Восьмая часть поверхности в полярных координатах

$$\frac{S}{8}=\iint\limits_{(\sigma)}\frac{a}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\rho\,d\rho\,d\varphi, \qquad (A)$$

где (σ) — четверть круга, лежащая в первой четверти координатной плоскости xOy.

$$\frac{S}{8}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^a\frac{a}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\rho\,d\rho$$

или

$$\frac{S}{8}=a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi=\frac{\pi a^2}{2}.$$

Учесть, что

$$\int\limits_0^a\frac{a}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\rho\,d\rho=a\left(-\sqrt{a^2-\rho^2}\right)\Big|_0^a=a\cdot a=a^2.$$

Ответ. $S=4\pi a^2$ кв. ед.

Для сравнения выкладок рекомендуется вычислить поверхность шара, не переходя к полярным координатам. Легко убедиться, что в этом случае вычисления окажутся более громоздкими.

ТРЕТЬЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Тройной интеграл.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Под областью (v), на которую распространен тройной интеграл, понимается замкнутая пространственная область, ограниченная снизу и сверху поверхностями, определяемыми соответственно уравнениями $z=\varphi_1(x, y)$ и $z=\varphi_2(x, y)$ $(\varphi_1\leqslant\varphi_2)$, а с боков — цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси Oz (фиг. 3а). (В частном случае может оказаться, что образующие цилиндрической поверхности равны нулю (фиг. 3б).

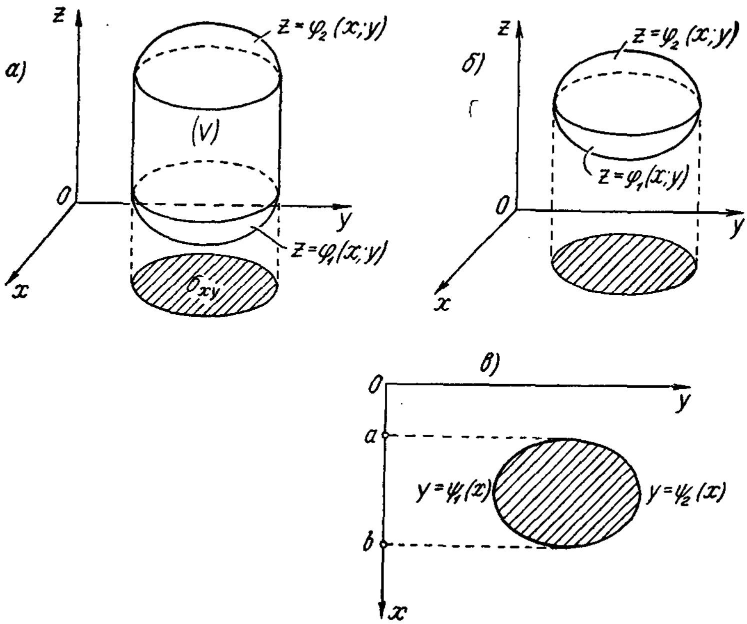
Переменные x и y изменяются в плоской области (σ_{xy}), которая является проекцией на плоскость xOy пространственной области (v).

В прямоугольных координатах элемент dv объема вычисляется по формуле

$$dv = dx\,dy\,dz. \qquad (3,1)$$

Тройной интеграл от функции $f(x, y, z)$ трех независимых переменных, которая предполагается непрерывной в области (V), в прямоугольных координатах записывается так:

$$\iiint\limits_{(v)} f(x, y, z)\,dv = \iiint\limits_{(v)} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$$



Фиг. 3

и вычисляется по формуле

$$\iiint\limits_{(v)} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{(\sigma_{xy})} dx\,dy \int\limits_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z)\,dz. \qquad (3,2)$$

При вычислении внутреннего интеграла

$$\int\limits_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z)\,dz$$

переменные x и y следует рассматривать как постоянные и единственной переменной величиной при этом является z. В результате получится функция двух независимых переменных x и y. Обозначим ее через $F(x, y)$. Подставив ее в правую часть формулы (3,2), мы сведем вычисление тройного интеграла к двойному интегралу

$$\iint\limits_{(\sigma_{xy})} F(x, y)\,dx\,dy, \tag{A}$$

с вычислением которого читатель знаком из первых двух занятий.

Таким образом, вычисление тройного интеграла сведено к вычислению одномерного интеграла (внутреннего) и двойного интеграла (A).

Если область (σ_{xy}) ограничена непрерывными кривыми, определяемыми уравнениями $y=\psi_1(x)$ и $y=\psi_2(x)$ и прямыми $x=a$ и $x=b$, то двойной интеграл (A) можно вычислить при помощи двух повторных интегрирований (фиг. 3в)

$$\iint\limits_{(\sigma_{xy})} F(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} F(x, y)\,dy.$$

Тем самым вычисление тройного интеграла в формуле (3,2) может быть сведено к трем последовательным интегрированиям по формуле

$$\iiint\limits_{(v)} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} dy \int\limits_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z)\,dz. \tag{3,3}$$

Отметим, что порядок интегрирования может быть изменен. А так как в формуле (3,3) участвуют всего три переменных x, y и z, то тройной интеграл в формуле (3,3) может быть вычислен числом способов, равным числу перестановок из трех элементов, т. е. шестью способами.

Кроме формул (3,2) и (3,3), для вычисления тройного интеграла в прямоугольных координатах часто применяется еще одна формула, которая иногда упрощает вычисления:

$$\iiint\limits_{(v)} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_a^b dx \iint\limits_{(\sigma_x)} f(x, y, z)\,dy\,dz, \tag{3,4}$$

где область (σ_x) — сечение области (v) плоскостью, параллельной плоскости yOz и проходящей через произвольную точку интервала (a, b), по которому распространен внешний интеграл в формуле (3,3). (См. задачу 3,1).

Формула (3,4) получается из формулы (3,3), если в ней два последних интеграла заменить одним двойным, распространенным на область (σ_x), разъяснения о которой даны выше.

Кроме формулы (3,4), для вычисления тройного интеграла могут быть также использованы аналогичные две:

$$\iiint\limits_{(v)} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_c^d dz \iint\limits_{(\sigma_z)} f(x, y, z)\,dx\,dy \tag{3,4a}$$

и

$$\iiint\limits_{(v)} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_{e}^{f} dy \iint\limits_{(\sigma_y)} f(x, y, z)\,dx\,dz. \qquad (3,4б)$$

В формуле (3,4а) (σ_z) — область, ограниченная кривой, по которой плоскость, параллельная плоскости xOy при фиксированном z из промежутка (c, d), пересекает область (v), а в формуле (3,4б) (σ_y) — область, ограниченная кривой, по которой плоскость, параллельная плоскости xOz при фиксированном y из промежутка (e, f), пересекает область (v).

Заметим, что во всех этих формулах пределы интегрирования во внешнем интеграле всегда величины постоянные.

Применение тройного интеграла в геометрии и механике

1. Вычисление объема тела. Если функция $f(x, y, z)$ тождественно равна 1, т. е. $f(x, y, z) \equiv 1$ (символ $\equiv$ есть знак тождественного равенства), то тройной интеграл

$$\iiint\limits_{(v)} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz \text{ превращается в } \iiint\limits_{(v)} dx\,dy\,dz,$$

который равен объему тела, ограниченного областью (v).

Итак, объем тела

$$V = \iiint\limits_{(v)} dx\,dy\,dz. \qquad (3,5)$$

Заметим, что во многих случаях вычисление объема при помощи тройного интеграла оказывается более простым, чем его вычисление двойным интегралом.

2. Масса неоднородного тела. Если тело **однородно**, т. е. в каждой его точке плотность γ одна и та же, то масса M тела равна произведению плотности тела γ на его объем V

$$M = \gamma V.$$

Если же тело *неоднородно*, то плотность его в различных точках различна и меняется от точки к точке, являясь, таким образом, функцией координат точки, т. е. функцией трех независимых переменных.

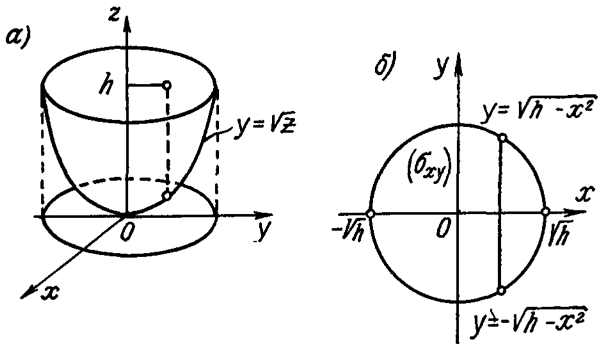
Таким образом, плотность $\gamma = \gamma(x, y, z)$, причем эта функция предполагается непрерывной.

Масса M тела в этом случае равна тройному интегралу от плотности $\gamma(x, y, z)$, распространенному на объем (V), занимаемый этим телом, и определяется по формуле

$$M = \iiint\limits_{(v)} \gamma(x, y, z)\,dx\,dy\,dz. \qquad (3,6)$$

Различие между тройным интегралом в формулах (3,2) и (3,6) состоит только в том, что в формуле (3,6) вместо функции $f(x, y, z)$ фигурирует функция $\gamma(x, y, z)$. Ясно, что интеграл (3,6) вычисляется по тем же формулам, что и интеграл (3,2). Другие приложения тройного интеграла в механике рассматриваются на следующем практическом занятии.

Цель этого практического занятия — приобретение техники вычисления тройных интегралов и определение с их помощью массы и объемов тел. Основной трудностью, с которой сталкиваются в применении тройных интегралов, является определение пределов в трех одномерных интегралах в правой части формулы (3,3). Само же вычисление этих интегралов не должно вызвать, собственно, никаких затруднений.



К задаче 3,1

Задача 3,1. Вычислить тройной интеграл

$$I = \iiint\limits_{(v)} z^2 dx\, dy\, dz,$$

где (v) — тело, ограниченное поверхностью, образованной вращением кривой $y = \sqrt{z}$ вокруг оси Oz и плоскостью $z = h\,(h > 0)$.

Решение. Определим уравнение поверхности вращения (см., например, двадцатое практическое занятие в книге И. А. Каплан. Практические занятия по высшей математике, ч. I. Изд-во ХГУ, 1961).

В уравнении вращающейся линии $y = \sqrt{z}$ переменную z, одноименную с осью вращения Oz, оставляем без изменения, а переменную y заменяем на $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$. Заменяя этим корнем y в уравнении $y = \sqrt{z}$, получаем уравнение поверхности вращения $\pm\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z}$ или $x^2 + y^2 = z$ (параболоид вращения).

Область интегрирования (v) ограничена этой поверхностью и плоскостью $z = h\,(h > 0)$. Проекцией поверхности на плоскость xOy является круг. Уравнение окружности (l), ограничивающей этот круг, получим, исключая z из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2&=z\\ z&=h\end{aligned}\right\}.$$

Уравнение окружности (l): $x^2+y^2=h$. Ее радиус $R=\sqrt{h}$. В области интегрирования (v) переменная z изменяется от ее значения $z=x^2+y^2$ на поверхности параболоида, который снизу ограничивает область (v), до значения $z=h$ на плоскости, ограничивающей эту область сверху, т. е.

$$x^2+y^2\leqslant z\leqslant h$$

(см. фигуру a) на чертеже к этой задаче).

В области (σ_{xy}) переменная y изменяется от ее значения $y=-\sqrt{h-x^2}$ на нижней части окружности, ограничивающей область (σ_{xy}), до значения $y=+\sqrt{h-x^2}$ на верхней части этой окружности, т. е.

$$-\sqrt{h-x^2}\leqslant y\leqslant+\sqrt{h-x^2}.$$

Переменная же x в области (σ_{xy}) изменяется от $-\sqrt{h}$ до $+\sqrt{h}$: $-\sqrt{h}\leqslant x\leqslant+\sqrt{h}$ (см. фигуру $б$) на чертеже к этой задаче).

Формула (3,3) теперь перепишется так:

$$I=\iiint\limits_{(v)}z^2dx\,dy\,dz=\int\limits_{-\sqrt{h}}^{+\sqrt{h}}dx\int\limits_{-\sqrt{h-x^2}}^{+\sqrt{h-x^2}}dy\int\limits_{x^2+y^2}^{h}z^2dz.$$

Вычисление трех одномерных интегралов в этой формуле приведет к достаточно громоздким выкладкам. (Рекомендуется убедиться в этом самостоятельно).

Попытаемся вычислить этот интеграл другим путем, минуя применение формулы (3,3). Распишем вычисляемый интеграл так:

$$I=\iiint\limits_{(v)}z^2\,dx\,dy\,dz=\iint\limits_{(\sigma_{xy})}dx\,dy\int\limits_{x^2+y^2}^{h}z^2\,dz.$$

Это выгодно потому, что в двойном интеграле $\iint\limits_{(\sigma_{xy})}dx\,dy$ областью интегрирования является круг (применена формула (3,2)).

Внутренний интеграл

$$\int\limits_{x^2+y^2}^{h}z^2\,dz=\frac{z^3}{3}\Big|_{x^2+y^2}^{h}=\frac{1}{3}[h^3-(x^2+y^2)^3].$$

Поэтому

$$I=\frac{1}{3}\iint\limits_{(\sigma_{xy})}[h^3-(x^2+y^2)^3]\,dx\,dy.$$

Учитывая наличие в подынтегральной функции выражения x^2+y^2, а также то, что область (σ_{xy}) — круг, при вычислении этого интеграла выгодно перейти к полярным координатам, в которых $x^2+y^2=\rho^2$, а элемент площади равен $\rho\,d\rho\,d\varphi$. Поэтому

$$I=\frac{1}{3}\iint\limits_{(\sigma_{xy})}(h^3-\rho^6)\rho\,d\rho\,d\varphi=\frac{1}{3}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{h}}(h^3-\rho^6)\rho\,d\rho.$$

Переменная ρ при постоянном φ изменяется от 0 до $\sqrt{h}$, а переменная φ — от 0 до 2π.

Внутренний интеграл

$$\int\limits_0^{\sqrt{h}}(h^3-\rho^6)\rho\,d\rho=\left(\frac{h^3\rho^2}{2}-\frac{\rho^8}{8}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{h}}=\frac{h^4}{2}-\frac{h^4}{8}=\frac{3}{8}h^4.$$

Окончательно

$$I=\frac{1}{3}\int\limits_0^{2\pi}\frac{3}{8}h^4\,d\varphi=\frac{1}{8}h^4\,2\pi;$$

$$I=\frac{1}{4}\pi h^4.$$

Однако и это решение можно упростить. Перепишем интеграл в таком виде (формула (3,4а)):

$$I=\iiint\limits_{(v)}z^2\,dx\,dy\,dz=\int\limits_0^h z^2\,dz\iint\limits_{(\sigma_z)}dx\,dy,\qquad (A)$$

где (σ_z) есть сечение тела плоскостью, перпендикулярной оси Oz, лежащей на высоте z, причем $0<z<h$. Это сечение является кругом, радиус которого R равен $\sqrt{z}$, как это следует из уравнения поверхности $x^2+y^2=z$. (Радиусом круга является ордината y при $x=0$).

Внутренний интеграл $\iint\limits_{(\sigma_z)}dx\,dy$ в (A) равен площади этого круга, а потому

$$\iint\limits_{(\sigma_z)}dx\,dy=\pi(\sqrt{z})^2=\pi z.$$

Подставляя это значение в (A), получим

$$I=\int\limits_0^h z^2\pi z\,dz=\pi\int\limits_0^h z^3\,dz=\left(\pi\frac{z^4}{4}\right)\Bigg|_0^h=\frac{\pi h^4}{4}.$$

Совершенно очевидно, что вычисление заданного интеграла этим приемом оказалось несравненно более простым, чем предыдущими двумя. Таким образом, эта задача на вычисление тройного интеграла показывает, что не всегда для его вычисления следует пользоваться основной формулой (3,3), а полезно поискать более простые пути.

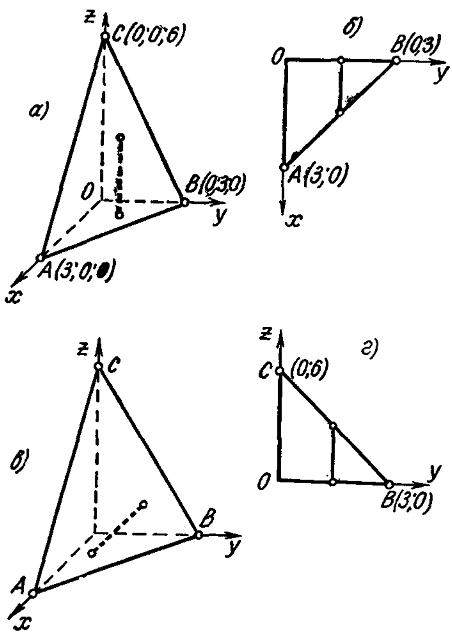
Задача 3,2 (для самостоятельного решения). Вычислить интеграл $I = \iiint\limits_{(v)} z^2\,dx\,dy\,dz$, где (v) — область, ограниченная плоскостями $z = 0$ и $z = h$ и поверхностью, образованной вращением кривой $y = z^2$ вокруг оси Oz.

Ответ. $\frac{\pi h^5}{5}$.

Задача 3,3. Вычислить интеграл $I = \iiint\limits_{(v)} x\,dx\,dy\,dz$, где (v) — тетраэдр, ограниченный координатными плоскостями и плоскостью

$$2x + 2y + z - 6 = 0. \qquad (A)$$

Решение. Тетраэдр ограничен снизу плоскостью $z = 0$, сверху плоскостью $2x + 2y + z - 6 = 0$, на которой $z = 6 - 2x - 2y$. Поэтому в области интегрирования (v) переменная z изменяется от $z = 0$ до $z = 6 - 2x - 2y$ (см. фигуру a) на чертеже к этой задаче).



К задаче 3,3

Проекцией области (v) на плоскость xOy является треугольник OAB. Уравнение прямой AB получим, решая совместно уравнение плоскости (A) и плоскости $z = 0$.

$$\left.\begin{aligned} 2x + 2y + z - 6 &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Отсюда уравнение прямой AB будет $2x + 2y - 6 = 0$ или $x + y - 3 = 0$.

В области (σ_{xy}) переменная y при постоянном x изменяется от ее значения на оси Oy, т. е. от $x = 0$ до ее значения на прямой AB, т. е. до $y = 3 - x$.

Итак,

$$0 \leqslant y \leqslant 3 - x$$

(фигура $б$) на чертеже к этой задаче). Переменная же x в этой области изменяется от 0 до 3:

$$0 \leqslant x \leqslant 3$$

(фигура $б$) на чертеже к этой задаче).

Поэтому

$$I=\iiint\limits_{(v)} x\,dx\,dy\,dz=\int_0^3 x\,dx\int_0^{3-x} dy\int_0^{6-2x-2y} dz.$$

Внутренний интеграл

$$\int_0^{6-2x-2y} dz=(z)\Big|_0^{6-2x-2y}=6-2x-2y.$$

Следовательно,

$$I=\int_0^3 x\,dx\int_0^{3-x}(6-2x-2y)\,dy.$$

Теперь внутренний интеграл

$$\int_0^{3-x}(6-2x-2y)\,dy=(6y-2xy-y^2)\Big|_0^{3-x}=$$

$$=6(3-x)-2x(3-x)-(3-x)^2=9-6x+x^2.$$

Поэтому

$$I=\int_0^3 x(9-6x+x^2)\,dx.$$

Ответ. $I=\frac{27}{4}$.

Эту же задачу рекомендуем решить, меняя порядок интегрирования. Область (v) спроектировать на плоскость yOz, провести первую интеграцию по x, вторую — по z, третью — по y (фиг. *в)* и *г)* на чертеже к этой задаче).

Указание.

$$I=\int_0^3 dy\int_0^{2(3-y)} dz\int_0^{\frac{6-2y-z}{2}} x\,dx.$$

Задача 3,4. Вычислить массу тела, ограниченного поверхностью трехосного эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, если в каждой точке тела плотность равна квадрату ее расстояния от начала координат.

Решение. Квадрат расстояния точки тела от начала координат равен сумме квадратов координат этой точки. Поэтому плотность в каждой точке тела $\gamma(x, y, z)=x^2+y^2+z^2$, а масса тела

$$M=\iiint\limits_{(v)}(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz \qquad \text{(A)}$$

[см. формулу (3,6)].

Представим интеграл в (А) в виде суммы трех интегралов

$$M=\iiint\limits_{(v)} x^2\,dx\,dy\,dz+\iiint\limits_{(v)} y^2\,dx\,dy\,dz+\iiint\limits_{(v)} z^2\,dx\,dy\,dz.$$

Вычислим эти интегралы по формуле (3,3).

Первый интеграл

$$I_1=\iiint\limits_{(v)} x^2\,dx\,dy\,dz.$$

Определим пределы интегрирования по каждой переменной. Чтобы определить пределы интегрирования по z, решим уравнение эллипсоида относительно переменной z:

$$z=\pm c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}.$$

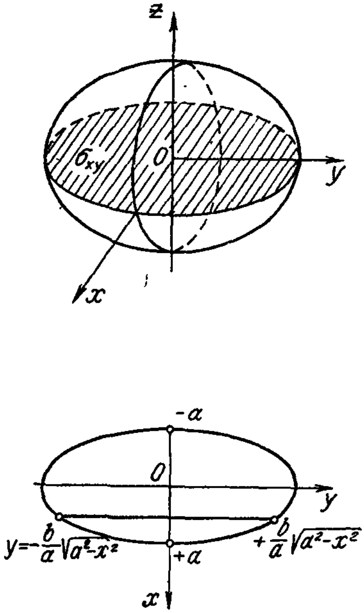
Уравнение той части эллипсоида, которая находится под плоскостью xOy, т. е. его нижней части

$$z=-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}},$$

а уравнение той его части, которая находится над плоскостью xOy, т. е. его верхней части

$$z=+c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}.$$

Спроектируем поверхность эллипсоида на плоскость xOy. Проекцией будет эллипс, уравнение которого мы получим из уравнения эллипсоида, полагая в нем $z=0$. Уравнение этого эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.



К задаче 3,4

При фиксированном x пределы изменения y получим, решая это уравнение относительно y. Из уравнения эллипса

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},$$

а потому y изменяется от $-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ до $+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$.

Переменная же x в этом эллипсе изменяется от $-a$ до $+a$ (см. чертеж). Поэтому

$$\iiint\limits_{(v)} x^2\,dx\,dy\,dz=\int\limits_{-a}^{+a} x^2\,dx\int\limits_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy\int\limits_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{+c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} dz.$$

Выполним три последовательных интегрирования:

$$1)\quad \int\limits_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{+c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} dz = 2c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}.$$

2) Подставим найденное значение под знак второго интеграла и получим

$$\int\limits_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} 2c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dy. \qquad (A)$$

В этом интеграле переменной интегрирования является y, а переменная x должна рассматриваться как величина постоянная. Удобно ввести такую замену

$$1-\frac{x^2}{a^2}=\frac{d^2}{b^2}, \qquad (B)$$

откуда

$$\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)=d^2,$$

а

$$\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}=d. \qquad (C)$$

Подкоренное выражение, стоящее под знаком интеграла (A), с учетом выражения (B) преобразуется так:

$$\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}=\sqrt{\frac{d^2}{b^2}-\frac{y^2}{b^2}}=\frac{1}{b}\sqrt{d^2-y^2}.$$

На основании соотношения (C) пределами интегрирования в (A) будут $-d$ и $+d$. Учитывая, что под интегралом находится четная функция, а также все вышеуказанные замены, интеграл (A) может быть переписан так:

$$\int\limits_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} 2c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dy=\frac{2c\cdot 2}{b}\int\limits_0^d\sqrt{d^2-y^2}\,dy=$$

$$=\frac{4c}{b}\left(\frac{y}{2}\sqrt{d^2-y^2}+\frac{d^2}{2}\arcsin\frac{y}{d}\right)\Bigg|_0^d=\frac{4c}{b}\cdot\frac{d^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

На основании (C)

$$d^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2),$$

а интеграл в (A) равен

$$\frac{\pi c}{b}\cdot\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)=\frac{\pi bc}{a^2}(a^2-x^2).$$

3) Подставляя это значение в исходный интеграл I_1, получим

$$I_1=\iiint\limits_{(v)} x^2\,dx\,dy\,dz=\int\limits_{-a}^{a} x^2\cdot\frac{\pi bc}{a^2}(a^2-x^2)\,dx=$$

$$=\frac{2\pi bc}{a^2}\int\limits_{0}^{a}(a^2x^2-x^4)\,dx=\frac{2\pi bc}{a^2}\left(\frac{a^2x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^a=$$

Учтено, что подынтегральная функция — чётная

$$=\frac{2\pi bc}{a^2}\left(\frac{a^5}{3}-\frac{a^5}{5}\right)=\frac{2\pi bc}{a^2}\cdot\frac{2a^5}{15}=\frac{4}{15}\pi a^3bc.$$

Итак, окончательно

$$\iiint\limits_{(v)} x^2\,dx\,dy\,dz=\frac{4}{15}\pi a^3bc.$$

Остальные два интеграла следует вычислить самостоятельно. Однако не имеет смысла оставлять тот же порядок интегрирования.

При вычислении второго тройного интеграла интегрирование по эллипсу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, лежащему в плоскости xOy, выполнить сначала по x, а третье, последнее интегрирование — по y. Пределами изменения x при постоянном фиксированном y будут

$$-\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}\ \text{ и }\ +\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2},$$

а пределами изменения y будут $-b$ и $+b$.

Поэтому

$$\iiint\limits_{(v)} y^2\,dx\,dy\,dz=\int\limits_{-b}^{+b} y^2\,dy\int\limits_{-\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}}^{+\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}}dx\int\limits_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{+c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}dz.$$

В результате получится число $\frac{4}{15}\pi ab^3c$.

При вычислении третьего интеграла также следует изменить порядок интегрирования. Уравнение поверхности эллипсоида рационально решить относительно переменной y. Окажется, что $y=$ $=\pm b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}}$.

Эллипсоид спроектировать на плоскость xOz. В проекции получится эллипс, определяемый уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

На этом эллипсе при постоянном z переменная x изменяется от значения $x=-\frac{a}{c}\sqrt{c^2-z^2}$ до значения $x=+\frac{a}{c}\sqrt{c^2-z^2}$, а переменная z от $-c$ до $+c$.

Поэтому

$$\iiint\limits_{(v)} z^2\,dx\,dy\,dz=\int\limits_{-c}^{c} z^2\,dz\int\limits_{-\frac{a}{c}\sqrt{c^2-z^2}}^{\frac{a}{c}\sqrt{c^2-z^2}} dx\int\limits_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}}}^{+b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}}} dy.$$

Должно получиться число $\frac{4}{15}\pi abc^3$.

Таким образом, масса тела

$$M=\frac{4}{15}\pi a^3bc+\frac{4}{15}\pi ab^3c+\frac{4}{15}\pi abc^3.$$

Окончательно

$$M=\frac{4}{15}\pi abc\,(a^2+b^2+c^2).$$

Заметим, что, если бы мы при вычислении второго и третьего интегралов не изменяли порядка интегрирования, то, как легко убедиться, выкладки значительно усложнились бы. Рекомендуется это проверить.

Теперь покажем, как можно эту задачу решить значительно проще, минуя формулу (3,3), а применяя формулы (3,4), (3,4*а*) и (3,4*б*).

Вычислим для примера третий интеграл

$$I_3=\iiint\limits_{(v)} z^2\,dx\,dy\,dz$$

и по формуле (3,4а) перепишем его так:

$$I_3=\int\limits_{-c}^{c} dz\iint\limits_{(\sigma_z)} z^2\,dx\,dy=\int\limits_{-c}^{c} z^2\,dz\iint\limits_{(\sigma_z)} dx\,dy,$$

где пределы во внешнем интеграле очевидны из уравнения эллипсоида, а (σ_z) (см. пояснения к формуле (3,4а)) — область, ограниченная эллипсом, по которому плоскость, параллельная плоскости xOy, при постоянном z из интервала $(-c, +c)$ пересекает эллипсоид. Интеграл $\iint\limits_{(\sigma_z)} dx\,dy$ равен площади этого сечения, определим полуоси эллипса, получающегося в сечении. Из уравнения эллипсоида, считая, что z — величина постоянная, получаем

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{z^2}{c^2}$$

или

$$\frac{x^2}{a^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)}=1.$$

Полуоси этого эллипса равны:

$$a_1=a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}};\qquad b_1=b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}},$$

а его площадь

$$\pi a_1 b_1=\pi a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\cdot b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}=\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right).$$

Поэтому двойной интеграл

$$\iint\limits_{(\sigma_z)} dx\,dy=\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right),$$

а

$$I_3=\int_{-c}^{c} z^2\cdot\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)dz=2\pi ab\int_0^c z^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)dz=$$

$$=2\pi ab\int_0^c\left(z^2-\frac{z^4}{c^2}\right)dz=2\pi ab\left(\frac{z^3}{3}-\frac{z^5}{5c^2}\right)\Big|_0^c=$$

$$=2\pi ab\left(\frac{c^3}{3}-\frac{c^3}{5}\right)=\frac{4}{15}\pi abc^3.$$

Так же вычисляются и другие два интеграла. Вычисление должно быть выполнено самостоятельно. Читатель, конечно, отдаст предпочтение этому способу решения, на котором он убедился, что не всегда самым простым является механическое применение основных формул.

Задача 3,5 (для самостоятельного решения). Определить массу материального круглого конуса, высота которого равна h, а угол между его осью и образующими равен α, если известно, что плотность в каждой точке пропорциональна n-ой степени расстояния этой точки от плоскости, проведенной через вершину конуса параллельно основанию.

Указание. За ось конуса принять ось Oz (см. чертеж к задаче). Найти уравнение поверхности конуса как поверхности, образованной вращением прямой OC вокруг оси Oz.

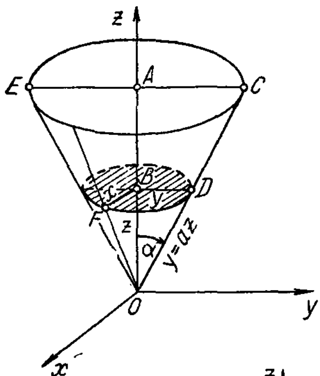
Прямая OC определяется уравнением

$$y = az. \qquad (a = \operatorname{tg} \alpha) \qquad \text{(A)}$$

Уравнение поверхности конуса

$$\sqrt{x^2 + y^2} = az;$$
$$x^2 + y^2 = a^2z^2.$$

Плотность $\rho = kz^n$, где k — коэффициент пропорциональности



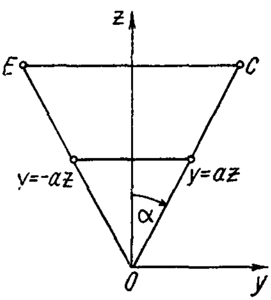
$$M = \iiint\limits_{(v)} kz^n \, dx \, dy \, dz,$$

(v) — указанный конус.

Для вычисления интеграла применить формулу (3,4а)

$$M = k \int\limits_0^h dz \iint\limits_{(\sigma_z)} z^n \, dx \, dy =$$

$$= k \int\limits_0^h z^n dz \iint\limits_{(\sigma_z)} dx \, dy, \quad \text{(A)}$$



К задаче 3,5

где (σ_z) — сечение конуса плоскостью, параллельной плоскости xOy и проходящей через произвольную точку z интервала $(0, h)$. Учесть, что $\iint\limits_{(\sigma_z)} dx \, dy$ равен площади этого сечения, т. е. площади круга, радиус которого $BD = y = az$.

Таким образом,

$$\iint\limits_{(\sigma_z)} dx \, dy = \pi a^2 z^2.$$

Подставляя это значение в (А), получим

$$M = k \int\limits_0^h z^n \pi a^2 z^2 dz.$$

Окончательно

$$M = \frac{k\pi a^2 h^{n+3}}{n+3}.$$

Уместно сравнить это очень простое решение с вычислением исходного интеграла по общей формуле (3,3), в которой внутреннее интегрирование выполним по переменной x, а поверхность конуса спроектируем на плоскость yOz. Проекцией окажется треугольник OCE.

$$M = \iiint\limits_{(v)} kz^n \, dx \, dy \, dz = k\int\limits_0^n z^n \, dz \int\limits_{-az}^{az} dy \int\limits_{-\sqrt{a^2z^2-y^2}}^{\sqrt{a^2z^2-y^2}} dx. \qquad (C)$$

Пределы интегрирования по x определены так: уравнение поверхности конуса решаем относительно переменной x. Окажется, что $x = \pm\sqrt{a^2z^2 - y^2}$.

На поверхности конуса x изменяется от значения $x = -\sqrt{a^2z^2-y^2}$ на «тыловой» части конуса до значения $x = +\sqrt{a^2z^2 - y^2}$ на его передней части.

Переменная y изменяется от ее значения $y = -az$ на прямой OE до значения $y = az$ на прямой OC при фиксированном z, а переменная z от 0 до h.

Внутренний интеграл

$$\int\limits_{-\sqrt{a^2z^2-y^2}}^{\sqrt{a^2z^2-y^2}} dx = 2\sqrt{a^2z^2 - y^2}.$$

Интеграл $2\int\limits_{-az}^{az} \sqrt{a^2z^2 - y^2}\, dy$ удобно вычислить подстановкой $y = az\sin\varphi$, имея в виду, что при вычислении этого интеграла z следует считать величиной постоянной. Новыми пределами интегрирования будут $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$.

Интеграл преобразуется к интегралу

$$2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^2z^2\cos^2\varphi \, d\varphi = \pi a^2z^2.$$

Подставляя это значение в правую часть формулы (С), получим, конечно, прежний ответ. А теперь сравните, насколько этот путь оказался сложнее.

Задача 3,6 (для самостоятельного решения). Вычислить тройной интеграл

$$\iiint\limits_{(v)} xyz \, dx \, dy \, dz,$$

где (v) — тело, ограниченное поверхностями: 1) $y = x^2$; 2) $x = y^2$; 3) $z = xy$ и 4) $z = 0$.

Указание.

$$I = \int\limits_0^1 x \, dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} y \, dy \int\limits_0^{xy} z \, dz$$

Ответ. $\frac{1}{96}$.

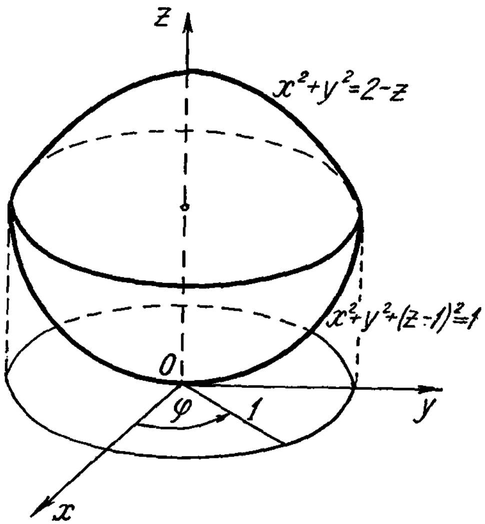
Задача 3,7. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $x^2+y^2+z^2-2z=0$ и $x^2+y^2=2-z$.

Решение. Первая поверхность — сфера, вторая — параболоид вращения (см. чертеж).

Уравнение сферы преобразуем к виду

$$x^2+y^2+(z-1)^2=1. \tag{A}$$

Из этого уравнения видно, что центр сферы находится на оси Oz в точке (0, 0, 1), а ее радиус равен 1.



К задаче 3,7

Найдем уравнение линии, по которой пересекаются эти поверхности. Очевидно, что линией пересечения является окружность. Прежде всего определим, на какой высоте z над плоскостью xOy расположена эта линия.

Подставляя значение x^2+y^2 из второго уравнения в первое, получим уравнение для определения z:

$$(2-z)+z^2-2z=0$$

или

$$z^2-3z+2=0.$$

Решая его, получим, что $z_1=1$; $z_2=2$. Точка, в которой $z=2$, — вершина параболоида, а потому линия пересечения поверхностей находится на высоте $z=1$ над плоскостью xOy.

Уравнение этой линии получим, подставляя $z=1$ в уравнение любой из данных поверхностей. Подставляя, например, $z=1$ во второе уравнение, получим уравнение линии пересечения:

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2&=1 \\ z&=1 \end{aligned}\right\}.$$

Эта окружность без искажения проектируется на плоскость xOy в окружность $x^2+y^2=1$, а все тело проектируется в круг, ограниченный этой окружностью.

По формуле (3,5) объем тела

$$V=\iiint\limits_{(v)} dx\,dy\,dz. \tag{B}$$

Первое интегрирование будем вести по переменной z. Определим пределы изменения этой переменной в области интегрирования. При фиксированных x и y из уравнения (A) сферы

$$z-1=\pm\sqrt{1-(x^2+y^2)},$$

а

$$z=1\pm\sqrt{1-(x^2+y^2)}.$$

На нижней полусфере $z=1-\sqrt{1-(x^2+y^2)}$, а из уравнения параболоида $z=2-(x^2+y^2)$.

Таким образом, в области интегрирования z изменяется от $1-\sqrt{1-(x^2+y^2)}$ до $2-(x^2+y^2)$.

Поэтому формула (B) может быть переписана так:

$$V=\iint\limits_{(\sigma_{xy})} dx\,dy \int\limits_{1-\sqrt{1-(x^2+y^2)}}^{2-(x^2+y^2)} dz\,, \tag{C}$$

где (σ_{xy}) — круг радиуса, равного 1, лежащий в плоскости xOy. Учитывая, что внутренний интеграл

$$\int\limits_{1-\sqrt{1-(x^2+y^2)}}^{2-(x^2+y^2)} dz=2-(x^2+y^2)-1+\sqrt{1-(x^2+y^2)}=$$

$$=1-(x^2+y^2)+\sqrt{1-(x^2+y^2)},$$

формула (C) перепишется так:

$$V=\iint\limits_{(\sigma_{xy})}[1-(x^2+y^2)+\sqrt{1-(x^2+y^2)}]\,dx\,dy.$$

Поскольку под знаком интеграла имеется выражение x^2+y^2, а область интегрирования — круг, удобно перейти к полярным координатам, в которых $x^2+y^2=\rho^2$, а элемент площади $dx\,dy$ следует заменить на $\rho\,d\rho\,d\varphi$.

Поэтому

$$V=\iint\limits_{(\sigma_{xy})}(1-\rho^2+\sqrt{1-\rho^2})\,\rho\,d\rho\,d\varphi.$$

Так как в круге (σ_{xy}) ρ изменяется от 0 до 1, а φ от 0 до 2π, то

$$V=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1(1-\rho^2+\sqrt{1-\rho^2})\,\rho\,d\rho.$$

Внутренний интеграл

$$\int\limits_0^1(1-\rho^2+\sqrt{1-\rho^2})\,\rho\,d\rho=\left(\frac{\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{4}-\frac{1}{2}\,\frac{(1-\rho^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{7}{12},$$

а

$$V=\int_0^{2\pi}\frac{7}{12}\,d\varphi=2\pi\cdot\frac{7}{12}=\frac{7}{6}\pi \text{ куб. ед.}$$

Окончательно

$$V=\frac{7}{6}\pi \text{ куб. ед.}$$

Укажем и другой путь решения задачи: запишем формулу для вычисления объема в виде

$$V=\iiint\limits_{(v_1)}dx\,dy\,dz+\iiint\limits_{(v_2)}dx\,dy\,dz,$$

где (v_1) — область, ограниченная сферой и плоскостью $z=1$, а (v_2) — область, ограниченная этой же плоскостью и поверхностью параболоида.

$I_1=\iiint\limits_{(v_1)}dx\,dy\,dz$ равен объему полушара с радиусом, равным 1, т. е. $\frac{2}{3}\pi$ куб. ед.

Второй интеграл запишем так:

$$I_2=\iiint\limits_{(v_2)}dx\,dy\,dz=\int_1^2 dz\iint\limits_{(\sigma_z)}dx\,dy, \qquad (Д)$$

где (σ_z) — круг, ограниченный окружностью, по которой плоскость, параллельная плоскости xOy, при фиксированном z из промежутка $(1;\ 2)\ (1<z<2)$ пересекает параболоид. (Контур круга (l) — окружность, так как параболоид — параболоид вращения).

Двойной интеграл $\iint\limits_{(\sigma_z)}dx\,dy$ равен площади круга (σ_z). Радиус этого круга получим из уравнения параболоида $x^2+y^2=2-z$, взяв в нем $x=0$, полагая, что радиус лежит в плоскости yOz, а z будем считать величиной фиксированной.

Радиус этого круга y получим из уравнения

$$y^2=2-z;\quad y=\sqrt{2-z}.$$

Площадь же круга равна πy^2, т. е. $\pi(2-z)$.

Итак,

$$\iint\limits_{(\sigma_z)}dx\,dy=\pi(2-z).$$

Поэтому

$$I_2=\pi\int_1^2(2-z)\,dz=\pi\left(2z-\frac{z^2}{2}\right)\Big|_1^2=$$

$$=\pi\left(4-2-2+\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{2} \text{ куб. ед.}$$

Складывая эти два объема, получим

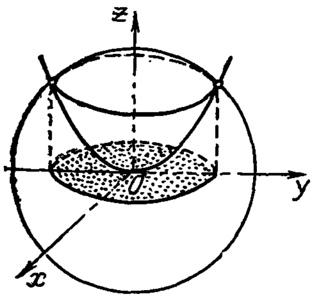
$$V = \frac{2}{3}\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{7}{6}\pi \text{ куб. ед.},$$

т. е. то, что и раньше, но значительно проще.

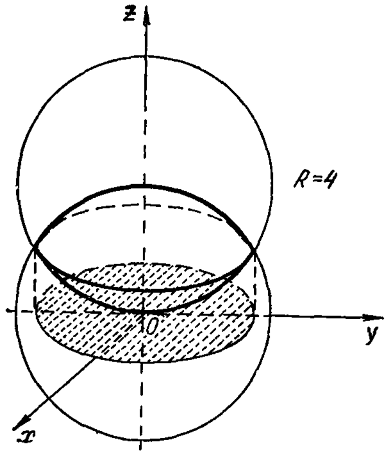
Задача 3,8 (для самостоятельного решения). Найти объем, ограниченный поверхностями $4z = x^2 + y^2$ и $x^2 + y^2 + z^2 = 12$.

Ответ. $V = \frac{8}{3}\pi(6\sqrt{3} - 5)$ куб. ед.

Рекомендуется провести решение двумя способами, как это сделано в предыдущей задаче.



К задаче 3,8



К задаче 3.9

Задача 3,9 (для самостоятельного решения). Найти объем, ограниченный сферами $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ и $x^2 + y^2 + z^2 - 8z = 0$.

Указание.

$$V = \iint\limits_{(\sigma_{xy})} dx\,dy \int\limits_{4-\sqrt{16-(x^2+y^2)}}^{\sqrt{16-(x^2+y^2)}} dz,$$

а (σ_{xy}) — круг, в который проектируется тело на плоскость xOy. Уравнение окружности этого круга $x^2 + y^2 = 12$.

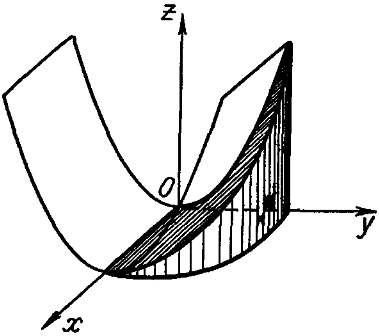
При вычислении двойного интеграла по области (σ_{xy}) удобно перейти к полярным координатам. Должно получиться

$$\iint\limits_{(\sigma_{xy})} dx\,dy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{2\sqrt{3}} (2\sqrt{16 - \rho^2} - 4)\,\rho\,d\rho.$$

Ответ. $\frac{80}{3}\pi$ куб. ед.

Задача 3,10 (для самостоятельного решения). Определить объем тела, ограниченного поверхностями: $y^2 = pz$ $(p > 0)$, $x^2 + y^2 = a^2$ и плоскостью xOy.

Указание. В первом октанте находится четверть тела



К задаче 3,10

$$\frac{v}{4} = \iiint\limits_{(v)} dx\,dy\,dz = \int\limits_0^a dx \int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int\limits_0^{\frac{y^2}{p}} dz. \qquad (A)$$

Решение провести также и по формуле

$$\frac{v}{4} = \iint\limits_{(\sigma_{xy})} dx\,dy \int\limits_0^{\frac{y^2}{p}} dz,$$

где (σ_{xy}) — четверть круга, ограниченного окружностью $x^2 + y^2 = a^2$. Вычисление окажется значительно проще. При вычислении по формуле (А) встретится интеграл

$$\int\limits_0^a (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx.$$

Его удобно вычислить подстановкой $x = a \sin \varphi$. Это приведет к интегралу $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi \, d\varphi$, который легко может быть вычислен (можно воспользоваться и справочником).

Ответ. $V = \frac{\pi a^4}{4p}$ куб. ед.

Тройной интеграл в сферических и цилиндрических координатах

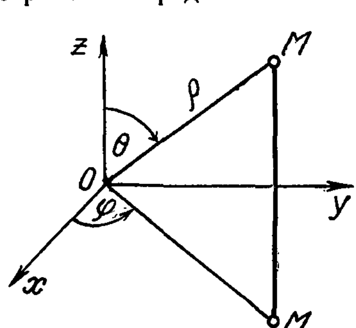
1. Сферические координаты. В сферических координатах (фиг. 3,2) положение точки M в пространстве определяется так.

1) Задается расстояние этой точки от начала координат

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad (3,7)$$

причем $\rho \geqslant 0$.

2) Точка M проектируется на плоскость xOy в точку M_1. Угол φ, составленный OM_1 и осью Ox, является второй сферической координатой точки M. Этот угол отсчитывается от оси Ox против часовой стрелки и может изменяться от 0 до 2π $(0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$.



Фиг. 3,2

В географических координатах этот угол определяет долготу точки на поверхности земли, если за начальный меридиан принята плоскость xOz.

3) Третьей сферической координатой точки M является угол θ между осью Oz и отрезком OM. Этот угол отсчитывается от оси Oz в направлении, указанном на фиг. 3,2 стрелкой. Угол θ может изменяться от 0 до π: $(0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$.

В географических координатах этому углу соответствует дополнение широты точки M до 90°. Это так называемое полярное расстояние точки M.

Таким образом, сферическими координатами точки являются ρ, φ и θ.

2. Формулы, связывающие прямоугольные координаты точки и ее сферические координаты.

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho \sin\theta \cos\varphi \\ y &= \rho \sin\theta \sin\varphi \\ z &= \rho \cos\theta \end{aligned}\right\}. \tag{3,8}$$

Легко проверить, что

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2. \tag{3,9}$$

Это также следует из формулы (3,7). (Сферические координаты точки иногда называются полярными координатами в пространстве).

3. Цилиндрические координаты. В цилиндрических координатах положение точки M в пространстве определяется так.

Точка M проектируется на плоскость xOy и определяются ее полярные координаты ρ и φ. Это первые две цилиндрические координаты.

Третьей цилиндрической координатой является расстояние точки от плоскости xOy, т. е. ее аппликата (иначе ее прямоугольная координата z).

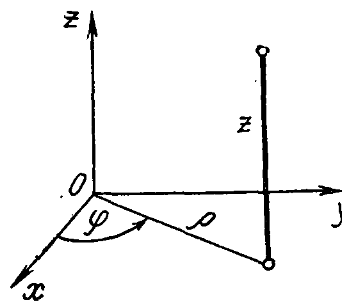
Таким образом, цилиндрическими координатами точки являются ρ, φ и z (фиг. 3,3). Область изменения цилиндрических координат указывается неравенствами $\rho > 0$; $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$; $-\infty < z < +\infty$.

4. Формулы, связывающие прямоугольные и цилиндрические координаты точки.

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho \cos\varphi \\ y &= \rho \sin\varphi \\ z &= z \end{aligned}\right\}. \tag{3,10}$$

5. В сферических координатах элемент объема.

$$dv = \rho^2 \sin\theta \, d\rho \, d\theta \, d\varphi. \tag{3,11}$$



Фиг. 3,3

6. В цилиндрических координатах элемент объема

$$dv = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz. \qquad (3,12)$$

7. Правила для вычисления тройного интеграла в сферических и цилиндрических координатах:

а) для того, чтобы тройной интеграл $\iiint\limits_{(v)} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ преобразовать к сферическим координатам, надо x, y и z в подынтегральной функции заменить по формулам (3,8), а элемент объема $dx\, dy\, dz$ — по формуле (3,11). После этого вычислить его тремя последовательными интегрированиями по переменным ρ, θ и φ. (Порядок интегрирования безразличен). Заметим, что переход к сферическим координатам особенно удобен в том случае, когда областью интегрирования является шар;

б) для того, чтобы тройной интеграл $\iiint\limits_{(v)} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ преобразовать к цилиндрическим координатам, надо x, y и z в подынтегральной функции заменить по формулам (3,10), а элемент объема $dx\, dy\, dz$ — по формуле (3,12). После этого тройной интеграл вычислить тремя последовательными интегрированиями.

8. Формулы для вычисления объема в сферических и цилиндрических координатах.

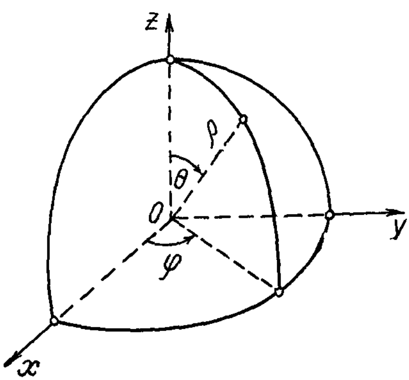
а) В сферических координатах объем тела

$$V = \iiint\limits_{(v)} \rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi. \qquad (3,13)$$

б) В цилиндрических координатах объем тела

$$V = \iiint\limits_{(v)} \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz. \qquad (3,14)$$

Задача 3.11. Определить объем шара радиуса R.



К задаче 3,11

Решение. Будем вести вычисление в сферической системе координат. Центр шара поместим в начало координат. В прямоугольной системе координат уравнение поверхности этого шара, т. е. сферы, записывается так:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Заменяя $x^2 + y^2 + z^2$ через ρ^2 по формуле (3,9), получим уравнение поверхности шара $\rho^2 = R^2$ или $\rho = R$.

Вычислим объем той части шара, которая находится в первом октанте

$$\frac{V}{8}=\iiint\limits_{(v)}\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta\int\limits_0^{R}\rho^2\,d\rho.$$

Внутренний интеграл

$$\int\limits_0^R\rho^2\,d\rho=\frac{R^3}{3}.$$

Поэтому

$$\frac{V}{8}=\frac{R^3}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta.$$

Но

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta=1.$$

Значит,

$$\frac{V}{8}=\frac{R^3}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi=\frac{R^3}{3}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi R^3}{6}.$$

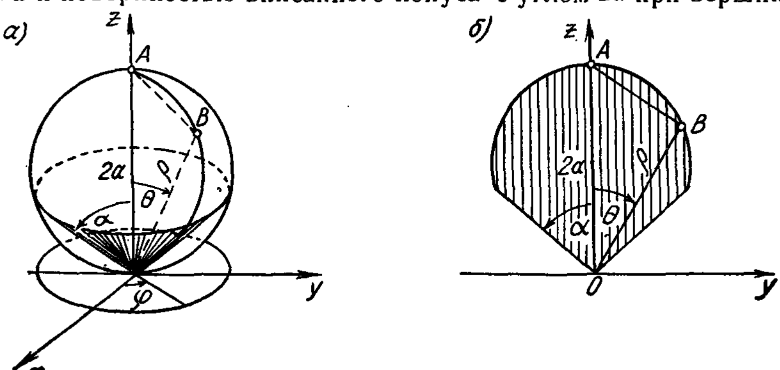
Окончательно объем шара

$$V=\frac{8}{6}\pi R^3;$$

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3\ \text{куб. ед.}$$

Эта формула хорошо известна из элементарной геометрии, но получена она с помощью тройного интеграла в сферических координатах исключительно просто.

Задача 3,12. Вычислить объем тела, ограниченного сферой радиуса a и поверхностью вписанного конуса с углом 2α при вершине.



К задаче 3,12

Решение. Поместим начало координат в вершину конуса, а центр сферы на ось Oz в точку с координатами $(0, 0, a)$. Уравнение поверхности сферы в прямоугольных координатах запишется так:

$$x^2 + y^2 + (z - a)^2 = a^2. \qquad (A)$$

Преобразуем это уравнение к сферическим координатам по формулам (3,8). Подставляя в уравнение (А) значения x, y и z, из этих формул получим

$$\rho^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi + \rho^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi + (\rho\cos\theta - a)^2 = a^2$$

или

$$\rho^2 \sin^2\theta\,(\overbrace{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}^{1}) + \rho^2\cos^2\theta - 2a\rho\cos\theta + a^2 = a^2.$$

После упрощения

$$\rho^2\sin^2\theta + \rho^2\cos^2\theta = 2a\rho\cos\theta;$$
$$\rho^2(\underbrace{\sin^2\theta + \cos^2\theta}_{1}) = 2a\rho\cos\theta.$$

Сокращая на ρ, получаем уравнение (А) в сферических координатах

$$\rho = 2a\cos\theta.$$

Это же уравнение можно было получить и проще: из чертежа а) к этой задаче видно, что в любой точке сферы $\rho = 2a\cos\theta$, так как в треугольнике OAB угол B — прямой как опирающийся на диаметр OA.

Переменные ρ, θ и φ меняются в таких пределах:

1) ρ изменяется от 0 до $2a\cos\theta$ — значения ρ на поверхности сферы;

2) θ изменяется от 0 до α;

3) φ изменяется от 0 до 2π.

Поэтому на основании формулы (3,14)

$$V = \iiint\limits_{(v)} \rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\alpha} \sin\theta\, d\theta \int\limits_0^{2a\cos\theta} \rho^2 d\rho.$$

Внутренний интеграл

$$\int\limits_0^{2a\cos\theta} \rho^2 d\rho = \frac{1}{3}\cdot 8a^3\cos^3\theta.$$

Подставляя это выражение под знак второго интеграла, получим

$$\frac{8}{3}a^3\int\limits_0^\alpha \cos^3\theta\sin\theta d\theta = -\frac{8}{3}a^3\frac{\cos^4\theta}{4}\Big|_0^\alpha = -\frac{2}{3}a^3(\cos^4\alpha - 1) =$$

$$= \frac{2}{3}a^3(1 - \cos^4\alpha).$$

Подставляя это выражение под знак «внешнего» интеграла, получим

$$V = \int\limits_0^{2\pi}\frac{2}{3}a^3(1 - \cos^4\alpha)\,d\varphi = \frac{2}{3}a^3(1 - \cos^4\alpha)\cdot 2\pi.$$

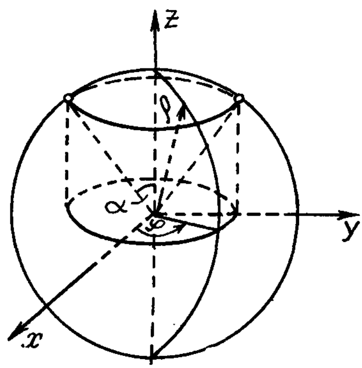
Окончательно

$$V = \frac{4}{3}\pi a^3(1 - \cos^4\alpha) \text{ куб. ед.}$$

Для того, чтобы ощутить упрощение в решении, которое получено введением сферических координат, решите эту же задачу в прямоугольных координатах.

Задача 3,13 (для самостоятельного решения). Вычислить объем шарового сектора, вырезанного у шара радиуса R конусом, вершина которого находится в центре шара, а образующие наклонены к оси Oz под углом α.

У к а з а н и я. 1. Поместить вершину конуса, а тем самым и центр шара в начало координат. Так как поверхность, ограничивающая тело, — шар, то выгодно провести решение в сферических координатах. В отличие от предыдущей задачи, поскольку центр шара находится в начале координат, уравнение его поверхности будет $\rho = R$.



К задаче 3,13

2. Переменные ρ, θ и φ в объеме (V) меняются в таких пределах:

а) переменная ρ от 0 до ее значения R на поверхности шара;

б) переменная θ от 0 до α;

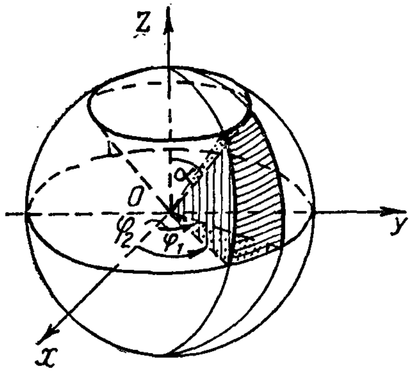
в) переменная φ от 0 до 2π.

О т в е т. $V = \frac{4}{3}\pi R^3\sin^2\frac{\alpha}{2}$ куб. ед.

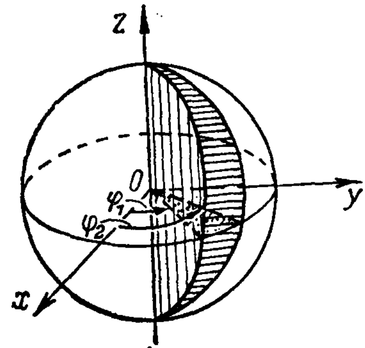
Задача 3,14 (для самостоятельного решения). Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: 1) сферой радиуса a; 2) конусом с вершиной в центре сферы и образующими, наклоненными к оси Oz под углом α; 3) двумя плоскостями, проходящими через ось Oz и составляющими с плоскостью xOz углы φ_1 и φ_2, причем $\varphi_1 < \varphi_2 < \frac{\pi}{2}$; 4) плоскостью xOy.

Указания.

1. Решение провести в сферических координатах. Уравнение поверхности сферы $\rho = a$;



К задаче 3.14



К задаче 3,15

2. В объеме (V) переменные ρ, θ и φ меняются в таких пределах:

а) ρ от 0 до a;

б) θ от α до $\frac{\pi}{2}$;

в) φ от φ_1 до φ_2.

3. $V = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta \int\limits_0^a \rho^2 d\rho.$

Ответ. $V = \frac{a^3}{3}(\varphi_2 - \varphi_1)\cos\alpha$ куб. ед.

Задача 3,15 (для самостоятельного решения). Найти объем части шара радиуса R, заключенной между двумя меридианами, соответствующим долготам φ_1 и φ_2 $\left(\varphi_1 < \varphi_2 < \frac{\pi}{2}\right)$.

Ответ. $V = \frac{2}{3}R^3(\varphi_2 - \varphi_1)$ куб. ед.

Задача 3,16 (для самостоятельного решения). Найти объем тела, ограниченного поверхностями: 1) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$; 2) $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$; $(b > a > 0)$; 3) конусом, образующие которого наклонены к оси Oz под углом α (уравнение такого конуса $\theta = \alpha$); 4) плоскостью $y = x$; 5) плоскостью xOy и 6) плоскостью xOz.

Указание. Перейти к сферическим координатам. Уравнения сфер будут такими: $\rho = a$ и $\rho = b$.

В объеме (V) переменные ρ, θ и φ изменяются так:

a) ρ от a до b;

в) θ от α до $\frac{\pi}{2}$;

с) φ от 0 до $\frac{\pi}{4}$.

Ответ. $V = \frac{\pi}{12}(b^3 - a^3)\cos\alpha$ куб. ед.

Задача 3,17 (для самостоятельного решения). Найти массу части шара радиуса R, находящейся в первом октанте, если в каждой его точке плотность равна расстоянию этой точки от плоскости xOy.

Указание.

1. Плотность $\gamma = z$. По формуле (3,6) искомая масса

$$M = \iiint\limits_{(v)} z dx dy dz.$$

2. Перейти к сферическим координатам. Для этого заменить z по формуле (3,8), а $dx\,dy\,dz$ на элемент объема в сферических координатах — по формуле (3,11).

Ответ. $M = \frac{\pi R^4}{16}$.

Эту же задачу решите в прямоугольных координатах.

Задача 3,18. Вычислить массу тела, ограниченного поверхностями: 1) сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 4$; 2) параболоидом $x^2+y^2=3z$. Плотность γ в каждой точке тела равна аппликате точки: $\gamma = z$ (см. чертеж к задаче 3,8).

Решение. Здесь выгодно перейти к цилиндрическим координатам, так как в уравнении параболоида имеется сумма $x^2 + y^2$, а в цилиндрических координатах, как видно из формул (3,10),

$$x^2 + y^2 = \rho^2.$$

Запишем уравнения поверхностей, ограничивающих тело, в цилиндрических координатах, заменив $x^2 + y^2$ на ρ^2.

Уравнение сферы запишется так:

$$\rho^2 + z^2 = 4; \ \rho^2 = 4 - z^2.$$

Уравнение параболоида $\rho^2 = 3z$.

Из этих уравнений следует, что $z = \frac{\rho^2}{3}$ на параболоиде, $z = \sqrt{4 - \rho^2}$ — на сфере.

Спроектируем тело на плоскость xOy. Проекцией будет круг, ограниченный окружностью, радиус которого равен радиусу той окружности, по которой пересекаются поверхности, так как эта окружность без искажений проектируется на плоскость xOy. Радиус этой окружности проще всего определить так.

Найдем, при каком значении z пересекаются поверхности. Для этого решим совместно уравнения поверхностей, преобразованные уже к цилиндрическим координатам, т. е. определим z из системы уравнений

$$\left.\begin{matrix} \rho^2 = 4 - z^2 \\ \rho^2 = 3z \end{matrix}\right\}.$$

Отсюда, приравнивая правые части этих уравнений, имеем

$$4 - z^2 = 3z; \quad z^2 + 3z - 4 = 0,$$

а

$$z_1 = 1; \quad z_2 = -4.$$

Смыслу задачи удовлетворяет только $z_1 = 1$. Подставляя это значение $z_1 = 1$ в любое из уравнений системы, получим, что $\rho^2 = 3$, а $\rho = \sqrt{3}$.

Итак, радиус круга, в который спроектировалось тело, равен $R = \sqrt{3}$.

Таким образом, в теле переменные z, ρ и φ изменяются в пределах:

а) z от $\frac{\rho^2}{3}$ до $\sqrt{4 - \rho^2}$;

в) ρ от 0 до $\sqrt{3}$;

с) φ от 0 до 2π.

Масса тела

$$M = \iiint\limits_{(v)} z\,dx\,dy\,dz.$$

Поскольку координата z в цилиндрических координатах такая же, как и в прямоугольных, то для вычисления этого тройного интеграла следует только заменить элемент объема $dx\,dy\,dz$ по формуле (3,12) на $\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz$.

Таким образом,

$$M = \iiint\limits_{(v)} z\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{3}} \rho\,d\rho \int\limits_{\frac{\rho^2}{3}}^{\sqrt{4-\rho^2}} z dz.$$

Вычисления проведите самостоятельно — они очень просты.

Ответ. $M = \frac{13}{4}\pi$.

Задача 3,19 (для самостоятельного решения). Вычислить объем той части шара $x^2 + y^2 + z^2 = 4R^2$, которая лежит внутри цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$.

Указание. Перейти к цилиндрическим координатам, заменив в уравнениях поверхностей x^2+y^2 на ρ^2

$$V = 2\iiint\limits_{(v)} \rho d\rho\, d\varphi\, dz = 2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{R} \rho d\rho \int\limits_0^{\sqrt{4R^2-\rho^2}} dz.$$

Ответ. $V = \frac{4}{3}\pi R^3 (8 - 3\sqrt{3})$ куб. ед.

Задача 3,20 (для самостоятельного решения). Вычислить объем, ограниченный поверхностями $x^2+y^2=R^2$; $x^2+y^2=z$; $z=0$.

Указание. Перейти к цилиндрическим координатам.

Ответ. $V = \frac{\pi R^4}{2}$ куб. ед.

ЧЕТВЕРТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Вычисление статических моментов, координат центра тяжести и моментов инерции плоских фигур и тел.

Упражнения этого практического занятия являются продолжением упражнений в вычислении двойных и тройных интегралов.

ФОРМУЛЫ ДЛЯ СПРАВОК

1. Статические моменты площадей плоских фигур. Статические моменты плоской фигуры (σ) S_x и S_y относительно координатных осей Ox и Oy вычисляются при помощи двойных интегралов по формулам

$$S_x = \iint\limits_{(\sigma)} \gamma(x, y)\, y\, dx\, dy; \quad S_y = \iint\limits_{(\sigma)} \gamma(x, y)\, x\, dx\, dy, \qquad (4,1)$$

где $\gamma(x, y)$ — плотность распределения масс.

Если фигура однородна, то $\gamma(x, y) = \text{const}$, которую в приложениях часто принимают равной 1. В этом случае формулы (4,1) принимают вид

$$S_x = \iint\limits_{(\sigma)} y\, dx\, dy; \quad S_y = \iint\limits_{(\sigma)} x\, dx\, dy. \qquad (4,2)$$

Если вычисления ведутся в полярных координатах, то $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, а элемент площади $dx\, dy$ должен быть заменен на $\rho d\rho d\varphi$.