Часть IV
Практические занятия по кратным и криволинейным интегралам

ПЕРВОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Двойные интегралы. Вычисление площадей при помощи двойного интеграла.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

1. Двойной интеграл в прямоугольных координатах

В прямоугольных координатах дифференциал площади

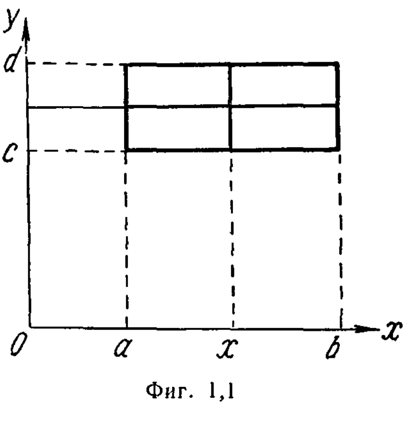
$$d\sigma = dx\,dy,$$

а двойной интеграл

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x, y)\,d\sigma = \iint\limits_{(\sigma)} f(x, y)\,dx\,dy. \qquad (1,1)$$

а) Двойной интеграл по прямоугольнику

Если область (σ), на которую распространяется двойной интеграл (1,1), — прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям и определяемыми уравнениями $x = a$; $x = b$ $(a \leqslant x \leqslant b)$; $y = c$; $y = d\,(c \leqslant y \leqslant d)$ (фиг. 1,1), то двойной интеграл вычисляется по одной из формул:



Фиг. 1,1

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x, y)\,dx \qquad (1,2)$$

или

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x, y)\,dy. \qquad (1,3)$$

Интегралы, стоящие в правых частях этих формул, называются *повторными*, или *двукратными*.

В формуле (1,2) интеграл $\int\limits_a^b f(x, y)\,dx$ называется внутренним. Он вычисляется в предположении, что переменная y сохраняет на отрезке $[a, b]$ зафиксированное постоянное значение. При таком предположении подынтегральная функция $f(x, y)$ является функцией только одной переменной x. В результате вычисления этого интеграла получится функция переменной y.

После того, как эта функция определена, надо выполнить внешнее интегрирование — проинтегрировать полученную функцию по переменной y. В результате этого вторичного интегрирования получится уже не функция, а число.

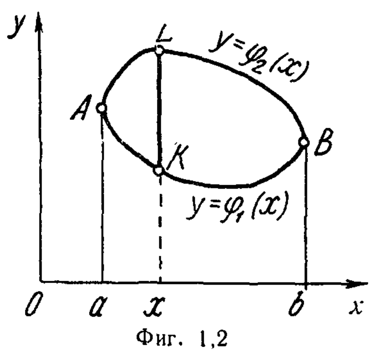
Таким образом, при вычислении двойного интеграла по формуле (1,2) первое (внутреннее) интегрирование ведется по переменной x при постоянном y, а второе интегрирование — по переменной y.

Если же для вычисления двойного интеграла применяется формула (1,3), то порядок интегрирования меняется: первое (внутреннее) интегрирование ведется по переменной y в предположении, что переменная x на отрезке $[c, d]$ сохраняет постоянное зафиксированное значение, а повторное (внешнее) интегрирование — по переменной x. В результате вычисления внутреннего интеграла $\int\limits_c^d f(x, y)\,dy$ получится функция переменной x, а повторное интегрирование даст число.

б) Двойной интеграл по произвольной плоской фигуре

1. Если область интегрирования (σ) ограничена кривой, которую каждая прямая, параллельная оси Oy, пересекает не более чем в двух точках (фиг. 1,2), то двойной интеграл, распространенный на эту область, вычисляется по формуле

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy. \tag{1,4}$$



Фиг. 1,2

Интеграл в правой части этой формулы также называется *повторным*, или *двукратным*.

Внутренний интеграл в этой формуле отличается от внутреннего интеграла в формуле (1,3) тем, что здесь пределы интегрирования не постоянные величины c и d, а функции переменной x. При вычислении внутреннего интеграла в подынтегральной функции $f(x, y)$ надо x рассматривать как величину постоянную.

Пределы интегрирования в повторном интеграле в правой части формулы (1,4) находятся так.

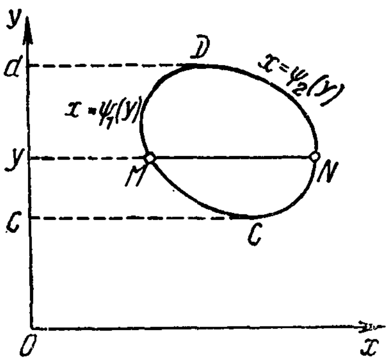
1. Область (σ) проектируется на ось Ox. Этим определится отрезок $[a, b]$, на котором в области (σ) изменяется переменная x: $a \leqslant x \leqslant b$. Числа a и b ($a < b$) будут соответственно нижним и верхним пределами во внешнем интеграле. Тем самым пределы интегрирования по x определены.

Чтобы найти пределы интегрирования по y во внутреннем интеграле, пометим на контуре (L), ограничивающем область (σ), точки A и B с абсциссами a и b. Эти две точки разделят контур (L) на нижнюю и верхнюю части, уравнения которых следует разрешить относительно переменной y.

Пусть эти части определяются соответственно уравнениями $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$, причем, предполагается, что функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ на отрезке $[a, b]$ непрерывны, однозначны и сохраняют аналитическое выражение. Зафиксируем на отрезке $[a, b]$ оси Ox любую точку x, проведем через нее прямую, параллельную оси Oy, и рассмотрим ее отрезок KL, содержащийся в области (σ). Теперь очевидно, что переменная y изменяется в области (σ) от ее значения $\varphi_1(x)$ на нижней части контура (L) до ее значения $\varphi_2(x)$ на его верхней части: $\varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)$.

Таким образом, нижний и верхний пределы при интегрировании по y во внутреннем интеграле соответственно равны $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$. После вычисления внутреннего интеграла получится функция переменной x.

Подчеркнем особо, что во внутреннем интеграле при интегрировании по y пределы интегрирования в общем случае есть функции переменной x, т. е. той переменной, по которой вычисляется внешний интеграл и которая при вычислении внутреннего интеграла считалась постоянной.



Фиг 1,3

2. Если область (σ) ограничена кривой, которую любая прямая, параллельная оси Ox, пересекает не более чем в двух точках (фиг. 1,3), то двойной интеграл, распространенный на эту область, может быть вычислен по формуле

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x, y)\,dx\,dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\,dx. \qquad (1,5)$$

Здесь также пределы во внутреннем интеграле — не числа, как в формуле (1, 2), а функции переменной y.

Чтобы найти пределы во внешнем интеграле, область (σ) проектируется на ось Oy. Так определяется отрезок $[c, d]$, на котором в области (σ) изменяется переменная y: $c \leqslant y \leqslant d$. Числа c и d и будут соответственно нижним и верхним пределами во внешнем интеграле. Внутренний интеграл вычисляется по переменной x.

В подынтегральной функции $f(x, y)$ надо y рассматривать как величину постоянную. Чтобы определить пределы изменения переменной x в области (σ), пометим на контуре (L) точки C и D с ординатами c и d. Эти две точки разделят контур (L) на левую и правую части, *уравнения которых следует разрешить относительно переменной x*.

Пусть этими уравнениями будут соответственно $x = \psi_1(y)$ и $x = \psi_2(y)$, причем предполагается, что функции $\psi_1(y)$ и $\psi_2(y)$ на отрезке $[c, d]$ непрерывны, однозначны и сохраняют аналитическое выражение. Зафиксируем на отрезке $[c, d]$ оси Oy любую точку y, проведем через нее прямую, параллельную оси Ox, и рассмотрим ее отрезок MN, содержащийся в области (σ).

Переменная x будет изменяться в области (σ) от ее значения $\psi_1(y)$ на левой части контура (L) до ее значения $\psi_2(y)$ на его правой части: $\psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y)$.

Таким образом, верхний и нижний пределы во внутреннем интеграле соответственно равны $\psi_1(y)$ и $\psi_2(y)$. Подчеркнем, что здесь во внутреннем интеграле при интегрировании по x пределы интегрирования в общем случае есть функции переменной y, т. е. той переменной, по которой вычисляется внешний интеграл и которая при вычислении внутреннего интеграла остается постоянной. После вычисления внутреннего интеграла получится функция переменной y. Следует обратить внимание на то, что во внешнем интеграле в обоих случаях пределы интегрирования — величины постоянные и в результате вычисления двойного интеграла должна получиться постоянная величина.

Вычисление повторного интеграла следует начинать с вычисления внутреннего интеграла.

Если функция $f(x, y)$ непрерывна в области (σ), то значение повторного интеграла, распространенного на эту область, не зависит от порядка интегрирования по различным аргументам.

Перед решением задач рекомендуется повторить уравнения поверхностей второго порядка. Особое внимание следует обратить на уравнение сферы, параболоида, конуса и цилиндрических поверхностей с образующими, параллельными координатным осям.

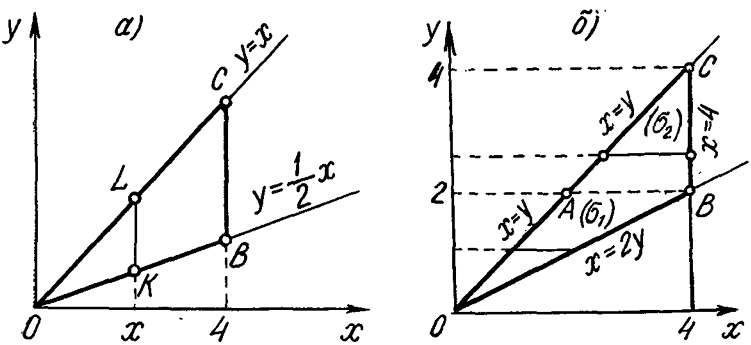
Свойства определенных интегралов распространяются и на двойные интегралы. В формуле (1,4) и (1,5) для вычисления двойного интеграла предполагалось, что кривая, ограничивающая область интегрирования (σ), пересекается всякой прямой, параллельной одной из координатных осей, не больше чем в двух точках. Если это условие не выполнено, то область (σ) следует разбить на части так, чтобы в каждой из частей это условие выполнялось.

Вычисление двойного интеграла последовательными однократными интегрированиями. Изменение порядка интегрирования

Задача 1,1. Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_{(\sigma)} (x^3 + y^3)\, dx\, dy,$$

если область (σ) ограничена линиями $y = \frac{1}{2}x$; $y = x$; $x = 4$. Этот же интеграл вычислить, изменив порядок интегрирования.



К задаче 1,1

Решение. Прежде всего следует представить на чертеже область (σ). Контур этой области пересекается всякой прямой, параллельной оси Oy в двух точках. Воспользуемся сперва формулой (1,4)

$$\iint\limits_{(\sigma)} (x^3 + y^3)\, dx\, dy = \int\limits_0^4 dx \int\limits_{\frac{1}{2}x}^{x} (x^3 + y^3)\, dy.$$

Здесь в повторном интеграле внутреннее интегрирование производится по переменной y, а внешнее — по x.

Пределы интегрирования в повторном интеграле получены так: область (σ) была спроектирована на ось Ox. Получился отрезок $[0; 4]$. Этим были определены нижний предел 0 и верхний предел 4 изменения переменной x во внешнем интеграле. Затем на отрезке $[0; 4]$ оси Ox была выбрана произвольная точка x, через которую проведена прямая, параллельная оси Oy, и на ней рассмотрен отрезок KL, содержащийся в области (σ).

Область (σ) ограничена снизу прямой $y=\frac{1}{2}x$, сверху — прямой $y=x$. Переменная y изменяется в области (σ) от ее значения $\frac{1}{2}x$ на нижней части контура OBC до ее значения x на верхней части этого контура. (Уравнения линий, ограничивающих область (σ), должны быть разрешены относительно той переменной, по которой вычисляется внутренний интеграл).

Вычисления следует начинать с внутреннего интеграла

$$\int\limits_{\frac{1}{2}x}^{x}(x^3+y^3)\,dy,$$

в котором величина x должна рассматриваться как постоянная.

$$\int\limits_{\frac{1}{2}x}^{x}(x^3+y^3)\,dy=x^3y+\frac{y^4}{4}\Bigg|_{\frac{1}{2}x}^{x}=x^3\left(x-\frac{1}{2}x\right)+$$

$$+\frac{1}{4}\left(x^4-\frac{1}{16}x^4\right)=\frac{47}{64}x^4.$$

Заметьте, что получилась функция переменной x, как это и следовало ожидать, на основании пояснений на стр. 6.

Вычисляем теперь внешний интеграл:

$$\int\limits_{0}^{4}\frac{47}{64}x^4dx=\frac{47}{64}\cdot\frac{x^5}{5}\Bigg|_{0}^{4}=\frac{47}{64}\cdot\frac{4^5}{5}=\frac{752}{5}.$$

Вычислим теперь тот же двойной интеграл, изменив порядок интегрирования: внутреннее интегрирование будем производить по переменной x, а внешнее — по переменной y.

Из чертежа видно, что левая часть контура области (σ) — одна линия, а именно $y=x$, а его правая часть состоит из двух линий OB и BC, определяемых разными уравнениями: $(OB)\ y=\frac{1}{2}x$; $(BC)\ x=4$. В этом случае область (σ) следует разбить на части так, чтобы каждая из них справа ограничивалась тоже одной линией, иначе говоря, линией, определяемой одним аналитическим выражением. Такими частями будут (σ_1) — OAB и (σ_2) — ABC. Область (σ) является суммой областей (σ_1) и (σ_2).

Интеграл представляется как сумма интегралов

$$\iint\limits_{(\sigma)}(x^3+y^3)\,dx\,dy=\iint\limits_{(\sigma_1)}(x^3+y^3)\,dx\,dy+\iint\limits_{(\sigma_2)}(x^3+y^3)\,dx\,dy.$$

Так как теперь внутренние интегралы будут вычисляться по переменной x, то уравнения линий, ограничивающих каждую из областей (σ_1) и (σ_2), должны быть решены относительно этой переменной. Решая уравнения линий, ограничивающих области (σ_1) и (σ_2) относительно переменной x, получим, что область (σ_1) ограничена линиями: 1) $x=y$; 2) $x=2y$; 3) $y=2$. Точка B имеет координаты (4,2). Область (σ_2) ограничена линиями:

$$1)\ y=2;\quad 2)\ x=y;\quad 3)\ x=4.$$

Спроектировав каждую из областей интегрирования (σ_1) и (σ_2) на ось Oy, получим пределы внешних интегралов: в первом интеграле — 0 и 2, во втором интеграле 2 и 4. Выбрав на отрезке [0; 2] произвольную точку y и проведя через нее прямую, параллельную оси Ox, замечаем, что в области (σ_1) переменная x изменяется от ее значения, равного y на левой части контура (т. е. на OA), до ее значения $2y$ на его правой части (т. е. на OB).

Таким образом, при интегрировании по области (σ_1) во внутреннем интеграле пределами будут y и $2y$. Поэтому

$$I_1=\iint\limits_{(\sigma_1)}(x^3+y^3)\,dx\,dy=\int\limits_0^2 dy\int\limits_y^{2y}(x^3+y^3)\,dx.$$

При вычислении внутреннего интеграла переменная y должна считаться величиной постоянной (а пределы интегрирования есть функции переменной y, т. е. опять-таки той переменной, которая при интегрировании остается величиной постоянной).

Вычисления начинаем с внутреннего интеграла:

$$\int\limits_y^{2y}(x^3+y^3)\,dx=\frac{x^4}{4}+y^3x\Big|_y^{2y}=\frac{1}{4}[(2y)^4-y^4]+$$

$$+y^3(2y-y)=\frac{19}{4}y^4.$$

Следует заметить, что получилась функция переменной y, т. е. той переменной, по которой вычисляется внешний интеграл. Подставляем полученное выражение под знак внешнего интеграла:

$$I_1=\int\limits_0^2\frac{19}{4}y^4\,dy=\frac{19}{4}\cdot\frac{y^5}{5}\Big|_0^2=\frac{152}{5}.$$

Пределы внешнего интеграла при интегрировании по области (σ_2) уже были определены: переменная y в этой области изменяется на отрезке [2; 4], т. е. от 2 до 4. Чтобы определить, в каких пределах в этой области изменяется переменная x, возьмем на отрезке [2; 4] произвольную точку, проведем через нее прямую, параллельную оси Ox, и заметим, что на левой части AC контура области (σ_2) x имеет значение, равное y, а на BC — правой его части $x=4$.

Таким образом, в области (σ_2) пределами интегрирования по x будут y и 4, а

$$I_2 = \iint\limits_{(\sigma_2)} (x^3 + y^3)\, dx\, dy = \int\limits_2^4 dy \int\limits_y^4 (x^3 + y^3)\, dx.$$

Внутренний интеграл (в нем y — величина постоянная!)

$$\int\limits_y^4 (x^3 + y^3)\, dx = \frac{x^4}{4} + y^3 x \Big|_y^4 = \frac{1}{4}(4^4 - y^4) + y^3(4 - y) =$$

$$= 64 + 4y^3 - \frac{5}{4} y^4.$$

Заметьте! Получилась функция переменной y, т. е. той переменной, по которой вычисляется внешний интеграл. Подставляем полученное выражение под знак внешнего интеграла:

$$I_2 = \int\limits_2^4 \left(64 + 4y^3 - \frac{5}{4} y^4\right) dy = 64y + y^4 - \frac{1}{4} y^5 \Big|_2^4 = 120.$$

Искомый интеграл равен сумме

$$I_1 + I_2 = \frac{152}{5} + 120 = \frac{752}{5}.$$

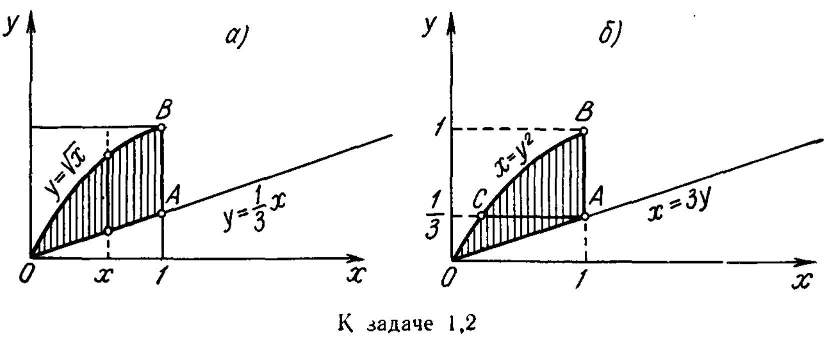
Поскольку подынтегральная функция $x^3 + y^3$ непрерывна, то результаты вычислений, как и следовало ожидать, совпали: они не зависят от порядка интегрирования.

Из этого примера видно, что выбор порядка интегрирования не безразличен. Выбрав рационально порядок интегрирования, можно сократить вычисления.

После столь подробного решения этой задачи предложим несколько задач для самостоятельного решения.

Задача 1,2 (для самостоятельного решения). Вычислить двойной интеграл

$$I = \iint\limits_{(\sigma)} \frac{y^3}{x^2}\, dx\, dy.$$



К задаче 1,2

Область (σ) ограничена линиями: $y = \frac{1}{3}x$; $y = \sqrt{x}$; $x = 1$.

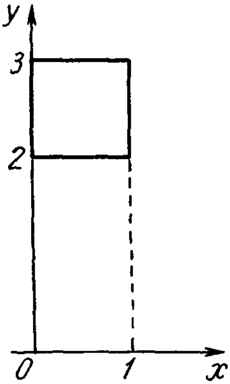
Этот же интеграл вычислить, изменив порядок интегрирования.

Указание. 1) $I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{\frac{1}{3}x}^{\sqrt{x}} \frac{y^3}{x^2}\,dy = \frac{121}{486}$.

Промежуточные вычисления:

$$\int\limits_{\frac{1}{3}x}^{\sqrt{x}} \frac{y^3}{x^2}\,dy = \frac{y^4}{4x^2}\Bigg|_{\frac{1}{3}x}^{\sqrt{x}} = \frac{1}{4} - \frac{1}{324}x^2.$$

2) Если изменить порядок интегрирования и внутренний интеграл вычислить по переменной x, а внешний интеграл — по y, то область интегрирования надо разбить на две: (σ_1) — OCA и (σ_2) — CAB. Это вызвано тем, что правая часть контура OAB, ограничивающего область (σ), состоит из двух линий OA и AB, определяемых разными уравнениями: (OA) $x = 3y$; (AB) $x = 1$ (уравнения линий, ограничивающих контур, должны быть в этом случае решены относительно переменной x, т. е. той переменной, по которой ведется интегрирование):



К задаче 1,3

$$I = \underbrace{\int\limits_0^{\frac{1}{3}} dy \int\limits_{y^2}^{3y} \frac{y^3}{x^2}\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int\limits_{\frac{1}{3}}^{1} dy \int\limits_{y^2}^{1} \frac{y^3}{x^2}\,dx}_{I_2};$$

$$\int\limits_{y^2}^{3y} \frac{y^3}{x^2}\,dy = y - \frac{1}{3}y^2;\quad I_1 = \frac{25}{486};$$

$$\int\limits_{y^2}^{1} \frac{y^3}{x^2}\,dx = y - y^3;\quad I_2 = \frac{16}{81};$$

$$I = I_1 + I_2 = \frac{121}{486}.$$

Задача 1,3 (для самостоятельного решения). Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_{(\sigma)} (6xy^2 - 12x^2y)\,dx\,dy.$$

В повторном интеграле внутренний интеграл вычислить по x, а внешний — по y. Произвести вычисление того же интеграла, изменив порядок интегрирования. Область (σ) — квадрат со сторонами: $x = 0$; $x = 1$; $y = 2$; $y = 3$.

Указание. В первом случае внутренний интеграл

$$\int_0^1 (6xy^2 - 12x^2y)\,dx = 3y^2 - 4y$$

(при интегрировании по переменной x получилась функция переменной y).

Во втором случае внутренний интеграл

$$\int_2^3 (6xy^2 - 12x^2y)\,dy = 38x - 30x^2$$

(при интегрировании по переменной y получилась функция x).

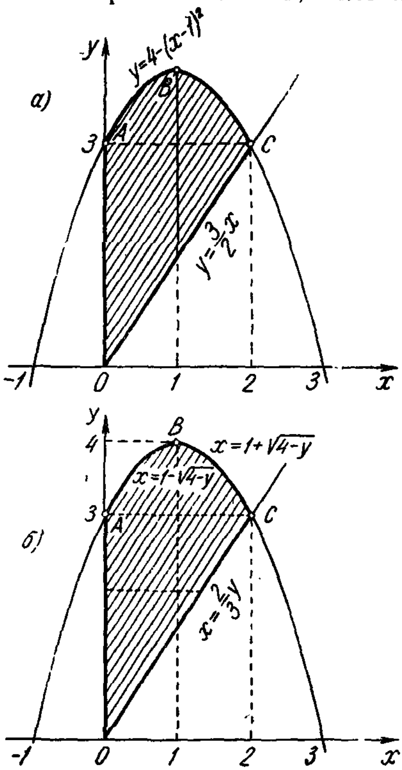
Ответ. 9.

Задача 1,4 (для самостоятельного решения). Вычислить двойной интеграл

$$\iint_{(\sigma)} (x + y)\,dx\,dy.$$

В повторном интеграле внутреннее интегрирование выполнить по y, а внешнее — по x. Этот же интеграл вычислить, изменив порядок интегрирования. Область (σ) ограничена линиями: $x = 0$; $y = \frac{3}{2}x\,(x > 0)$; $y = 4 - (x - 1)^2$.

Указание. При вычислении внутренних интегралов уравнения линий, ограничивающих область (σ), должны быть решены относительно переменной y, т. е. той, по которой вычисляется внешний интеграл. Разрешая уравнение параболы $y = 4 - (x - 1)^2$ относительно x, получаем $x = 1 \pm \sqrt{4 - y}$, причем линия AB определяется уравнением $x = 1 - \sqrt{4 - y}$, а линия BC уравнением $x = 1 + \sqrt{4 - y}$.



К задаче 1,4

Ответ.

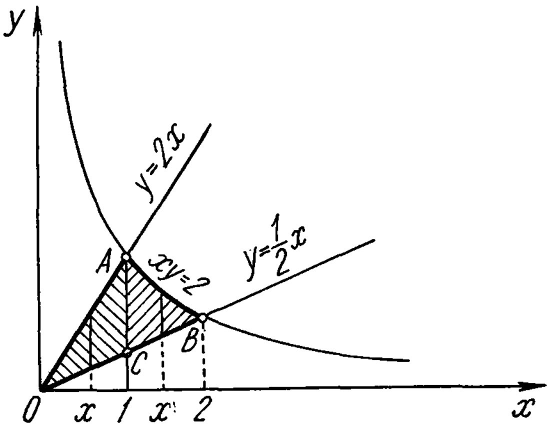
$$I = \int_0^2 dx \int_{\frac{3}{2}x}^{4-(x-1)^2} (x + y)\,dy = \frac{208}{15}.$$

После изменения порядка интегрирования

$$I = \int_0^3 dy \int_0^{\frac{2}{3}y} (x+y)\,dx + \int_3^4 dy \int_{1-\sqrt{4-y}}^{1+\sqrt{4-y}} (x+y)\,dx.$$

Задача 1,5 (для самостоятельного решения). Вычислить двойной интеграл

$$\iint_{(\sigma)} (x^2 + y)\,dx\,dy.$$



К задаче 1,5

В повторном интеграле выполнить внутреннее интегрирование по y, а внешнее — по x. Произвести вычисления, изменив порядок интегрирования. Область (σ) ограничена линиями

$$y = \frac{1}{2}x;\ y = 2x;\ xy = 2\ (x \geqslant 0).$$

Указание. Область (σ) ограничена снизу одной линией $y = \frac{1}{2}x$, а сверху — двумя линиями — OA и AB, имеющими уравнения $y = 2x$ (OA) и $y = \frac{2}{x}$ (AB). Область (σ) следует представить как сумму двух областей OAC и CAB. Определить абсциссы точек пересечения прямых OA и OB с гиперболой. Они равны 1 и 2. Спроектировать каждую из областей на ось Ox.

После изменения порядка интегрирования для определения пределов во внутренних интегралах уравнения линий разрешить относительно переменной x.

Ответ.

$$I=\int_0^1 dx\int_{\frac{1}{2}x}^{2x}(x^2+y)\,dy+\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{2}x}^{\frac{2}{x}}(x^2+y)\,dy=4\frac{1}{3}.$$

После изменения порядка интегрирования

$$I=\int_0^1 dy\int_{\frac{y}{2}}^{2y}(x^2+y)\,dx+\int_1^2 dy\int_{\frac{y}{2}}^{\frac{2}{y}}(x^2+y)\,dx.$$

Три следующие задачи показывают, что изменение порядка интегрирования может повлечь за собой изменение величины двойного интеграла.

Задача 1,6 (для самостоятельного решения). Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_{(\sigma)}\frac{x-y}{(x+y)^3}\,dx\,dy.$$

Показать, что изменение порядка интегрирования приводит к различным результатам, и объяснить причину этого. Область (σ) — квадрат со сторонами: $x=0$; $x=1$; $y=0$; $y=1$.

Ответ.

$$I=\int_0^1 dx\int_0^1\frac{x-y}{(x+y)^3}\,dy=\frac{1}{2};$$

внутренний интеграл

$$\int_0^1\frac{x-y}{(x+y)^3}\,dy=\frac{1}{(1+x)^2}.$$

С другой стороны,

$$I=\int_0^1 dy\int_0^1\frac{x-y}{(x+y)^3}\,dx=-\frac{1}{2};$$

внутренний интеграл

$$\int_0^1\frac{x-y}{(x+y)^3}\,dx=-\frac{1}{(1+y)^2}.$$

Различные результаты вычислений объясняются тем, что в точке $(0,0)$ подынтегральная функция не является непрерывной.

Задача 1,7 (для самостоятельного решения). Вычислить двойной интеграл

$$I = \iint\limits_{(\sigma)} \left(\frac{x^5}{y^4} - \frac{2x^3}{y^3}\right) e^{-\frac{x}{y^2}}\, dx\, dy.$$

Область (σ) — квадрат, ограниченный координатными осями и прямыми $x = 1$ и $y = 1$. В повторном интеграле первый раз внутреннее интегрирование выполнить по x, а потом изменить порядок интегрирования. Объяснить причину различных результатов вычислений.

Ответ.

$$1)\ I = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 \left(\frac{x^5}{y^4} - \frac{2x^3}{y^3}\right) e^{-\frac{x}{y^2}}\, dx = -\frac{1}{e};$$

$$2)\ I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 \left(\frac{x^5}{y^4} - \frac{2x^3}{y^3}\right) e^{-\frac{x}{y^2}}\, dy = -\frac{1}{e} + \frac{1}{2}.$$

Задача 1,8 (для самостоятельного решения). Показать, что двойной интеграл

$$\iint\limits_{(\sigma)} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\, dx\, dy$$

равен $\frac{\pi}{4}$ или $-\frac{\pi}{4}$ в зависимости от порядка интегрирования. Объяснить причину этого. Область (σ) — квадрат, ограниченный линиями $x = 0$; $y = 0$; $x = 1$; $y = 1$.

II. Двойной интеграл в полярных координатах

В полярных координатах дифференциал площади

$$d\sigma = r\, dr\, d\varphi,$$

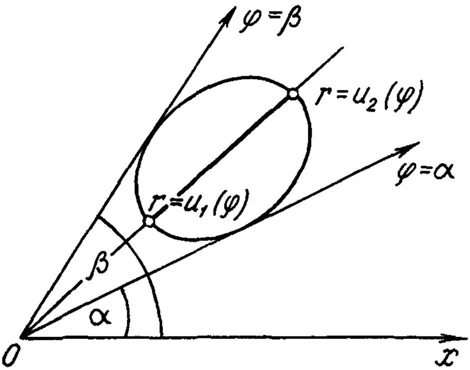
а двойной интеграл

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,\ y)\, d\sigma = \iint\limits_{(\sigma)} f[r\cos\varphi,\ r\sin\varphi]\, r\, dr\, d\varphi.$$

Область (σ) должна быть отнесена к полярной системе координат. Если она ограничена двумя полупрямыми с уравнениями $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ $(\alpha < \beta)$ и линиями, определяемыми уравнениями $r = u_1(\varphi)$ и $r = u_2(\varphi)$, а функции $u_1(\varphi)$ и $u_2(\varphi)$ в промежутке $[\alpha,\ \beta]$ непрерывны, однозначны и сохраняют аналитическое выражение, то двойной интеграл, распространенный на эту область, вычисляется по формуле

$$\iint\limits_{(\sigma)} F(r,\ \varphi)\, r\, dr\, d\varphi = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{u_1(\varphi)}^{u_2(\varphi)} F(r,\ \varphi)\, r\, dr. \qquad (1,6)$$

Интеграл в правой части этой формулы — *повторный интеграл* (иначе *двукратный*). Во внутреннем интеграле φ следует рассматривать как величину постоянную (фиг. 1,4).



Фиг. 1,4

Напомним уравнения окружности в полярной системе координат, с которыми нам часто придется встречаться:

$$r = R; \qquad (1,7)$$

$$r = 2R\cos\varphi; \qquad (1,8)$$

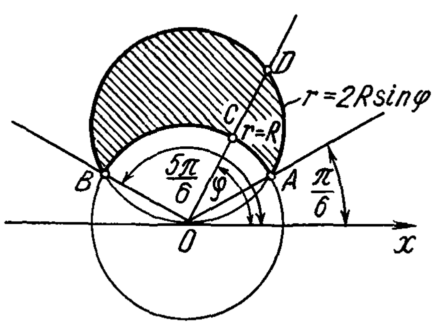
$$r = 2R\sin\varphi. \qquad (1,9')$$

Задача 1,9. Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_{(\sigma)} r^2 \sin\varphi\, dr\, d\varphi,$$

где область (σ) ограничена линиями $r = R$ и $r = 2R\sin\varphi$.

Решение. Чтобы определить, как изменяется в области (σ) полярный угол φ, проведем лучи в точки A и B области (σ).



К задаче 1,9

Решая совместно уравнения линий, ограничивающих область (σ), найдем значения угла φ, соответствующие лучам OA и OB:

$$\left.\begin{array}{l} r = R \\ r = 2R\sin\varphi \end{array}\right\}.$$

Отсюда

$$2R\sin\varphi = R; \quad \sin\varphi = \frac{1}{2};$$

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{6}; \quad \varphi_2 = \frac{5}{6}\pi.$$

Таким образом, угол φ в области (σ) изменяется от $\frac{\pi}{6}$ до $\frac{5}{6}\pi$.

Теперь найдем пределы изменения полярного радиуса в области (σ). Под произвольным углом φ, взятым в промежутке $\left[\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi\right]$, проведем из полюса луч OD. В точке C входа этого луча в область (σ) $r = R$, а в точке D выхода его из области (σ) $r = 2R\sin\varphi$ и полярный радиус r изменяется в области (σ) от R до $2R\sin\varphi$. Поэтому нижний и верхний пределы во внутреннем интеграле равны соответственно r и $2R\sin\varphi$.

По формуле (1,6)

$$\iint\limits_{(\sigma)} r^2 \sin\varphi \, dr \, d\varphi = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} \sin\varphi \, d\varphi \int\limits_{R}^{2R\sin\varphi} r^2 \, dr.$$

(Мы вынесли $\sin\varphi$ за знак внутреннего интеграла, так как при вычислении внутреннего интеграла переменная φ сохраняет постоянное значение).

Внутренний интеграл

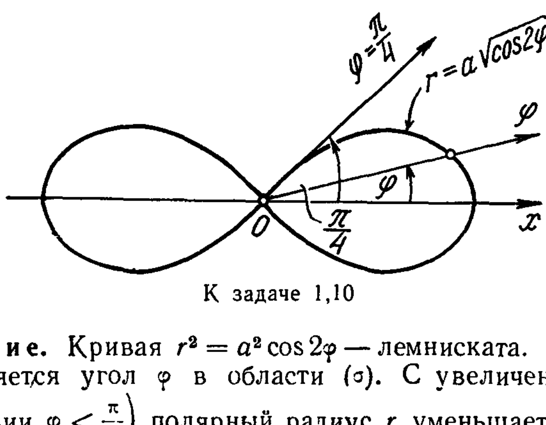
$$\int\limits_{R}^{2R\sin\varphi} r^2 \, dr = \frac{r^3}{3}\Bigg|_{R}^{2R\sin\varphi} = \frac{1}{3}(8R^3\sin^3\varphi - R^3) = \frac{1}{3}R^3(8\sin^3\varphi - 1).$$

Внешний интеграл

$$\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} \frac{1}{3}R^3(8\sin^3\varphi - 1)\sin\varphi \, d\varphi = \frac{1}{3}R^3 \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} (8\sin^4\varphi - \sin\varphi)\, d\varphi =$$

$$= \frac{R^3}{12}(\pi + 3\sqrt{3}).$$

Задача 1,10. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_{(\sigma)} r^3 \, dr \, d\varphi$, где ($\sigma$) — область, ограниченная полярной осью и кривой $r^2 = a^2\cos 2\varphi$ с дополнительным условием: полярный угол $\varphi < \frac{\pi}{2}$.



К задаче 1,10

Решение. Кривая $r^2 = a^2\cos 2\varphi$ — лемниската. Определим, как изменяется угол φ в области (σ). С увеличением угла φ $\left(\text{при условии } \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$ полярный радиус r уменьшается. При не-котором значении φ он станет равным нулю. Найдем это значение φ.

Подставим в уравнение лемнискаты $r=0$ и получим уравнение для определения φ:

$$0=a^2\cos 2\varphi;\quad \cos 2\varphi=0;\quad 2\varphi=\frac{\pi}{2};\quad \varphi=\frac{\pi}{4}.$$

$\left(\text{Учтено условие, что } \varphi<\frac{\pi}{2}\right)$.

Таким образом, в области (σ) полярный угол изменяется от 0 до $\frac{\pi}{4}$.

Чтобы узнать, как изменяется в области (σ) полярный радиус r, проведем луч, пересекающий область (σ) под произвольным углом φ $\left(0<\varphi<\frac{\pi}{4}\right)$. Луч входит в область (σ) в полюсе, т. е. при $r=0$ и выходит из нее в точке A на лемнискате. В этой точке $r=a\sqrt{\cos 2\varphi}$.

Таким образом, переменная r изменяется в области (σ) от $r=0$ до $r=a\sqrt{\cos 2\varphi}$. По формуле (1,6)

$$\iint\limits_{(\sigma)} r^3\,dr\,d\varphi=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} r^3\,dr.$$

Внутренний интеграл

$$\int\limits_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} r^3\,dr=\frac{r^4}{4}\Bigg|_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}}=\frac{1}{4}a^4\cos^2 2\varphi.$$

Внешний интеграл.

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{4}a^4\cos^2 2\varphi\,d\varphi=\frac{1}{4}a^4\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos 4\varphi}{2}\,d\varphi=\frac{1}{8}a^4\left(\varphi+\frac{\sin 4\varphi}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{32}\pi a^4.$$

Дальнейшие упражнения в вычислении двойных интегралов связаны с решением задач геометрии и механики.

III. Вычисление площадей плоских фигур

Площадь плоской фигуры вычисляется по формуле

$$S=\iint\limits_{(\sigma)} d\sigma, \tag{1,10}$$

где $d\sigma$ — дифференциал площади.

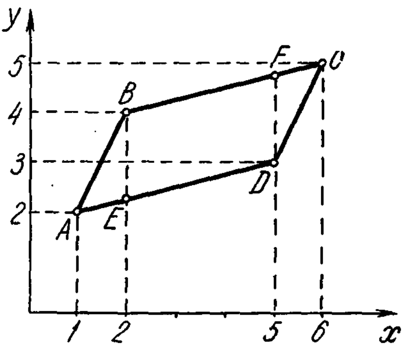
Если фигура отнесена к прямоугольной системе координат, то формула (1,10) перепишется так:

$$S=\iint\limits_{(\sigma)} dx\,dy. \qquad (1,11)$$

Если фигура отнесена к полярной системе координат, то ее площадь вычисляется по формуле

$$S=\iint\limits_{(\sigma)} r\,dr\,d\varphi. \qquad (1,12)$$

Задача 1,11. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $2x-y=0\,(AB)$; $2x-y-7=0\,(DC)$; $x-4y+7=0\,(AD)$; $x-4y+14=0\,(BC)$.



К задаче 1,11

Решение. Фигура — параллелограмм. Его вершины находятся в точках: $A(1,2)$; $B(2,4)$; $D(5,3)$; $C(6,5)$.

Область интегрирования (σ) разобьем на три части: $(\sigma_1)=ABE$; $(\sigma_2)=BEDF$; $(\sigma_3)=DFC$;

$$S=\iint\limits_{(\sigma)} dx\,dy=\iint\limits_{(\sigma_1)} dx\,dy+\iint\limits_{(\sigma_2)} dx\,dy+\iint\limits_{(\sigma_3)} dx\,dy. \qquad (A)$$

Вычислим каждый из этих двойных интегралов.

В области (σ_1) переменная x изменяется на отрезке $[1,2]$. Выбрав внутри этого отрезка произвольную точку с абсциссой x, проведем прямую, параллельную оси Oy. На отрезке этой прямой, находящемся в области (σ_1), переменная y изменяется от ее значения на отрезке AE до ее значения на отрезке AB. Из уравнения стороны AD

$$y=\frac{x+7}{4}. \qquad (B)$$

Из уравнения стороны AB $y=2x$. Поэтому

$$\iint\limits_{(\sigma_1)} dx\,dy=\int\limits_{1}^{2} dx\int\limits_{\frac{x+7}{4}}^{2x} dy=\frac{7}{8}.$$

В области (σ_2) переменная x изменяется на отрезке $[2,5]$. Выберем на нем произвольную точку x, проведем через нее прямую, параллельную оси Oy. На отрезке этой прямой, содержащемся в области (σ_2), переменная y изменяется от ее значения на прямой AD до ее значения на прямой BC.

Уравнение прямой AD уже разрешено относительно y [см. формулу (B)], а из уравнения стороны BC следует, что

$$y = \frac{x+14}{4}. \qquad (C)$$

Поэтому

$$\iint_{(\sigma_2)} dx\,dy = \int_2^5 dx \int_{\frac{x+7}{4}}^{\frac{x+14}{4}} dy = \frac{21}{4}.$$

В области (σ_3) переменная x изменяется на отрезке [5,6], а переменная y — от ее значения на прямой DC до ее значения на прямой BC. Из уравнения DC $y = 2x - 7$, а из уравнения прямой BC $y = \frac{x+14}{4}$ [см. формулу (C)].

Таким образом,

$$\iint_{(\sigma_3)} dx\,dy = \int_5^6 dx \int_{2x-7}^{\frac{x+14}{4}} dy = \frac{7}{8}.$$

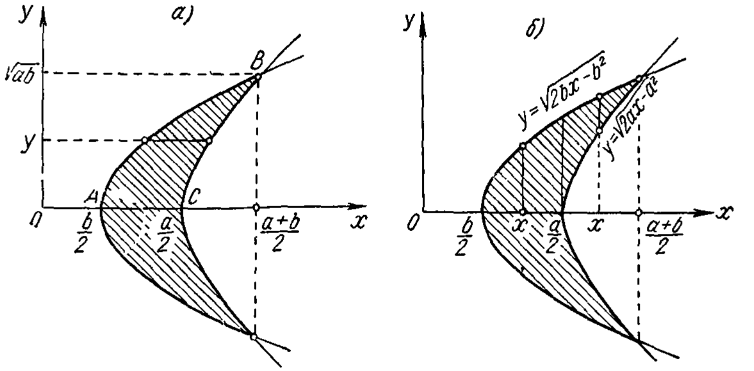
Окончательно из (A) получаем, что

$$S = \frac{7}{8} + \frac{21}{4} + \frac{7}{8}; \qquad S = 7 \text{ кв. ед.}$$

Задача 1,12. Вычислить площадь, ограниченную линиями

$$x = \frac{y^2+b^2}{2b}; \quad x = \frac{y^2+a^2}{2a},$$

a и b — положительны и $a > b$.



К задаче 1,12

Решение. Кривые — параболы. Первое интегрирование выгодно вести по переменной x, а второе — по y. Решая систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{y^2+b^2}{2b} \\ x &= \frac{y^2+a^2}{2a} \end{aligned}\right\},$$

найдем координаты точки пересечения парабол:

$$x = \frac{a+b}{2}; \quad y = \pm\sqrt{ab}.$$

Следует учесть, что искомая площадь равна удвоенной площади фигуры ABC. В области ABC переменная x изменяется от ее значения $x = \frac{y^2+b^2}{2b}$ на параболе AB до значения $x = \frac{y^2+a^2}{2a}$ на параболе CB. Переменная же y изменяется от 0 до $\sqrt{ab}$ — ее значения в точке B.

Таким образом, по формуле (1,11) с учетом, что искомая площадь равна удвоенной площади ABC и что внутренний интеграл вычисляется по переменной x,

$$S = 2\iint\limits_{(\sigma)} dx\,dy = 2\int\limits_0^{\sqrt{ab}} dy \int\limits_{\frac{y^2+b^2}{2b}}^{\frac{y^2+a^2}{2a}} dx = 2\int\limits_0^{\sqrt{ab}} \left(\frac{y^2+a^2}{2a} - \frac{y^2+b^2}{2b}\right) dy =$$

$$= \frac{2}{3}(a-b)\sqrt{ab} \text{ кв. ед.}$$

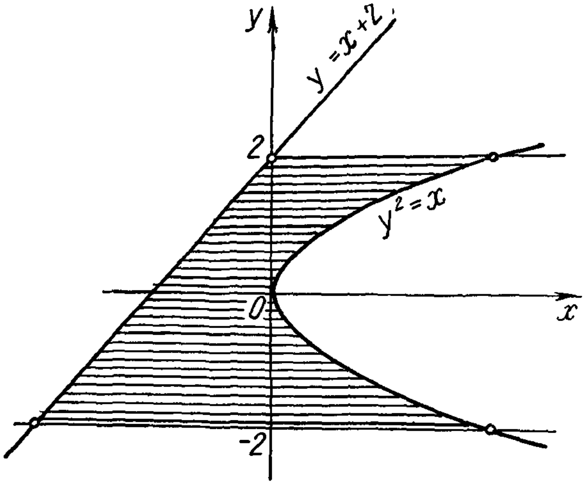
Если изменить порядок интегрирования, вычисляя внутренний интеграл по переменной y, а внешний — по переменной x, то выкладки усложнятся:

$$S = 2\iint\limits_{(\sigma)} dx\,dy = 2\left[\int\limits_{\frac{b}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int\limits_0^{\sqrt{2bx-b^2}} dy + \int\limits_{\frac{a}{2}}^{\frac{a+b}{2}} dx \int\limits_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2bx-b^2}} dy\right]$$

(для определения пределов во внутренних интегралах уравнения кривых разрешены относительно переменной y, т. е. той переменной, по которой ведется интегрирование).

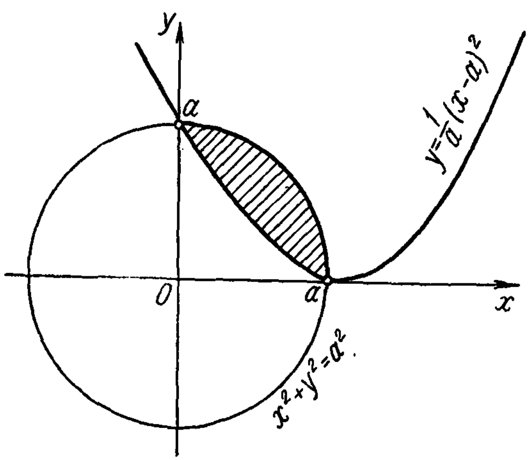
Задача 1,13 (для самостоятельного решения). Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -2$; $y = x + 2$; $y = 2$; $y^2 = x$

Ответ. $\frac{40}{3}$ кв. ед.



К задаче 1,13

Задача 1,14 (для самостоятельного решения). Найти площадь, ограниченную линиями $y = \frac{1}{a}(x - a)^2 \, (a > 0)$; $x^2 + y^2 = a^2$.



К задаче 1,14

Указание.

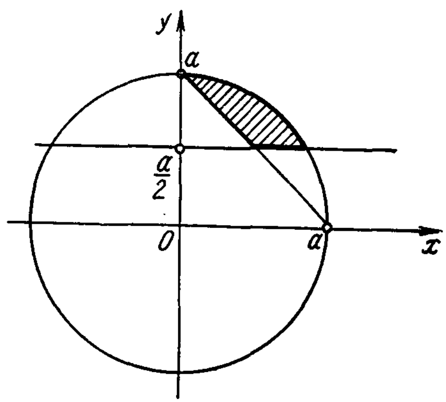
$$S = \iint\limits_{(\sigma)} dx\,dy = \int\limits_0^a dx \int\limits_{\frac{1}{a}(x-a)^2}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy.$$

Ответ. $S = \frac{a^2}{12}(3\pi - 4)$ кв. ед.

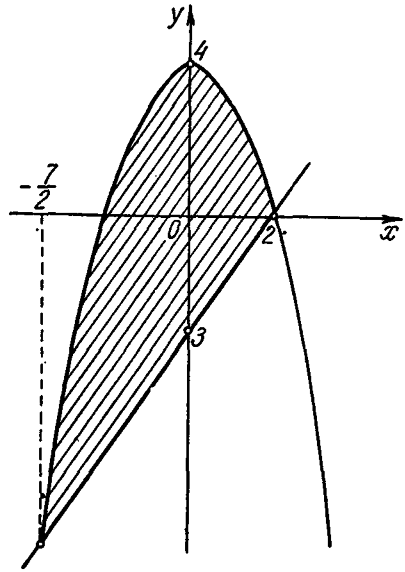
Задача 1,15 (для самостоятельного решения). Найти площадь, ограниченную линиями

$$x^2 + y^2 = a^2;\ x + y = a;$$

$$y = \frac{a}{2}\left(a > 0;\ x \geqslant 0;\ y \geqslant \frac{a}{2}\right)_0.$$



К задаче 1,15



К задаче 1,16

Ответ. $S = \frac{1}{6}\pi a^2 - \frac{a^2}{8}(1 + \sqrt{3})$ кв. ед.

Задача 1,16 (для самостоятельного решения). Найти площадь, ограниченную линиями $y = 4 - x^2$; $3x - 2y - 6 = 0$.

Указание.

$$S = \int\limits_{-\frac{7}{2}}^{2} dx \int\limits_{\frac{3x-6}{2}}^{4-x^2} dy.$$

Ответ.

$$S = \frac{1331}{48}\ \text{кв. ед.}$$

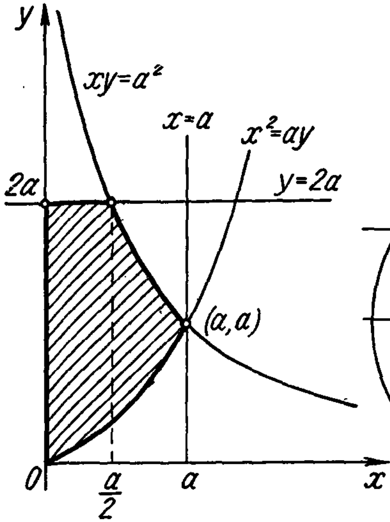
Задача 1,17 (для самостоятельного решения). Найти площадь, ограниченную линиями $xy=a^2$; $x^2=ay$; $y=2a$; $x=0\,(a>0)$.

Указание.

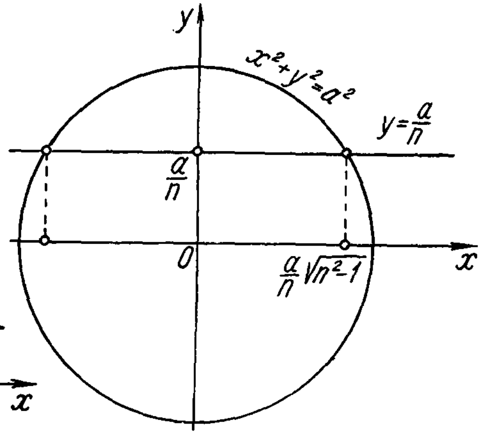
$$S=\int\limits_0^{\frac{a}{2}} dx\int\limits_{\frac{x^2}{a}}^{2a} dy+\int\limits_{\frac{a}{2}}^{a} dx\int\limits_{\frac{x^2}{a}}^{\frac{a^2}{x}} dy.$$

Ответ.

$$S=\left(\frac{23}{24}a^2+a^2\ln 2\right)\text{ кв. ед.}$$



К задаче 1,17



К задаче 1,18

Задача 1,18 (для самостоятельного решения). Найти площадь, ограниченную линиями

$$x^2+y^2=a^2;\quad y=\frac{a}{n}\,(a>0;\quad n>1).$$

Указание.

$$S=2\int\limits_0^{\frac{a}{n}\sqrt{n^2-1}} dx\int\limits_{\frac{a}{n}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy.$$

Множитель 2 перед интегралом объясняется симметрией площади относительно оси Oy.

Ответ.

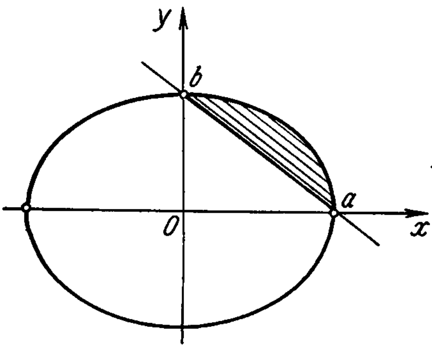
$$S=\frac{a^2}{2}\left(2\arcsin\frac{\sqrt{n^2-1}}{n}-\frac{2}{n^2}\sqrt{n^2-1}\right)\text{ кв. ед.}$$

Задача 1,19 (для самостоятельного решения). Найти площадь, ограниченную линиями

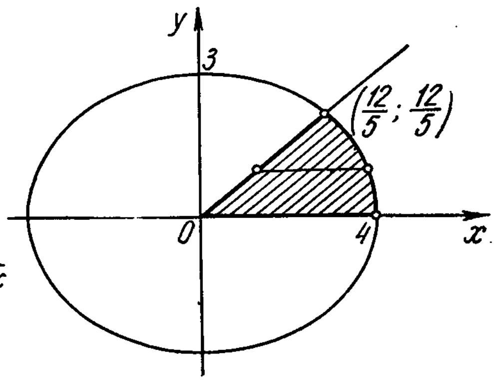
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1; \quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \quad (a>0;\ b>0).$$

Ответ.

$S=\frac{1}{4}ab(\pi-2)$ кв. ед.



К задаче 1,19



К задаче 1,20

Задача 1,20 (для самостоятельного решения). Найти площадь, ограниченную линиями

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1; \quad y=x; \quad y=0. \quad (x\geqslant 0;\ y\geqslant 0).$$

Указание. Выгодно сначала интегрировать по переменной x.

Ответ.

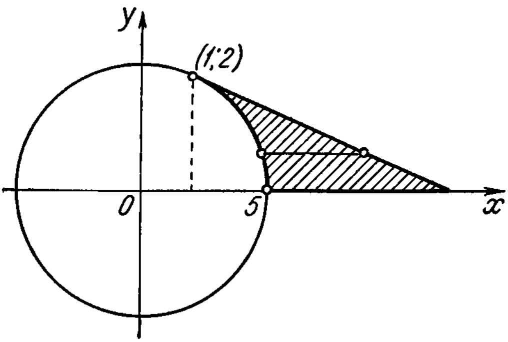
$$S=6\arcsin\frac{4}{5} \text{ кв. ед.}$$

Задача 1,21 (для самостоятельного решения). Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $x^2+y^2=5$, касательной к ней, проведенной в точку с координатами (1,2), и осью Ox.

Указание. Уравнение касательной $x+2y-5=0$. Выгодно внутренний интеграл вычислить по переменной x.

Ответ.

$$S=\left(5-\frac{5}{2}\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \text{ кв.ед.}$$



К задаче 1,21

Задача 1,22. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $(x-a)^2+y^2=a^2$ и $x^2+(y-a)^2=a^2$.

Решение. Линии — окружности с центрами в точках $(a,\ 0)$ и $(0,\ a)$. Если раскрыть скобки, то уравнения запишутся так:

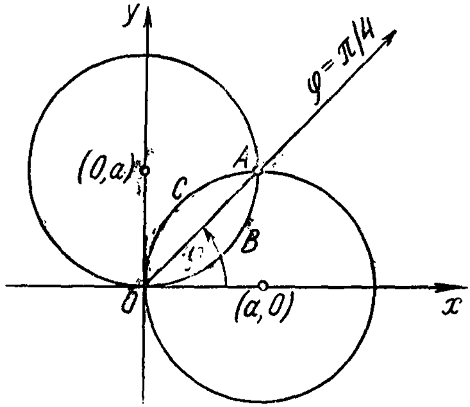
$$x^2+y^2-2ax=0; \qquad \text{(A)}$$
$$x^2+y^2-2ay=0. \qquad \text{(B)}$$

Наличие в уравнении кривой выражения x^2+y^2 указывает на возможную целесообразность перехода к полярным координатам (в полярных координатах $x^2+y^2=r^2$; $x=r\cos\varphi$; $y=r\sin\varphi$).

Уравнения (A) и (B) в полярных координатах запишутся так:

$$r=2a\cos\varphi; \qquad \text{(I)}$$
$$r=2a\sin\varphi. \qquad \text{(II)}$$

Прямая OA делит искомую площадь на две части — $OBAO$ и $OACO$. Легко установить, решая совместно уравнения (I) и (II), что точка A лежит на биссектрисе первого координатного угла. Уравнение луча OA: $\varphi=\frac{\pi}{4}$.



К задаче 1,22

В области $OBAO$ полярный радиус r изменяется от 0 до его значения на окружности, определяемой уравнением (II), т. е. до $2a\sin\varphi$, а полярный угол φ — от 0 до $\frac{\pi}{4}$.

В области $OACO$ r изменяется от 0 до его значения на окружности, определяемой уравнением (I), т. е. до $2a\cos\varphi$, а угол φ — от $\frac{\pi}{4}$ до $\frac{\pi}{2}$.

Таким образом, на основании формулы (1,12) искомая площадь

$$S=\iint\limits_{(OBAO)} r\,dr\,d\varphi+\iint\limits_{(OACO)} r\,dr\,d\varphi=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi\int\limits_0^{2a\sin\varphi} r\,dr+\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int\limits_0^{2a\cos\varphi} r\,dr.$$

Вычислим внутренние интегралы:

$$\int\limits_0^{2a\sin\varphi} r\,dr=\frac{r^2}{2}\Big|_0^{2a\sin\varphi}=2a^2\sin^2\varphi; \qquad \int\limits_0^{2a\cos\varphi} r\,dr=\frac{r^2}{2}\Big|_0^{2a\cos\varphi}=2a^2\cos^2\varphi.$$

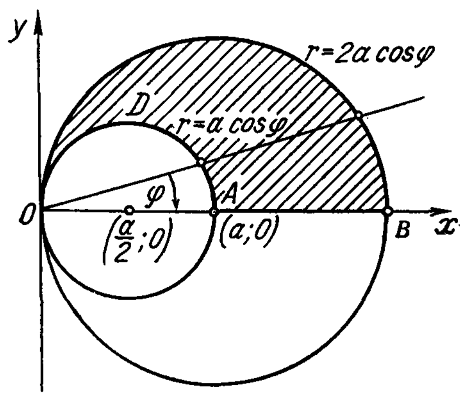
Поэтому площадь

$$S = 2a^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2\varphi\, d\varphi + 2a^2 \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\, d\varphi =$$

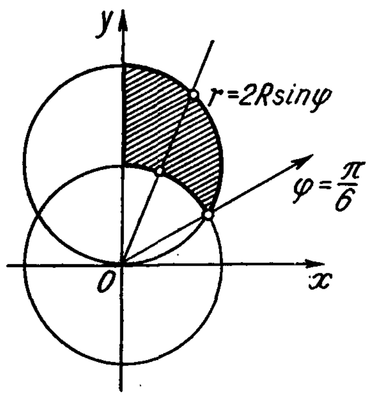
$$= a^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) + a^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = a^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \text{ кв. ед.}$$

Замечание. Легко было сразу усмотреть, что площади частей *OBAO* и *OACO* равны между собой, а потому можно было вычислить площадь по формуле

$$S = 2 \iint\limits_{OBAO} r\, dr\, d\varphi.$$



К задаче 1,23



К задаче 1,24

Решение этой задачи в прямоугольных координатах было бы значительно сложнее.

Задача 1,23 (для самостоятельного решения). Найти площадь, ограниченную линиями $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ и $x^2 + y^2 - ax = 0$.

Указание. Уравнения линий преобразовать к полярным координатам. Искомая площадь равна удвоенной площади *ABCODA*

$$S = 2 \iint\limits_{(ABCODA)} r\, dr\, d\varphi = 2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{a\cos\varphi}^{2a\cos\varphi} dr.$$

Ответ.

$$S = \frac{3}{4}\pi a^2 \text{ кв. ед.}$$

Задача 1,24 (для самостоятельного решения). Найти площадь, ограниченную линиями $x^2 + y^2 = R^2$, $x^2 + y^2 - 2Ry = 0$ и $x = 0$.

Указание. Линии — окружности. Перейти к полярным координатам.

Ответ.

$$S=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{R}^{2R\sin\varphi} r\,dr=\frac{1}{2}R^2\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ кв. ед.}$$

ВТОРОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Вычисление объемов и поверхностей при помощи двойного интеграла.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

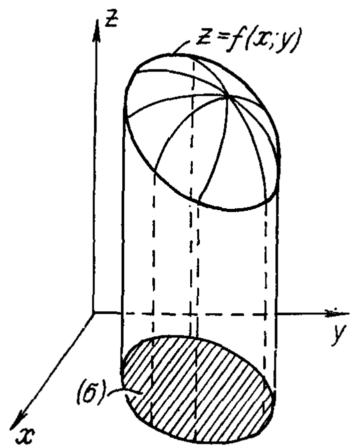
I. Объем цилиндрического тела

Двойной интеграл $\iint\limits_{(\sigma)} f(x, y)\,dx\,dy$ равен объему цилиндрического тела, ограниченного с боков цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси Oz. Направляющей ее служит контур (l), ограничивающий область интегрирования (σ), лежащую в плоскости xOy и являющуюся нижним основанием этого цилиндрического тела. Сверху тело ограничено поверхностью, определяемой уравнением

$$z=f(x, y). \qquad (A)$$

Таким образом, объем такого цилиндрического тела (фиг. 2,1)

$$V=\iint\limits_{(\sigma)} f(x, y)\,dx\,dy. \qquad (2,1)$$



Фиг. 2,1

В этой формуле $f(x, y)$ есть правая часть уравнения (A), т. е. уравнения той поверхности, которая сверху ограничивает цилиндрическое тело. Формулу (2,1) удобно записать в виде

$$V=\iint\limits_{(\sigma)} z\,dx\,dy. \qquad (2,2)$$

Если вычисление ведется в полярных координатах, то эта формула имеет вид

$$V=\iint\limits_{(\sigma)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi. \qquad (2,3)$$