Ответ.

$$S=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{R}^{2R\sin\varphi} r\,dr=\frac{1}{2}R^2\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ кв. ед.}$$

ВТОРОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Вычисление объемов и поверхностей при помощи двойного интеграла.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

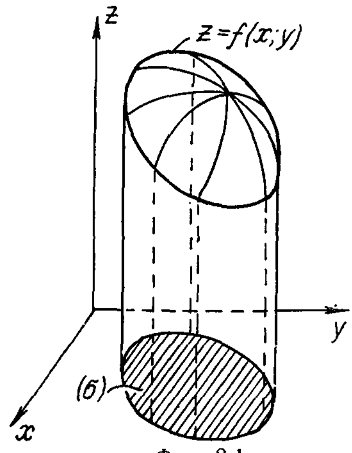
I. Объем цилиндрического тела

Двойной интеграл $\iint\limits_{(\sigma)} f(x, y)\,dx\,dy$ равен объему цилиндрического тела, ограниченного с боков цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси Oz. Направляющей ее служит контур (l), ограничивающий область интегрирования (σ), лежащую в плоскости xOy и являющуюся нижним основанием этого цилиндрического тела. Сверху тело ограничено поверхностью, определяемой уравнением

$$z=f(x, y). \qquad (A)$$

Таким образом, объем такого цилиндрического тела (фиг. 2,1)

$$V=\iint\limits_{(\sigma)} f(x, y)\,dx\,dy. \qquad (2,1)$$



Фиг. 2,1

В этой формуле $f(x, y)$ есть правая часть уравнения (A), т. е. уравнения той поверхности, которая сверху ограничивает цилиндрическое тело. Формулу (2,1) удобно записать в виде

$$V=\iint\limits_{(\sigma)} z\,dx\,dy. \qquad (2,2)$$

Если вычисление ведется в полярных координатах, то эта формула имеет вид

$$V=\iint\limits_{(\sigma)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi. \qquad (2,3)$$

Предполагается, что функция $f(x, y)$ — непрерывна и однозначна в области (σ). (Цилиндрическое тело, о котором идет речь, называется также *криволинейным цилиндром* по аналогии с криволинейной трапецией, а иногда цилиндрическим брусом).

Если область интегрирования (σ) находится в плоскости xOy, то уравнение поверхности, которое сверху ограничивает цилиндрическое тело, должно быть решено относительно переменной z.

II. Площадь кривой поверхности

Если поверхность определяется уравнением $z = f(x, y)$, то площадь той части поверхности, которая проектируется на плоскость xOy в область (σ), вычисляется по формуле

$$S = \iint\limits_{(\sigma_{xOy})} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^3} \, dx\, dy. \qquad (2.4)$$

Предполагается, что функция $f(x, y)$ непрерывна и однозначна в области (σ) и имеет в этой области непрерывные частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$. Обыкновенно вводят обозначения $p = \frac{\partial z}{\partial x}$; $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, а потому формулу (2,4) можно записать и так:

$$S = \iint\limits_{(\sigma_{xOy})} \sqrt{1 + p^2 + q^2} \, dx\, dy. \qquad (2,5)$$

Для упрощения вычислений иногда выгодно проектировать поверхность, площадь которой вычисляется, не на плоскость xOy, а на плоскость yOz или на плоскость xOz. Тогда уравнение поверхности следует решить в первом случае относительно переменной x, во втором — относительно переменной y, а формула (2,4) запишется соответственно так:

$$S = \iint\limits_{(\sigma_{yOz})} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2} \, dy\, dz; \qquad (2,6)$$

$$S = \iint\limits_{(\sigma_{xOz})} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2} \, dx\, dz. \qquad (2,7)$$

Для применения формул (2,1) — (2,6) следует прежде всего проверить, является ли цилиндрическим тело, объем или поверхность которого вычисляется, какая поверхность ограничивает его сверху, знать ее уравнение, а также установить область (σ), на которую распространяется интегрирование, вычертить эту область на отдельном чертеже и найти уравнение линии (l) — контура области (σ). Следует иметь в виду, что в частном случае образующие боковой цилиндрической поверхности могут быть равны нулю. Это имеет место, например, в задаче 2,3.

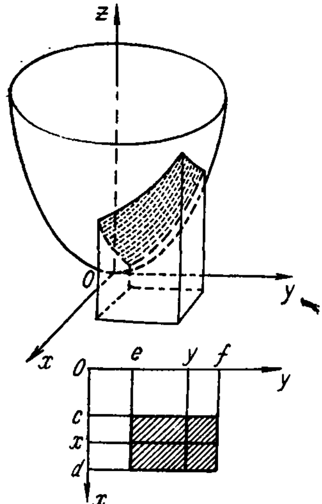
1. Вычисление объема тел

Задача 2,1. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: 1) $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$; 2) $x = c$ 3) $x = d$; $(c < d)$ 4) $y = e$ 5) $y = f$; $(e < f)$ 6) $z = 0$.

Решение. Поверхностями, ограничивающими тело, являются: 1) эллиптический параболоид; 2) и 3) — плоскости, параллельные плоскости yOz; 4) и 5) — плоскости, параллельные плоскости xOz и 6) — плоскость xOy (см. чертеж). Заданное тело цилиндрическое. Объем его вычисляется по формуле (2,2). Подставляя в эту формулу значение z из уравнения поверхности, ограничивающей тело сверху, имеем

$$v = \iint\limits_{(\sigma)} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) dx\, dy. \qquad (A)$$

На плоскости xOy тело вырезает прямоугольник (σ), ограниченный прямыми линиями $x = c$; $x = d$; $y = e$; $y = f$. Первые две параллельны оси Oy, вторые две — оси Ox. Как известно, в этом случае пределы интегрирования в повторном интеграле — величины постоянные. Порядок интегрирования в данном случае безразличен.



К задаче 2,1

Переходя в (A) к повторному интегралу и выполняя первое интегрирование по переменной x, а второе по переменной y, будем иметь

$$V = \int\limits_{e}^{f} dy \int\limits_{c}^{d} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) dx. \qquad (B)$$

Внутренний интеграл $\int\limits_{c}^{d} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) dx = \frac{x^3}{3a^2} + \frac{xy^2}{b^2}\Big|_c^d = \frac{d^3 - c^3}{3a^2} + \frac{y^2(d-c)}{b^2} = (d-c)\left[\frac{d^2 + cd + c^2}{3a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right]$.

Подставляя значение внутреннего интеграла в формулу (B), получаем, вынося $d - c$ за знак интеграла,

$$V = (d - c)\int\limits_{e}^{f} \left(\frac{d^2 + cd + c^2}{3a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) dy =$$

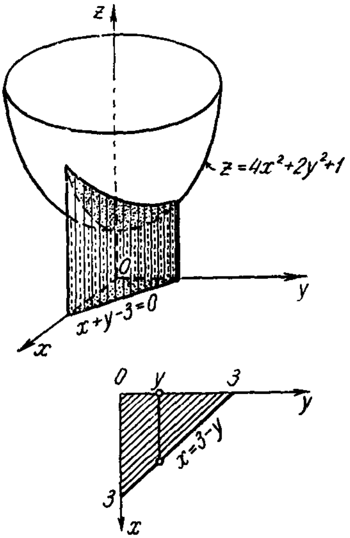
$$= (d - c)\left(\frac{d^2 + cd + c^2}{3a^2}\, y + \frac{y^3}{3b^2}\right)\Big|_e^f =$$

$$= \frac{(d-c)(f-e)}{3} \cdot \left(\frac{c^2 + cd + d^2}{a^2} + \frac{e^2 + ef + f^2}{b^2}\right) \text{ куб. ед.}$$

Задача 2,2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z = 4x^2 + 2y^2 + 1$; $x + y - 3 = 0$; $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$.

Решение. Первая поверхность — эллиптический параболоид, у которого осью симметрии является ось Oz. Он пересекает ее в точке (0, 0,1). Над плоскостью xOy параболоид приподнят на одну единицу масштаба, поверхность $x + y - 3 = 0$ — плоскость, параллельная оси Oz, а остальные поверхности — координатные плоскости.

На плоскости xOy тело вырезает треугольник, ограниченный координатными осями и прямой $x + y - 3 = 0$.



К задаче 2,2

Объем тела вычисляется по формуле (2,2), в которой область интегрирования (σ) — указанный треугольник, а z надо заменить его значением из уравнения той поверхности, которая сверху ограничивает тело,

$$V = \iint\limits_{(\sigma)} (4x^2 + 2y^2 + 1)\, dx\, dy.$$

Преобразуем двойной интеграл в повторный, причем первое интегрирование (внутреннее) будем вести по переменной x, а второе (внешнее) — по переменной y.

При постоянном y переменная x изменяется от $x = 0$ до $x = 3 - y$ (это значение x найдено из уравнения прямой $x + y - 3 = 0$), а y изменяется от 0 до 3. Поэтому

$$V = \int\limits_0^3 dy \int\limits_0^{3-y} (4x^2 + 2y^2 + 1)\, dx \quad \text{(A)}$$

Вычисляем внутренний интеграл $\int\limits_0^{3-y} (4x^2 + 2y^2 + 1)\, dx =$

$$= \frac{4}{3} x^3 + 2xy^2 + x \Big|_0^{3-y} = \frac{4}{3} (3 - y)^3 + 2(3 - y)\, y^2 + (3 - y) =$$

$$= 39 - 37y + 18y^2 - \frac{10}{3} y^3.$$

Подставляя это значение внутреннего интеграла в выражение (А), получаем

$$V = \int\limits_0^3 \left(39 - 37y + 18y^2 - \frac{10}{3} y^3\right) dy =$$

$$= 39y - \frac{37}{2} y^2 + 6y^3 - \frac{10}{12} y^4 \Big|_0^3 =$$

$$= 39 \cdot 3 - \frac{37}{2} \cdot 9 + 6 \cdot 27 - \frac{5}{6} \cdot 81 = 45 \text{ куб. ед.}$$

Задача 2,3. Найти объем тела, отсекаемого плоскостью $y = b$ от эллиптического параболоида

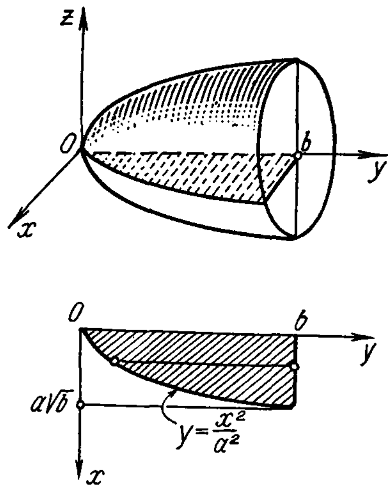
$$y = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}.$$

Решение. Четверть тела, лежащую в первом октанте, можно рассматривать как цилиндрическое тело с образующими, равными нулю. Уравнение поверхности, ограничивающей тело сверху, решим относительно z и вычислим объем четверти тела, лежащего в первом октанте. Из уравнения поверхности параболоида $z = \frac{c}{a}\sqrt{a^2y - x^2}$ (перед корнем удержан знак плюс, так как в первом октанте $z \geqslant 0$).

На плоскости xOy тело вырезает параболу, уравнение которой $y = \frac{x^2}{a^2}$ получим, решив совместно уравнения параболоида и плоскости xOy

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} \\ z &= 0 \end{aligned}\right\};$$

$$\frac{V}{4} = \frac{c}{a}\int\limits_0^{a\sqrt{b}} dx \int\limits_{\frac{x^2}{a^2}}^{b} \sqrt{a^2y - x^2}\, dy.$$



К задаче 2,3

Внутренний интеграл

$$\int\limits_{\frac{x^2}{a^2}}^{b} \sqrt{a^2y - x^2}\, dy = \frac{2}{3a^2}(a^2b - x^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Поэтому

$$\frac{V}{4} = \frac{2c}{3a^3}\int\limits_0^{a\sqrt{b}} (a^2b - x^2)^{\frac{3}{2}}\, dx.$$

Здесь удобна подстановка $x = a\sqrt{b}\sin t$. Новыми пределами интегрирования будут 0 и $\frac{\pi}{2}$, а $\frac{V}{4} = \frac{2}{3}ab^2c\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t\, dt$.

Интеграл

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t\, dt = \frac{3!!}{4!!}\frac{\pi}{2}.$$

Ответ.

$$V = \frac{\pi a b^2 c}{2} \text{ куб. ед.}$$

Если переменить порядок интегрирования, то

$$\frac{V}{4} = \frac{c}{a}\int_0^b dy \int_0^{a\sqrt{y}} \sqrt{a^2y - x^2}\,dx\,.$$

Внутренний интеграл

$$\int_0^{a\sqrt{y}} \sqrt{a^2y - x^2}\,dx = \left(\frac{x}{2}\sqrt{a^2y - x^2} + \frac{a^2y}{2}\arcsin\frac{x}{a\sqrt{y}}\right)\Bigg|_0^{a\sqrt{y}} =$$

$$= \frac{a^2y}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\,.$$

Задачу можно решить, и не прибегая к двойному интегралу. Пересечем тело плоскостью, перпендикулярной оси Oy. Сечением является эллипс, определяемый уравнением

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{x^2}{a^2y} + \dfrac{z^2}{c^2y} = 1 \\ y = \text{const} \end{array}\right\},$$

которое получается из уравнения параболоида, если обе его части разделить на y. Полуоси этого эллипса равны: $a\sqrt{y}$ и $c\sqrt{y}$, а его площадь $S = \pi a c y$.

Зная площадь поперечного сечения, объем тела найдем по формуле

$$V = \int_a^b S(y)\,dy.$$

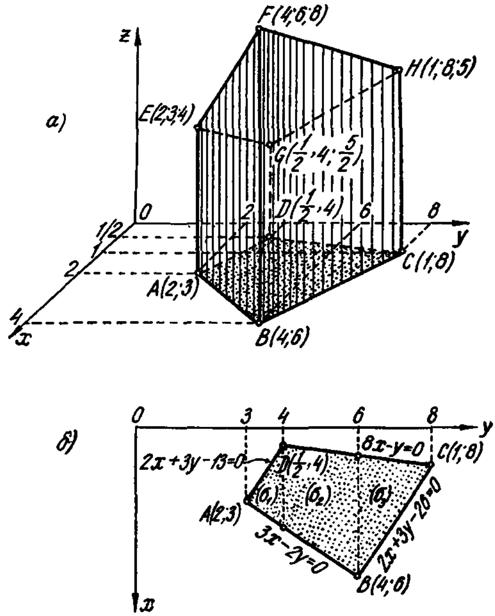
В нашем случае

$$V = \int_0^b \pi a c y\,dy = \pi a c\int_0^b y\,dy = \frac{\pi a b^2 c}{2} \text{ куб. ед.}$$

Задача 2,4 (для самостоятельного решения). Найти объем тела, ограниченного поверхностями: 1) $3x - 2y = 0$; 2) $8x - y = 0$; 3) $2x + 3y - 13 = 0$; 4) $2x + 3y - 26 = 0$; 5) $17x + 6y - 13z = 0$; 6) $z = 0$.

Указание. Тело рассмотреть как цилиндрическое. Сверху оно ограничено поверхностью $17x+6y-13z=0$. Ее уравнение следует решить относительно $z: z=\frac{1}{13}(17x+6y)$ и воспользоваться формулой (2,2). Объем

$$V=\frac{1}{13}\iint\limits_{(\sigma)}(17x+6y)\,dx\,dy.$$



К задаче 2,4

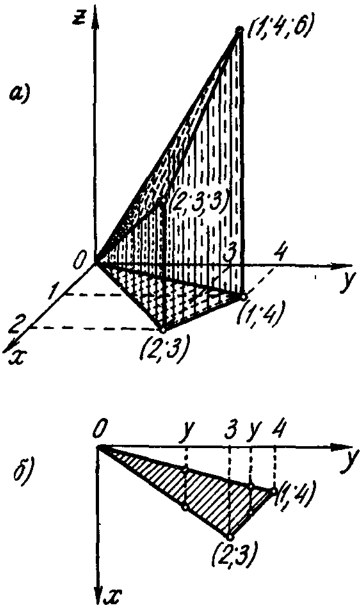
Область интегрирования представить как сумму трех областей: $(\sigma_1)+(\sigma_2)+(\sigma_3)$ (см. чертёж). Внутренние интегралы вычислять по переменной x

$$V=\frac{1}{13}\left[\int\limits_3^4 dy\int\limits_{\frac{13-3y}{2}}^{\frac{2}{3}y}(17x+6y)\,dx+\int\limits_4^6 dy\int\limits_{\frac{y}{8}}^{\frac{2}{3}y}(17x+6y)\,dx+\right.$$

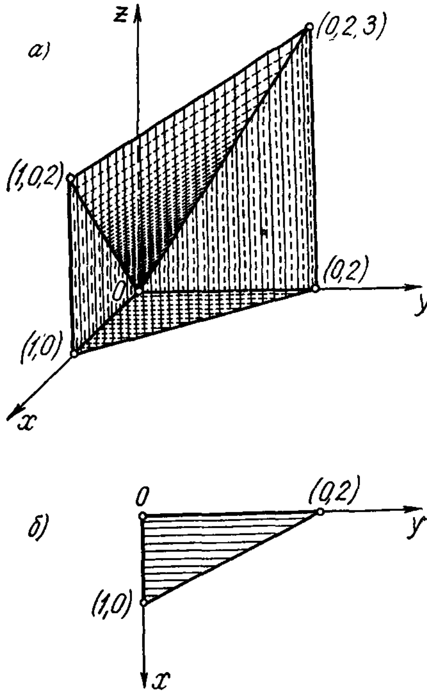
$$\left.+\int\limits_6^8 dy\int\limits_{\frac{y}{8}}^{\frac{26-3y}{2}}(17x+6y)\,dx\right].$$

Решение задачи потребует большого числа арифметических выкладок. Первый интеграл в скобках равен $\frac{11\,999}{216}$. Второй интеграл в скобках равен $\frac{150\,917}{432}$. Третий интеграл в скобках равен $\frac{11\,323}{48}$.

Ответ. $V = 49\frac{7}{24}$ куб. ед.



К задаче 2,5



К задаче 2,6

Задача 2,5 (для самостоятельного решения). Найти объем тела, ограниченного поверхностями: 1) $6x - 9y + 5z = 0$; 2) $3x - 2y = 0$; 3) $4x - y = 0$; 4) $x + y - 5 = 0$; 5) $z = 0$.

Ответ. $x = 7{,}5$ куб. ед.

Задача 2,6 (для самостоятельного решения). Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $2x + y - 2 = 0$; $4x + 3y - 2z = 0$ и координатными плоскостями.

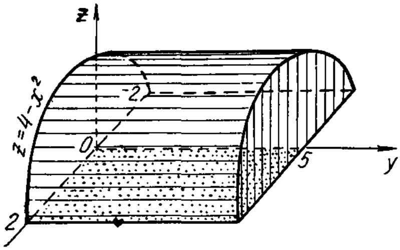
Ответ. $V = \frac{5}{3}$ куб. ед.

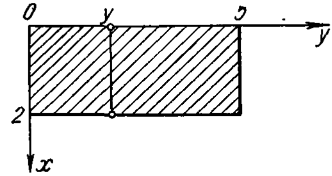
Задача 2,7 (для самостоятельного решения). Определить объем тела, ограниченного поверхностями: 1) $z = 4 - x^2$ 2) $y = 5$ 3) $y = 0$ 4) $z = 0$.

Указание. В формулу (2,2) подставить z из уравнения поверхности, ограничивающей сверху объем. Эта поверхность —

параболический цилиндр с образующими, параллельными оси Oy: $z = 4 - x^2$. Учесть симметрию тела относительно плоскости yOz.

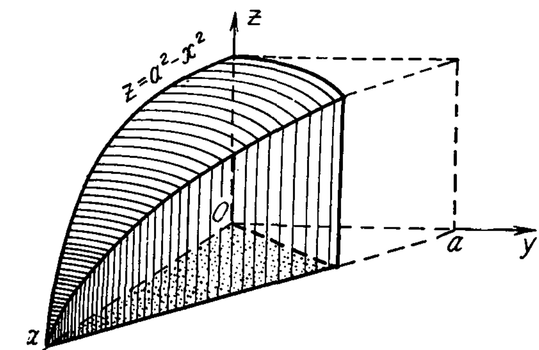
Ответ. $V = 2\int\limits_0^5 dy \int\limits_0^2 (4 - x^2)\,dx$; $V = 53\frac{1}{3}$ куб. ед.

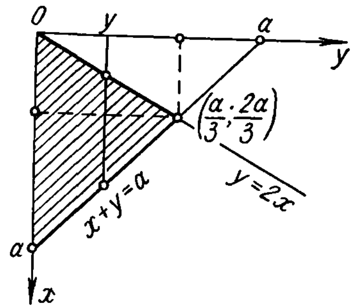




К задаче 2,7

Задача 2,8 (для самостоятельного решения). Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: 1) $z = a^2 - x^2$; 2) $x + y = a$; 3) $y = 2x$; 4) $z = 0$; 5) $y = 0$.





К задаче 2,8

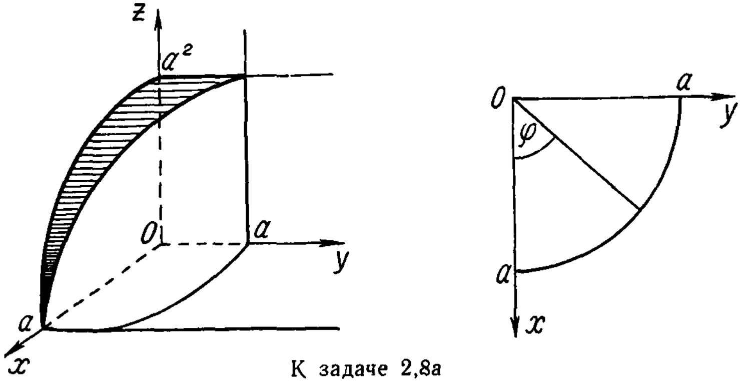
Указание. Первая поверхность — параболический цилиндр, образующие которого параллельны оси Oy. Эта поверхность ограничивает сверху тело, объем которого вычисляется. В формуле (2,2) вместо z подставить $a^2 - x^2$.

$$V = \int\limits_0^{\frac{2}{3}a} dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^{a-y} (a^2 - x^2)\,dx.$$

Ответ. $V = \frac{41}{162}a^4$ куб. ед.

Задача 2,8а (для самостоятельного решения). Найти объем тела, ограниченного координатными плоскостями и поверхностями: $z = a^2 - x^2$; $x^2 + y^2 = a^2$.

Указание. Первая поверхность — параболический цилиндр, образующие которого параллельны оси Oy, а направляющей является парабола $z = a^2 - x^2$, лежащая в плоскости xOz.



К задаче 2,8а

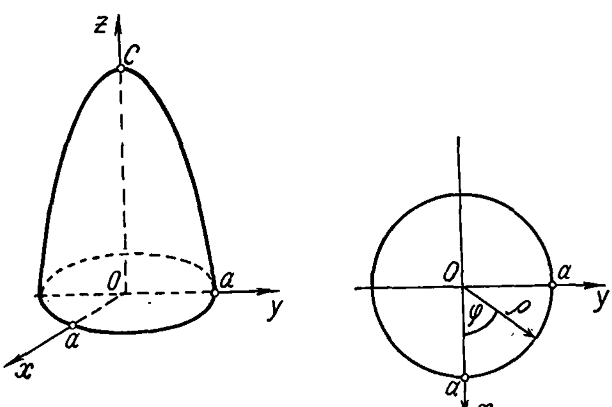
Вторая поверхность — круговой цилиндр с образующими, параллельными оси Oz. Его направляющей является окружность $x^2 + y^2 = a^2$, лежащая в плоскости xOy.

Объем

$$V = \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} (a^2 - x^2)\, dy.$$

Ответ. $V = \frac{3}{16}\pi a^4$ куб. ед.

Задача 2,9 (для самостоятельного решения). Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $c(x^2 + y^2) + a^2 z = a^2 c$ $(c > 0)$; $z = 0$



К задаче 2,9

казание. Поверхность — параболоид вращения. Наличие аемого $c(x^2+y^2)$ в левой части уравнения указывает на то, удобно перейти к цилиндрическим координатам. Област. интегрирования — круг радиуса a. Уравнение поверхности параболоида в цилиндрических координатах

$$c\rho^2 + a^2 z = a^2 c; \quad z = \frac{c}{a^2}(a^2 - \rho^2);$$

$$V = \frac{c}{a^2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a (a^2 - \rho^2)\rho d\rho.$$

Ответ. $V = \frac{1}{2}\pi a^2 c$ куб. ед.

Эту же задачу решить в прямоугольных координатах.

Задача 2,10. Найти объем тела, ограниченного трехосным эллипсоидом

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \qquad (A)$$

Решение. Для того, чтобы воспользоваться формулой (2,1), надо уравнение поверхности решить относительно переменной z. Так как поверхность трехосного эллипсоида симметрична относительно координатных плоскостей, то достаточно вычислить восьмую часть объема, расположенную в первом октанте. Решая уравнение (A) относительно z и учитывая, что в первом октанте $z \geqslant 0$, получаем:

$$z = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}};$$

$$\frac{V}{8} = \iint\limits_{(\sigma)} c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy =$$

$$= c\int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,dy. \qquad (B)$$

При интегрировании по y переменная x считается постоянной. Удобно для сокращения записей обозначить величину $1 - \frac{x^2}{a^2}$ под корнем через $\frac{d^2}{b^2}$, т. е.

$$1 - \frac{x^2}{a^2} = \frac{d^2}{b^2}.$$

Отсюда следует, что $b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = d^2$; $\quad \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) = d^2$.

Поэтому верхний предел во внутреннем интеграле $\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}=d$, а внутренний интеграл

$$I_1=\int\limits_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dy=\int\limits_0^d\sqrt{\frac{d^2}{b^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dy=$$

$$=\int\limits_0^d\frac{\sqrt{d^2-y^2}}{b}\,dy=\frac{1}{b}\int\limits_0^d\sqrt{d^2-y^2}\,dy=\frac{1}{b}\left[\frac{y}{2}\sqrt{d^2-y^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{d^2}{2}\arcsin\frac{y}{d}\right]\Bigg|_0^d=\frac{1}{b}\cdot\frac{d^2}{2}\arcsin\frac{d}{d}=\frac{d^2}{2b}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4b}d^2.$$

Подставим сюда $d^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$ и тогда

$$I_1=\frac{\pi}{4b}\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)=\frac{\pi b}{4a^2}(a^2-x^2).$$

Подставляя это значение I_1 в формулу (B), получаем

$$\frac{V}{8}=c\int\limits_0^a\frac{\pi b}{4a^2}(a^2-x^2)\,dx=\frac{\pi bc}{4a^2}\int\limits_0^a(a^2-x^2)\,dx=\frac{\pi bc}{4a^2}\left(a^2x-\frac{x^2}{3}\right)\Bigg|_0^a=$$

$$=\frac{\pi bc}{4a^2}\left(a^3-\frac{a^3}{3}\right)=\frac{\pi bc}{4a^2}\cdot\frac{2}{3}a^3=\frac{\pi abc}{6}.$$

Итак, $\frac{V}{8}=\frac{\pi abc}{6}$, а $V=\frac{4}{3}\pi abc$ куб. ед.

Если $a=b=c$, элипсоид становится сферой и тогда объем шара $V=\frac{4}{3}\pi a^3$

2. Вычисление площади поверхности

Задача 2,11. Вычислить площадь той части поверхности $ay=x^2+z^2$, которая находится в первом октанте и ограничена плоскостью $y=2a$.

Решение. Поверхность, площадь которой требуется вычислить, — часть параболоида вращения (ось вращения — Oy), находящаяся в первом октанте и ограниченная плоскостью $y=2a$, перпендикулярной оси Oy. Мы решим задачу двумя способами. Сначала спроектируем вычисляемую поверхность на плоскость xOz, а затем (для сравнения выкладок) — на плоскость xOy.

1) Проекцией поверхности на плоскость xOz является четверть круга, ограниченного окружностью, уравнение которой мы получим, исключая y из двух уравнений

$$\left.\begin{aligned}ay&=x^2+z^2\\ y&=2a\end{aligned}\right\},$$

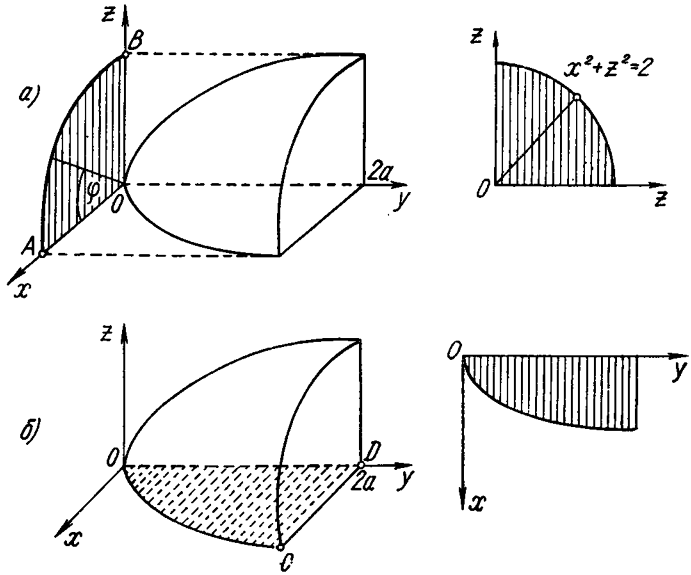
т. е. уравнение этой окружности

$$2a^2 = x^2 + z^2$$

или

$$\left.\begin{matrix} x^2 + z^2 = 2a^2 \\ y = 0 \end{matrix}\right\}. \qquad (A)$$

Так как мы проектировали поверхность на плоскость xOz, то ее уравнение должно быть решено относительно переменной y



К задаче 2,11

(см. стр. 30) и следует воспользоваться формулой (2, 7). Из условия задачи $y = \frac{1}{a}(a^2 + z^2)$.

Чтобы воспользоваться формулой (2, 7), надо определить частные производные $\frac{\partial y}{\partial x}$ и $\frac{\partial y}{\partial z}$:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{2x}{a}; \quad \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{2z}{a}.$$

Поэтому

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{4x^2}{a^2} + \frac{4z^2}{a^2}} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 + 4(x^2 + z^2)};$$

$$S = \frac{1}{2}\iint\limits_{(\sigma)} \sqrt{a^2 + 4(x^2 + z^2)}\, dx\, dz,$$

где область интегрирования (σ) — четверть круга AOB (см. чертеж к задаче).

Наличие под корнем суммы x^2+z^2 указывает на то, что целесообразно ввести полярные координаты, учитывая, что в этих координатах $x^2+z^2=\rho^2$. Радиус окружности AOB, как видно из уравнений (A), равен $2\sqrt{a}$. Полярный угол φ изменяется в области интегрирования от 0 до $\frac{\pi}{2}$. Поэтому

$$S=\frac{1}{a}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{a\sqrt{2}}\sqrt{a^2+4\rho^2}\,\rho d\rho.$$

Внутренний интеграл

$$\int\limits_0^{a\sqrt{2}}\sqrt{a^2+4\rho^2}\,\rho d\rho=\frac{1}{8}\left.\frac{(a^2+4\rho^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^{a\sqrt{2}}=\frac{1}{12}[(a^2+8a^2)^{\frac{3}{2}}-(a^2)^{\frac{3}{2}}]=$$

$$=\frac{1}{12}[(9a^2)^{\frac{3}{2}}-(a^2)^{\frac{3}{2}}]=\frac{1}{12}\cdot 26a^3=\frac{13}{6}a^3.$$

Окончательно $S=\frac{1}{a}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{13}{6}a^3=\frac{13}{12}\pi a^2$ кв. ед.

Теперь решим эту же задачу, проектируя поверхность на плоскость xOy (см. чертеж б) к этой задаче). Для этого надо воспользоваться формулой (2,4) или, что то же, формулой (2,5). Уравнение поверхности должно быть решено относительно переменной z.

Из уравнения поверхности $z=\sqrt{ay-x^2}$
(в первом октанте $z\geqslant 0$, а потому перед корнем удержан только знак плюс).

Определим частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{\sqrt{ay-x^2}};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{a}{2\sqrt{ay-x^2}}.$$

Поэтому

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{ay-x^2}+\frac{a^2}{4(ay-x^2)}}=\frac{\sqrt{4ay+a^2}}{2\sqrt{ay-x^2}},\quad \text{а}$$

$$S=\iint\limits_{(\sigma)}\frac{\sqrt{4ay+a^2}}{2\sqrt{ay-x^2}}\,dx\,dy,$$

где область интегрирования (σ) ограничена осью Oy, параболой $x^2=ay$ и прямой $y=2a$. Поэтому

$$S=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2a}\sqrt{4ay+a^2}\,dy\int\limits_0^{\sqrt{ay}}\frac{dx}{\sqrt{ay-x^2}}.$$

Остальные вычисления проведите самостоятельно.

Внутренний интеграл

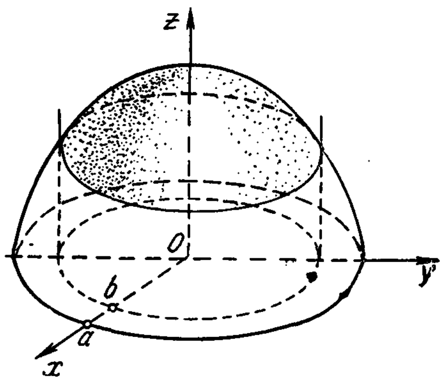
$$\int_0^{\sqrt{ay}} \frac{dx}{\sqrt{ay-x^2}} = \arcsin \frac{x}{\sqrt{ay}}\Big|_0^{\sqrt{ay}} = \frac{\pi}{2}.$$

Сравнение первого решения со вторым показывает преимущество первого. Рекомендуется проектировать поверхность на ту из координатных плоскостей, в которой область интегрирования будет наиболее простой.

Задача 2,12 (для самостоятельного решения). Найти площадь поверхности, вырезанную цилиндром $x^2+y^2=b^2$ из сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$, считая, что $a>b$.

Указание. Вычислить 1/8 часть искомой площади, расположенную в первом октанте. Проектировать вычисляемую поверхность на плоскость xOy. Проекцией будет четверть круга, ограниченного окружностью $x^2+y^2=b^2$. Уравнение сферы решить относительно переменной z. Вычислить

$$p=\frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{и} \quad q=\frac{\partial z}{\partial y}.$$



К задаче 2,12

Выражение $\sqrt{1+p^2+q^2}=\frac{a}{z}$.

Но

$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}=\sqrt{a^2-(x^2+y^2)},$$

а потому

$$\sqrt{1+p^2+q^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}}.$$

После перехода к полярным координатам

$$\sqrt{1+p^2+q^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-\rho^2}};$$

$$\frac{S}{8}=\iint_{(\sigma)} \frac{a}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\rho\, d\rho\, d\varphi,$$

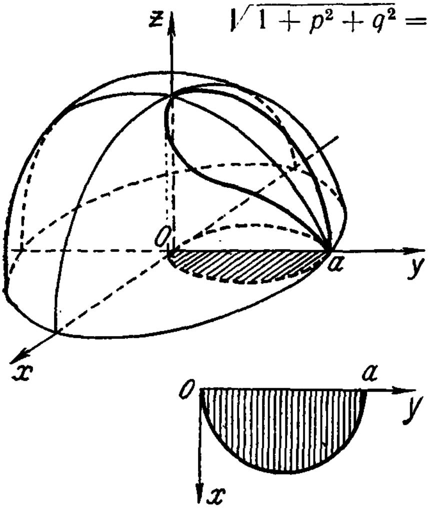
Ответ. $S=4a\pi(a-\sqrt{a^2-b^2})$ кв. ед.

Задача 2,13 (для самостоятельного решения). Найти площадь поверхности, вырезаемую на сфере $x^2+y^2+z^2=a^2$ цилиндром $x^2+y^2-ay=0$.

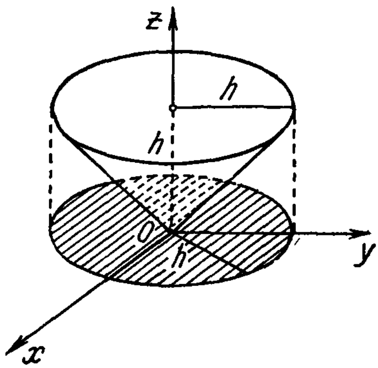
Указание. Как и в предыдущей задаче, уравнение сферы решить относительно переменной z.

После перехода к полярным координатам, как и в предыдущей задаче,

$$\sqrt{1+p^2+q^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-\rho^2}}.$$



К задаче 2,13



К задаче 2,14

Область интегрирования ограничена окружностью, уравнение которой

$$\rho=a\sin\varphi;$$

$$\frac{S}{4}=\iint\limits_{(\sigma)}\frac{a}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\rho\,d\rho\,d\varphi=a\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{a\sin\varphi}\frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}}.$$

Ответ. $S=2a^2(\pi-2)$ кв. ед.

Задача 2,14 (для самостоятельного решения). Найти площадь боковой поверхности, ограниченной конусом $z^2=x^2+y^2$ и плоскостью $z=h$.

Указание. Выгодно спроектировать поверхность на плоскость xOy. Проекция — круг, ограниченный окружностью $x^2+y^2=h^2$. Уравнение поверхности решить относительно переменной z. Воспользуемся формулой (2,5). Окажется, что

$$\sqrt{1+p^2+q^2}=\sqrt{2},$$

а двойной интеграл $\iint\limits_{(\sigma)} \rho\, d\rho\, d\varphi$ равен площади круга, т. е. πh^2.

Ответ. $S = \pi h^2 \sqrt{2}$ кв. ед.

Задача 2,15. Вычислить площадь той части параболоида $z = \frac{1}{2a}(x^2 + y^2)$, которая ограничена плоскостями

$$y = x \operatorname{tg} \alpha; \quad y = 0; \quad z = 0; \quad z = \frac{a}{2} \quad \left(a > 0; \quad \alpha < \frac{\pi}{2}\right).$$

Указание. Искомая площадь проектируется в круговой сектор с центральным углом α, ограниченный окружностью $x^2 + y^2 = a^2$

$$S = \frac{1}{a} \iint\limits_{(\sigma)} \sqrt{a^2 + x^2 + y^2}\, dx\, dy.$$

Удобно перейти к полярным координатам.

Ответ. $S = \frac{\alpha a^2}{3}(2\sqrt{2} - 1)$ кв. ед.

Задача 2,16 (для самостоятельного решения). Вычислить поверхность шара радиуса a.

Указание. Следует вычислить 1/8 поверхности шара, расположенную в первом октанте, в котором $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$. Из уравнения сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ определить z:

$$z = \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}.$$

Частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ равны:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}} = -\frac{x}{z}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}} = -\frac{y}{z}.$$

Поэтому

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2}} = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{z^2}} = \frac{a}{z} =$$

$$= \frac{a}{\sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}}.$$

Выгодно перейти к полярным координатам, учитывая, что в этих координатах $x^2 + y^2 = \rho^2$. Поэтому

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - \rho^2}}.$$

Восьмая часть поверхности в полярных координатах

$$\frac{S}{8}=\iint\limits_{(\sigma)}\frac{a}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\rho\,d\rho\,d\varphi, \tag{A}$$

где (σ) — четверть круга, лежащая в первой четверти координатной плоскости xOy.

$$\frac{S}{8}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^a\frac{a}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\rho\,d\rho$$

или

$$\frac{S}{8}=a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi=\frac{\pi a^2}{2}.$$

Учесть, что

$$\int\limits_0^a\frac{a}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\rho\,d\rho=a\left(-\sqrt{a^2-\rho^2}\right)\Big|_0^a=a\cdot a=a^2.$$

Ответ. $S=4\pi a^2$ кв. ед.

Для сравнения выкладок рекомендуется вычислить поверхность шара, не переходя к полярным координатам. Легко убедиться, что в этом случае вычисления окажутся более громоздкими.

ТРЕТЬЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Тройной интеграл.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Под областью (v), на которую распространен тройной интеграл, понимается замкнутая пространственная область, ограниченная снизу и сверху поверхностями, определяемыми соответственно уравнениями $z=\varphi_1(x, y)$ и $z=\varphi_2(x, y)$ $(\varphi_1\leqslant\varphi_2)$, а с боков — цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси Oz (фиг. 3а). (В частном случае может оказаться, что образующие цилиндрической поверхности равны нулю (фиг. 3б).

Переменные x и y изменяются в плоской области (σ_{xy}), которая является проекцией на плоскость xOy пространственной области (v).