 + 1 = 0$ имеет корни

$$k_{1,\,2} = \pm i. \qquad (C)$$

Частные решения уравнения (B): $y_1 = \cos x$; $y_2 = \sin x$.
Общее решение уравнения (B)

$$y_0 = C_1 \cos x + C_2 \sin x. \qquad (D)$$

Теперь обратимся к определению частного решения неоднородного уравнения. Сравнивая правую часть уравнения (A) с (20,14), заключаем, что $\alpha = 0$; $\beta = 2$. Число $\alpha + \beta i = 2i$ не является корнем характеристического уравнения. Решение будем отыскивать в форме (20.15). В правой части постоянный множитель 5 при $\sin 2x$ должен рассматриваться как многочлен нулевой степени. Поэтому в (20,15) вместо многочленов $p(x)$ и $q(x)$ надо взять постоянные величины, которые следует определить.

Учитывая это, а также то, что $\alpha = 0$, $\beta = 2$, частное решение будем искать в виде

$$Y = A \cos 2x + B \sin 2x. \qquad (E)$$

1	$Y = A \cos 2x + B \sin 2x$
0	$Y' = 2B \cos 2x - 2A \sin 2x$
1	$Y'' = -4A \cos 2x - 4B \sin 2x$
	$5 \sin 2x = (-4A + A) \cos 2x + (B - 4B) \sin 2x$

Так как левая часть не содержит $\cos 2x$, то в правой части коэффициент при $\cos 2x$ должен быть равен нулю, т. е. $-4A + A = 0$; коэффициенты при $\sin 2x$ должны быть равны между собой, т. е. $B - 4B = 5$. Значит, $A = 0$; $B = -\frac{5}{3}$.

Поэтому частное решение (E) равно

$$Y = -\frac{5}{3}\sin 2x.$$

Общее решение уравнения (A) будет суммой только что найденного частного решения заданного неоднородного уравнения и общего решения (D) соответствующего однородного уравнения:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{5}{3}\sin 2x.$$

Задача 20,23 (для самостоятельного решения).
Найти общее решение уравнения

$$y'' - 7y' + 6y = \sin x.$$

Частное решение неоднородного уравнения следует искать в виде

$$Y = A\cos x + B\sin x.$$

Ответ. $y = C_1 e^x + C_2 e^{6x} + \frac{7}{74}\cos x + \frac{5}{74}\sin x.$

Задача 20,24 (для самостоятельного решения).
Найти общие решения уравнений:
1) $y'' + 2y' + 5y = 4\sin x + 22\cos x$;
2) $y'' - 4y' + 29y = 44\sin 3x + 28\cos 3x$.

Указание. В первом примере частное решение неоднородного уравнения искать в виде $Y = A\cos x + B\sin x$.

Ответ. 1) $y = e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) + 3\sin x + 4\cos x$;
2) $y = e^{2x}(C_1\cos 5x + C_2\sin 5x) + \sin 3x + 2\cos 3x$.

Задача 20,25. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 2y' + 10y = x\cos 2x. \qquad (A)$$

Решение. Соответствующее однородное уравнение

$$y'' - 2y' + 10y = 0. \qquad (B)$$

Его характеристическое уравнение

$$k^2 - 2k + 10 = 0$$

имеет корни:

$$k_{1,2} = 1 \pm 3i. \qquad (C)$$

Частные решения уравнения (B):

$$y_1 = e^x\cos 3x; \quad y_2 = e^x\sin 3x.$$

Общее решение уравнения (B):

$$y_0 = e^x(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x). \qquad (D)$$

Приступаем к отысканию частного решения неоднородного уравнения (A). Сравнивая правую часть этого уравнения с (20,14), заключаем, что $\alpha = 0$; $\beta = 2$; число $\alpha + \beta i = 2i$ не является корнем характеристического уравнения (среди корней (C) число $2i$ отсутствует). Решение будем искать в виде (20,15). Нам осталось решить вопрос о степени многочленов $p(x)$ и $q(x)$ в (20,15). Следует помнить, что эти многочлены должны иметь одну и ту же степень, причем степень эта должна быть равна наибольшей степени многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ в (20,14).

В нашем случае многочлен $P(x)$, стоящий множителем перед $\cos 2x$ в правой части уравнения (A), имеет первую степень, многочлен $Q(x)$ равен нулю. Поэтому многочлены $p(x)$ и $q(x)$ в (20,14) должны иметь первую степень. Учитывая все это ($\alpha = 0$, $\beta = 2$; степень многочленов $p(x)$ и $q(x)$ — первая), частное решение следует искать в виде

$$Y = (Ax + B)\cos 2x + (Cx + D)\sin 2x;$$

$$\begin{array}{r|l}
10 & Y = (Ax + B)\cos 2x + (Cx + D)\sin 2x \\
-2 & Y' = (2Cx + A + 2D)\cos 2x + (-2Ax - 2B + C)\sin 2x \\
1 & Y'' = (-4Ax - 4B + 4C)\cos 2x + (-4Cx - 4A - 4D)\sin 2x \\
\hline
x\cos 2x = & (6Ax - 4Cx - 2A + 6B + 4C - 4D)\cos 2x + (4Ax + \\
& + 6Cx - 4A + 4B - 2C + 6D)\sin 2x
\end{array}$$

Перепишем правую часть этого равенства так, чтобы ясно были видны коэффициенты при x и свободные члены многочленов:

$$x\cos 2x = [(6A - 4C)x - 2A + 6B + 4C - 4D]\cos 2x + [(4A + 6C)x - 4A + 4B - 2C + 6D]\sin 2x. \qquad (E)$$

Сравниваем коэффициенты при $\cos 2x$ и $\sin 2x$ в левой и правой частях этого равенства, получаем:

$$\begin{array}{l|l}
\text{при } \cos 2x & x = (6A - 4C)x - 2A + 6B + 4C - 4D; \\
\text{при } \sin 2x & 0 = (4A + 6C)x - 4A + 4B - 2C + 6D
\end{array} \qquad (\Gamma)$$

(в последнем равенстве в левой части стоит нуль, так как в левой части равенства (E) $\sin 2x$ отсутствует). Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях буквы x в левой и правой частях равенств (Γ), находим:

$$\left.\begin{array}{l} 6A - 4C = 1 \\ 4A + 6C = 0 \end{array}\right\} \qquad (I)$$

и

$$\left.\begin{array}{l} -2A + 6B + 4C - 4D = 0 \\ -4A + 4B - 2C + 6D = 0 \end{array}\right\} \qquad (II)$$

Из системы (I) следует, что $A = \frac{3}{26}$; $C = -\frac{1}{13}$.

Подставляя в систему (II) значения A и C для определения B и D, получим систему

$$\left.\begin{aligned} 6B - 4D &= \frac{7}{13} \\ 2B + 3D &= \frac{2}{13} \end{aligned}\right\},$$

из которой следует, что $B = \frac{29}{338}$; $D = -\frac{1}{169}$.

Таким образом, искомое частное решение будет таким:

$$Y = \left(\frac{3}{26}x + \frac{29}{338}\right)\cos 2x + \left(-\frac{1}{13}x - \frac{1}{169}\right)\sin 2x.$$

Общее решение заданного уравнения получим, складывая это частное решение с общим решением (D) соответствующего однородного уравнения:

$$y = e^x (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + \left(\frac{3}{26}x + \frac{29}{338}\right)\cos 2x + \\ + \left(-\frac{1}{13}x - \frac{1}{169}\right)\sin 2x.$$

Задача 20,26 (для самостоятельного решения).
Найти общее решение уравнения

$$y'' - 4y' + 5y = (4x + 22)\sin 3x - (28x + 84)\cos 3x.$$

Ответ.

$$y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + (2x + 6)\sin 3x + (x + 5)\cos 3x.$$

Задача 20,27. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 4y = 3\sin 2x. \qquad (A)$$

Решение. Отбрасываем правую часть и решаем соответствующее однородное уравнение

$$y'' + 4y = 0. \qquad (B)$$

Корнями характеристического уравнения $k^2 + 4 = 0$ являются числа

$$k_{1,2} = \pm 2i. \qquad (C)$$

Частные решения уравнения (B):

$$y_1 = \cos 2x; \quad y_2 = \sin 2x,$$

а его общее решение

$$y_0 = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x. \qquad (D)$$

Приступаем к определению частного решения заданного неоднородного уравнения (A). Сравнивая его правую часть с (20,14), заключаем, что $\alpha = 0$; $\beta = 2$. Теперь надо определить число $\alpha + \beta i$. Оно равно $2i$. Число $2i$ является простым (однократным) корнем характеристического уравнения ($k = 1$). Частное решение ищем в виде (20,16), в котором следует взять $k = 1$; $\alpha = 0$; $\beta = 2$, степень многочленов $p(x)$ и $q(x)$ равна нулю.

Следовательно, надо взять

$$\begin{array}{c|l} 4 & Y = x(A\cos 2x + B\sin 2x) \\ 1 & Y'' = 2(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x) + x(-4A\cos 2x - 4B\sin 2x) \end{array}$$

$$3\sin 2x = -4A\sin 2x + 4B\cos 2x$$

Учитывая, что в левой части этого равенства $\cos 2x$ отсутствует (а, следовательно, коэффициент при нем равен нулю), заключаем:

$$-4A = 3;$$

$$4B = 0.$$

Отсюда $A = -\frac{3}{4}$; $B = 0$ и поэтому $Y = -\frac{3}{4}x\cos 2x$.

Общее решение:

$$y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x - \frac{3}{4}x\cos 2x.$$

Задача 20,28 (для самостоятельного решения).
Найти общее решение уравнения

$$y'' + y = x\cos x.$$

Указание. Частное решение следует искать в виде

$$Y = x[(Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x].$$

После подстановки в заданное уравнение окажется, что $A=0$; $B = \frac{1}{4}$; $C = \frac{1}{4}$; $D = 0$.

Ответ. $y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{4}x\cos x + \frac{1}{4}x^2\sin x$.

Задача 20,29 (для самостоятельного решения).
Найти общее решение уравнения

$$y'' + 9y = 18\cos 3x - 30\sin 3x.$$

Указание. Частное решение искать в виде

$$Y = x(A\cos 3x + B\sin 3x).$$

Ответ. $y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x + x(5\cos 3x + 3\sin 3x)$.

Задача 20,30. Найти закон движения точки, на которую действуют две силы: 1) сила притяжения к неподвижному центру, пропорциональная расстоянию точки от этого центра $P = -k^2mx$ (см. задачу 19,8), и 2) периодическая сила, определяемая формулой $F = Am\cos pt$.

Решение. Дифференциальное уравнение движения будет таким:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2mx + Am\cos pt.$$

Сократим уравнение на m и запишем его в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = A\cos pt. \qquad (A)$$

Уравнение — линейное неоднородное.

Рассмотреть следует два случая: 1) $p \neq k$; 2) $p = k$.

Уравнение (A) часто встречается в механике. Оно называется уравнением вынужденных колебаний при отсутствии сил сопротивления. Сила $F = Am\cos pt$ называется возмущающей.

Первый случай $(k \neq p)$. Отбросим в уравнении (A) правую часть и найдем общее решение уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0 \qquad (B)$$

(уравнение свободных гармонических колебаний). Характеристическое уравнение $r^2 + k^2 = 0$ имеет корни:

$$r_{1,2} = \pm ki. \qquad (C)$$

Общее его решение:

$$x_0 = C_1\cos kt + C_2\sin kt. \qquad (D)$$

Частное решение неоднородного уравнения (A) в случае, когда $p \neq k$, следует искать в виде (20,15) $(\alpha = 0;\ \beta = p;\ \alpha + \beta i = pi$ не является корнем характеристического уравнения):

$$\begin{array}{r|l} k^2 & X = B\cos pt + C\sin pt \\ 1 & X'' = -Bp^2\cos pt - Cp^2\sin pt \\ \hline A\cos pt = (Bk^2 - Bp^2)\cos pt + (Ck^2 - Cp^2)\sin pt & \end{array}$$

Сравнивая коэффициенты при $\cos pt$ и $\sin pt$, получаем уравнения для определения неизвестных коэффициентов B и C:

$$\left.\begin{array}{l} Bk^2 - Bp^2 = A \\ Ck^2 - Cp^2 = 0 \end{array}\right\}.$$

Поэтому

$$B = \frac{A}{k^2 - p^2};\quad C = 0;\quad X = \frac{A}{k^2 - p^2}\cos pt$$

(так как $p \neq k$, то $k^2 - p^2 \neq 0$).

Общее решение уравнения (A) в этом случае будет таким:

$$x = C_1\cos kt + C_2\sin kt + \frac{A}{k^2 - p^2}\cos pt. \qquad (E)$$

Второй случай $(p = k)$. В этом случае по-прежнему $\alpha = 0$; $\beta = p$, но так как $p = k$, то $\beta = k$, а число $\alpha + \beta i = ki$ является корнем характеристического уравнения (см. (C)), поэтому частное решение надо искать в виде (20,16) (только не упустить из вида, что независимую переменную x надо заменить на t). Правая часть заданного уравнения теперь равна $A\cos kt$ (p заменено буквой k).

Итак, частное решение в этом случае:

$$\begin{array}{c|l} k^2 & X = t\,(C\cos kt + D\sin kt) \\ 1 & X'' = 2\,(-Ck\sin kt + Dk\cos kt) + \\ & \quad + t\,(-Ck^2\cos kt - Dk^2\sin kt) \\ \hline & A\cos kt = -2Ck\sin kt + 2Dk\cos kt \end{array}$$

Сравнивая коэффициенты при $\cos kt$ и $\sin kt$ в левой и правой частях этого равенства, получаем

$$D = \frac{A}{2k}; \quad C = 0;$$

частное решение неоднородного уравнения $X = t\frac{A\sin kt}{2k}$, а потому общее решение уравнения вынужденных колебаний (A) при $p = k$ (это уравнение полезно запомнить) запишется так:

$$x = C_1\cos kt + C_2\sin kt + t\frac{A\sin kt}{2k}.$$

Рассмотренный второй случай представляет особый интерес. Наличие множителя t в последнем слагаемом указывает на то, что с возрастанием времени t абсцисса x точки (т. е. ее размахи) неограниченно увеличивается и может достигнуть сколь угодно большой величины. Это явление называется резонансом. Оно наступает тогда, когда частота возмущающей силы равна частоте свободных колебаний точки ($p = k$). Следует обратить внимание на то, что при отсутствии возмущающей силы движение описывалось бы уравнением (B), а закон движения — уравнением (D) и точка совершала бы свободные гармонические колебания (см. задачу 19,6, п. 9). Уже рассмотрение решения (E) показывает, что, когда частоты свободных и вынужденных колебаний (числа p и k) мало отличаются одна от другой, знаменатель $k^2 - p^2$ в последнем слагаемом мал, а само оно становится большим.

Из сказанного ясно, что при проектировании сооружений, судов, машин, фундаментов и т. д. надо всячески избегать явления резонанса, т. е. не допускать совпадения частот собственных колебаний с частотой накладывающейся возмущающей силы. Устранение этого явления может быть достигнуто увеличением разности между этими частотами.

Задача 20,31. Найти общее решение уравнения

$$y'' + y = (3x + 2)\sin 2x + (x^2 + x + 2)\cos 2x.$$

Решение. Соответствующее однородное уравнение

$$y'' + y = 0.$$

Его характеристическое уравнение $k^2 + 1 = 0$ имеет корни:

$$k_{1,2} = \pm i.$$

Частные решения уравнения:

$$y_1 = \cos x; \quad y_2 = \sin x,$$

а его общее решение

$$y_0 = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Приступая к определению частного решения заданного уравнения, сравним его правую часть с (20,14). Замечаем, что $\alpha = 0$ (множитель $e^{\alpha x}$ отсутствует в правой части), $\beta = 2$; число $\alpha + \beta i = 2i$ не является корнем характеристического уравнения.

Частное решение надо поэтому искать в форме (20,15). Нам осталось решить вопрос о степени многочленов $p(x)$ и $q(x)$ в (20,15). Так как многочлены при $\sin 2x$ и $\cos 2x$ в правой части заданного уравнения различны, то степень многочленов $p(x)$ и $q(x)$ должна быть равна наибольшей из них, т. е. второй, и частное решение должно иметь вид:

$$\begin{array}{|l|l} 1 & Y = (Ax^2 + Bx + C)\cos 2x + (Dx^2 + Ex + F)\sin 2x \\ 1 & Y'' = (-4Ax^2 - 4Bx + 8Dx + 2A - 4C + 4E)\cos 2x + (-4Dx^2 - \\ & \qquad - 4Ex - 8Ax - 4B + 2D - 4F)\sin 2x \end{array}$$

$$(3x + 2)\sin 2x + (x^2 + x + 2)\cos 2x = (-3Ax^2 - 3Bx + 8Dx + 2A - \\ - 3C + 4E)\cos 2x + (-3Dx^2 - 3Ex - 8Ax - 4B + 2D - 3F)\sin 2x$$

Сравнивая коэффициенты при $\sin 2x$ и $\cos 2x$ в левой и правой частях последнего равенства, получаем:

$$-3Dx^2 + (-3E - 8A)x + (-4B + 2D - 3F) = 3x + 2;$$

$$-3Ax^2 + (-3B + 8D)x + (2A - 3C + 4E) = x^2 + x + 2.$$

Сравнивая коэффициенты при равных степенях, получаем:

$$\text{при } x^2 \left| \begin{array}{l} -3D = 0; \quad D = 0 \\ -3A = 1; \quad A = -\frac{1}{3} \end{array} \right.$$

$$\text{при } x \left| \begin{array}{l} -3E - 8A = 3; \quad -3E + \frac{8}{3} = 3; \quad E = -\frac{1}{9} \\ -3B + 8D = 1; \quad -3B = 1; \quad B = -\frac{1}{3} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l}\text{свободный} \\ \text{член}\end{array} \left| \begin{array}{l} -4B + 2D - 3F = 2; \quad \frac{4}{3} - 3F = 2; \quad F = -\frac{2}{9} \\ 2A - 3C + 4E = 2; \quad -\frac{2}{3} - 3C - \frac{4}{9} = 2; \quad C = -\frac{28}{27} \end{array} \right.$$

Значит,

$$Y = \left(-\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{28}{27}\right)\cos 2x + \left(-\frac{1}{9}x - \frac{2}{9}\right)\sin 2x,$$

а общее решение заданного уравнения:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \left(-\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{28}{27}\right)\cos 2x + \\ + \left(-\frac{1}{9}x - \frac{2}{9}\right)\sin 2x.$$

Теперь учитывая, что учащийся приобрел уже прочные навыки в отыскании частного решения неоднородного линейного уравнения по виду его правой части, мы предлагаем для самостоятельного решения несколько дифференциальных неоднородных уравнений, порядок которых выше второго.

Задача 20,32 (для самостоятельного решения).

Найти решения уравнений, удовлетворяющие начальным условиям: 1) $\frac{d^3x}{dt^3} + \frac{dx}{dt} = e^{2t}$; $x(0) = 0$; $x'(0) = 0$; $x''(0) = 0$;

2) $\frac{d^4x}{dt^4} + \frac{d^3x}{dt^3} = \cos t$; $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$; $x'''(0) = 5$;

3) $x^{(4)} + 4x = t^2$; $x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0$;

4) $\frac{d^4r}{d\varphi^4} + 2a^2\frac{d^2r}{d\varphi^2} + a^4r = \cos\varphi$; $r(0) = r'(0) = 1$; $r''(0) = 1 - 2a^2$; $r'''(0) = -2a^2$.

Указания. В третьем примере характеристическое уравнение $k^4 + 4 = 0$ может быть переписано так: $k^4 + 4k^2 + 4 - 4k^2 = 0$, или $(k^2 + 2)^2 - (2k)^2 = 0$; $(k^2 - 2k + 2)(k^2 + 2k + 2) = 0$. Его корни: $k_{1,2} = 1 \pm i$; $k_{3,4} = -1 \pm i$. Частное решение неоднородного уравнения $X = \frac{1}{4}t^2$.

В четвертом примере характеристическое уравнение $k^4 + 2a^2k^2 + a^4 = 0$; $(k^2 + a^2)^2 = 0$ имеет кратные корни: $k_1 = ai$; $k_2 = -ai$; $k_3 = ai$; $k_4 = -ai$. Частные решения соответствующего однородного уравнения: $r_1 = \cos a\varphi$; $r_2 = \sin a\varphi$; $r_3 = \varphi\cos a\varphi$; $r_4 = \varphi\sin a\varphi$. Частное решение неоднородного уравнения $R = A\cos\varphi + B\cos\varphi$

Ответ. 1) $x = -\frac{1}{2} + \frac{2}{5}\cos t - \frac{1}{5}\sin t + \frac{1}{10}e^{2t}$;

2) $x = \frac{5}{2}t^2 - 4t + 4 - \frac{9}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}\sin t$;

3) $x = \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{8}e^t\sin t + \frac{1}{8}e^{-t}\sin t$;

4) $r = \left[1 - \frac{1}{(a^2+1)^2}\right]\cos a\varphi + \frac{1}{2a}\sin a\varphi + \frac{\varphi}{2}\cos a\varphi - \frac{a^3\varphi}{2(a^2+1)}\sin a\varphi + \frac{1}{(a^2-1)^2}\cos\varphi$.

Задача 20,33 (для самостоятельного решения).
Решить уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4y = \sin\frac{3}{2}x \sin\frac{1}{2}x$$

при начальных условиях $y(0) = 1$; $y'(0) = 0$.

Указания. Заменить произведение синусов в правой части разностью косинусов:

$$\sin\frac{3}{2}x \sin\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}(\cos x - \cos 2x).$$

Рассмотреть два неоднородных уравнения:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4y = \frac{1}{2}\cos x; \quad \frac{d^2y}{dx^2} - 4y = -\frac{1}{2}\cos 2x$$

и отыскать для каждого из них частные решения: для первого в виде

$$Y_1 = A\cos x + B\sin x,$$

для второго

$$Y_2 = A_1\cos 2x + B_1\sin 2x.$$

После определения коэффициентов A, B, A_1 и B_1 образовать сумму $Y_1 + Y_2$, которая и будет частным решением заданного уравнения.

Ответ. $y = \frac{83}{160}e^{2x} + \frac{83}{160}e^{-2x} - \frac{1}{10}\cos x + \frac{1}{16}\cos 2x.$

ДВАДЦАТЬ ПЕРВОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Уравнение Эйлера. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (основные понятия).

I. УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА

Основные сведения из теории

Уравнение Эйлера является линейным дифференциальным уравнением, которое имеет вид

$$(ax+b)^n y^{(n)} + a_1(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)} + a_2(ax+b)^{n-2}y^{(n-2)} + \\ + \cdots + a_{n-1}(ax+b)y' + a_n y = f(x), \qquad (21,1)$$

где все a_i $(i = 1, 2, \ldots)$, а также a и b — вещественные числа, а правая часть $f(x)$ — функция независимой переменной x, и по этой переменной вычислены все производные в (21,1).

В частном случае, когда $a = 1$, $b = 0$, уравнение (21,1) принимает вид

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1}y^{(n-1)} + a_2 x^{n-2}y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1}xy' + \\ + a_n y = f(x). \qquad (21,2)$$