Указание. Перейти к цилиндрическим координатам, заменив в уравнениях поверхностей x^2+y^2 на ρ^2

$$V=2\iiint\limits_{(v)}\rho d\rho\, d\varphi\, dz=2\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^R\rho d\rho\int\limits_0^{\sqrt{4R^2-\rho^2}}dz.$$

Ответ. $V=\frac{4}{3}\pi R^3(8-3\sqrt{3})$ куб. ед.

Задача 3,20 (для самостоятельного решения). Вычислить объем, ограниченный поверхностями $x^2+y^2=R^2$; $x^2+y^2=z$; $z=0$.

Указание. Перейти к цилиндрическим координатам.

Ответ. $V=\frac{\pi R^4}{2}$ куб. ед.

ЧЕТВЕРТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Вычисление статических моментов, координат центра тяжести и моментов инерции плоских фигур и тел.

Упражнения этого практического занятия являются продолжением упражнений в вычислении двойных и тройных интегралов.

ФОРМУЛЫ ДЛЯ СПРАВОК

1. Статические моменты площадей плоских фигур. Статические моменты плоской фигуры (σ) S_x и S_y относительно координатных осей Ox и Oy вычисляются при помощи двойных интегралов по формулам

$$S_x=\iint\limits_{(\sigma)}\gamma(x,y)\,y\,dx\,dy;\quad S_y=\iint\limits_{(\sigma)}\gamma(x,y)\,x\,dx\,dy,\tag{4,1}$$

где $\gamma(x,y)$ — плотность распределения масс.

Если фигура однородна, то $\gamma(x,y)=\text{const}$, которую в приложениях часто принимают равной 1. В этом случае формулы (4,1) принимают вид

$$S_x=\iint\limits_{(\sigma)}y\,dx\,dy;\quad S_y=\iint\limits_{(\sigma)}x\,dx\,dy.\tag{4,2}$$

Если вычисления ведутся в полярных координатах, то $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, а элемент площади $dx\,dy$ должен быть заменен на $\rho d\rho d\varphi$.

Формулы (4,2) перепишутся так:

$$S_x = \iint\limits_{(\sigma)} \rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi; \quad S_y = \iint\limits_{(\sigma)} \rho^2 \cos\varphi d\rho d\varphi. \tag{4,3}$$

2. **Координаты центра тяжести площади плоской фигуры** вычисляются по формулам

$$x_c = \frac{\iint\limits_{(\sigma)} \gamma(x, y)\, x dx\, dy}{\iint\limits_{(\sigma)} \gamma(x, y)\, dx\, dy}; \quad y_c = \frac{\iint\limits_{(\sigma)} \gamma(x, y)\, y\, dx\, dy}{\iint\limits_{(\sigma)} \gamma(x, y)\, dx\, dy}, \tag{4,4}$$

где x_c и y_c — соответственно абсцисса и ордината центра тяжести фигуры.

Если фигура однородна, то плотность $\gamma(x, y) = \text{const}$. Эта величина может быть вынесена за знак интеграла в числителе и знаменателе и сокращена. Формулы (4,4) перепишутся так:

$$x_c = \frac{\iint\limits_{(\sigma)} x\, dx\, dy}{\iint\limits_{(\sigma)} dx\, dy}; \quad y_c = \frac{\iint\limits_{(\sigma)} y\, dx\, dy}{\iint\limits_{(\sigma)} dx\, dy}. \tag{4,5}$$

(Знаменатели этих дробей — площадь фигуры, центр тяжести которой отыскивается).

В полярные координаты эти формулы преобразовываются так же, как и формулы (4,2) (см. выше).

3. **Моменты инерции площади плоской фигуры** относительно координатных осей вычисляются по формулам

$$I_x = \iint\limits_{(\sigma)} \gamma(x, y)\, y^2\, dx\, dy; \quad I_y = \iint\limits_{(\sigma)} \gamma(x, y)\, x^2\, dx\, dy. \tag{4,6}$$

Если фигура однородна, то плотность $\gamma(x, y) = \text{const}$ и если она принимается равной единице, то формулы (4,6) приобретают вид

$$I_x = \iint\limits_{(\sigma)} y^2\, dx\, dy; \quad I_y = \iint\limits_{(\sigma)} x^2\, dx\, dy. \tag{4,7}$$

Преобразование этих формул к полярным координатам производится по тем же правилам, что и формул (4,2). (Моменты инерции относительно координатных осей часто называются осевыми моментами инерции).

В задачах, которые решаются на этом практическом занятии, все размеры указаны в сантиметрах.

I. Определение статических моментов и координат центра тяжести площади плоской фигуры *

Задача 4,1. Определить статические моменты S_x и S_y однородной фигуры, лежащей в первой четверти, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ и координатными осями.

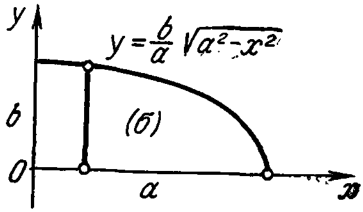
Решение. В области интегрирования (σ) переменные x и y изменяются в таких пределах:

переменная y от 0 до $\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$;

переменная x от 0 до a.

Поэтому по формулам (4,2) получаем

$$S_x = \iint\limits_{(\sigma)} y\,dx\,dy = \int\limits_0^a dx \int\limits_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} y\,dy.$$



К задаче 4,1

Внутренний интеграл

$$\int\limits_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} y\,dy = \left(\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2), \text{ а } S_x = \frac{1}{2}\frac{b^2}{a^2}\int\limits_0^a (a^2 - x^2)\,dx =$$

$$= \frac{b}{2a^2}\left(a^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^a = \frac{b^2}{2a^2}\cdot\frac{2}{3}a^3.$$

$$S_x = \frac{1}{3}ab^2 \text{ см}^3;$$

$$S_y = \iint\limits_{(\sigma)} x\,dx\,dy = \int\limits_0^a x\,dx \int\limits_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy.$$

Вычисления проведите самостоятельно

$$S_y = \frac{1}{3}a^2b \text{ см}^3.$$

Задача 4,2 (для самостоятельного решения). Определить координаты центра тяжести фигуры, указанной в предыдущей задаче.

Указание. Площадь этой фигуры как площадь одной четверти фигуры, ограниченной эллипсом, равна $\frac{\pi ab}{4}$. (Следует вспомнить, что площадь, ограниченная эллипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ равна πab).

Ответ. $x_c = \frac{4}{3}\cdot\frac{a}{\pi}$ см; $y_c = \frac{4}{3}\cdot\frac{b}{\pi}$ см.

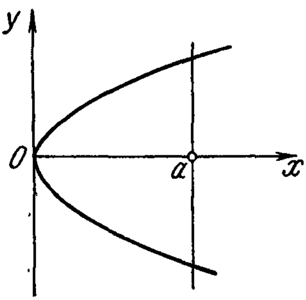
---

* В дальнейшем для сокращения записей в фразе «площади плоской фигуры» слово «площадь» мы опускаем.

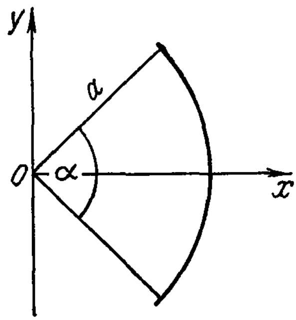
Задача 4,3 (для самостоятельного решения). Определить координаты центра тяжести фигуры, лежащей в первой четверти, ограниченной эллипсом $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ и координатными осями, если в каждой точке фигуры плотность пропорциональна произведению координат этой точки: $\gamma(x, y) = kxy$ (см. чертеж к задаче 4,1).
k — коэффициент пропорциональности.

Указание. Знаменатели дробей в формулах (4,4), (т. е. масса этой фигуры) окажутся равными $\frac{1}{8}ka^2b^2$. Числители дробей равны соответственно $\frac{1}{15}ka^3b^2$ и $\frac{1}{15}ka^2b^3$.

Ответ. $x_c = \frac{8}{15}a$ *см*; $y_c = \frac{8}{15}b$ *см*.



К задаче 4,4



К задаче 4,5

Задача 4,4 (для самостоятельного решения). Определить координаты центра тяжести однородной фигуры, ограниченной кривой $y^2 = 2px$ и прямой $x = a$.

Указание. Учитывая симметрию фигуры относительно оси Ox, легко усмотреть, что центр тяжести лежит на оси Ox, а потому $y_c = 0$. Абсцисса центра тяжести определится по формуле (4,5).

В области (σ) переменные x и y изменяются в таких пределах:
переменная y от $-\sqrt{2px}$ до $+\sqrt{2px}$;
переменная x от 0 до a.

(Пределы интегрирования по y найдены так: из уравнения параболы $y^2 = 2px$ следует, что $y = \pm\sqrt{2px}$).

Ответ. $x_c = \frac{3}{5}a$ *см*.

Интересно отметить независимость полученного результата от параметра параболы.

Задача 4,5. Определить координаты центра тяжести сектора однородного круга радиуса a с центральным углом α, расположенного симметрично относительно оси Ox (см. чертеж).

Решение. Задачу удобно решать в полярных координатах. В формулах (4.5) выгодно перейти к полярным координатам, сделав в них такие замены: $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, а элемент площади $dx\,dy$ должен быть заменен на $\rho d\rho d\varphi$. Тогда окажется, что

$$x_c = \frac{\iint\limits_{(\sigma)} \rho^2 \cos\varphi\, d\rho\, d\varphi}{\iint\limits_{(\sigma)} \rho\, d\rho\, d\varphi}; \quad y_c = \frac{\iint\limits_{(\sigma)} \rho^2 \sin\varphi\, d\rho\, d\varphi}{\iint\limits_{(\sigma)} \rho\, d\rho\, d\varphi}.$$

Нам следует вычислить только x_c, так как из симметрии фигуры относительно оси Ox следует, что $y_c=0$.

В области (σ) переменные ρ и φ изменяются в таких пределах:

переменная ρ от 0 до a;

переменная φ от $-\frac{\alpha}{2}$ до $+\frac{\alpha}{2}$.

Поэтому числитель дроби в выражении для x_c

$$I = \iint\limits_{(\sigma)} \rho^2 \cos\varphi\, d\rho\, d\varphi = \int\limits_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \cos\varphi\, d\varphi \int\limits_0^a \rho^2\, d\rho.$$

Учитывая, что

$$\int\limits_0^a \rho^2\, d\rho = \frac{a^3}{3},$$

получаем

$$I = \frac{a^3}{3}\int\limits_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \cos\varphi\, d\varphi = \frac{a^3}{3}(\sin\varphi)\Bigg|_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} = \frac{2}{3}a^3 \sin\frac{\alpha}{2}.$$

Знаменатель дроби в формуле для x_c

$$I_1 = \iint\limits_{(\sigma)} \rho\, d\rho\, d\varphi = \int\limits_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} d\varphi \int\limits_0^a \rho\, d\rho = \frac{1}{2}a^2\alpha.$$

(Мы могли бы I_1 не вычислять, так как из геометрии известно, что площадь кругового сектора радиуса a с центральным углом α равна половине произведения квадрата радиуса на центральный угол, выраженный в радианах).

Итак,

$$x_c = \frac{\frac{2}{3}a^3 \sin\frac{\alpha}{2}}{\frac{1}{2}a^2\alpha} = \frac{2}{3}a\,\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}}\ \text{см}.$$

Если $\alpha = \pi$, т. е. если сектор является полукругом, то

$$x_c = \frac{4}{3} \cdot \frac{a}{\pi}\ см.$$

Центр тяжести полукруга находится от его диаметра на расстоянии, равном $\frac{4}{3}\frac{a}{\pi}$. Если же $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то

$$x_c = \frac{4}{3}\sqrt{2} \cdot \frac{a}{\pi}\ см.$$

Задача 4,6 (для самостоятельного решения). Найти статический момент однородного полукруга радиуса a относительно его диаметра и расстояние его центра тяжести от этого диаметра.

Указание. Решение провести в полярных координатах. Диаметр круга расположить на оси Ox, а его центр поместить в начало координат. Тогда по первой формуле в (4,3)

$$S_x = \iint\limits_{(\sigma)} \rho^2 \sin\varphi\, d\rho\, d\varphi = \int\limits_0^\pi \sin\varphi\, d\varphi \int\limits_0^a \rho^2\, d\rho;$$

$$S_x = \frac{2}{3} a^3\ см^3.$$

Учитывая, что площадь полукруга равна $\frac{\pi a^2}{2}$, для расстояния центра тяжести от диаметра получаем по второй формуле (4,5)

$$y_c = \frac{4}{3} \cdot \frac{a}{\pi}\ см.$$

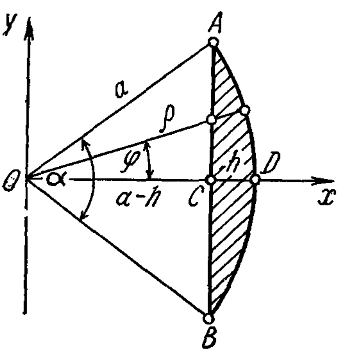
Этот результат уже известен нам из задачи 4,5, только в ней это расстояние было обозначено не через y_c, а через x_c.

Задача 4,7 (для самостоятельного решения). Определить координаты центра тяжести сегмента однородного круга радиуса a, высоты h с центральным углом α (см. чертеж).

Указание. Уравнение линии OA: $y = x \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, а уравнение линии OB: $y = -x \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Решение провести в прямоугольных координатах. Ордината центра тяжести из-за симметрии фигуры относительно оси Ox равна нулю. Абсциссу x_c центра тяжести найти по первой из формул (4,5). В области интегрирования переменные x и y изменяются так:

переменная y от $-\sqrt{a^2 - x^2}$ до $+\sqrt{a^2 - x^2}$

переменная x от $a - h$ до a, но $a - h = a\cos\frac{\alpha}{2}$, а поэтому переменная x изменяется от $a\cos\frac{\alpha}{2}$ до a.



К задаче 4,7

Числитель дроби в указанной формуле

$$\iint\limits_{(\sigma)} x\,dx\,dy = \int\limits_{a\cos\frac{\alpha}{2}}^{a} x\,dx \int\limits_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{+\sqrt{a^2-x^2}} dy$$

Этот интеграл равен

$$\frac{2}{3}a^3\sin^3\frac{\alpha}{2}.$$

Площадь сегмента, равная знаменателю дроби в формулах (4, 5) равна разности площадей сектора $OADBO$ и треугольника OAB и может быть найдена без интегрирования. Учитывая, что площадь треугольника равна половине произведения его сторон на синус угла между ними, т. е. $\frac{1}{2}a^2\sin\alpha$, для площади сегмента получаем $\frac{1}{2}a^2(\alpha-\sin\alpha)$, так как площадь сектора равна $\frac{1}{2}a^2\alpha$. Этот результат полезно получить и вычислением интеграла в знаменателе дроби первой из формул (4,5).

Ответ. $x_c = \frac{4}{3}a\cdot\frac{\sin^3\frac{\alpha}{2}}{\alpha-\sin\alpha}$ *см.*

Полезным упражнением будет решение этой же задачи в полярных координатах. Переменные ρ и φ изменяются в таких пределах:

$$\rho \text{ от } \frac{a-h}{\cos\varphi} \text{ до } a;$$

$$\varphi \text{ от } -\frac{\alpha}{2} \text{ до } \frac{\alpha}{2}.$$

Задача 4,8 (для самостоятельного решения). Определить координаты центра тяжести однородного сектора кругового кольца с внутренним радиусом r, внешним R и центральным углом α (см. чертеж).

Указание. Вычисление провести в полярных координатах, преобразовав формулы (4,5) к этим координатам, как указано выше. В области интегрирования переменные ρ и φ изменяются так:

$$\rho \text{ от } r \text{ до } R;$$

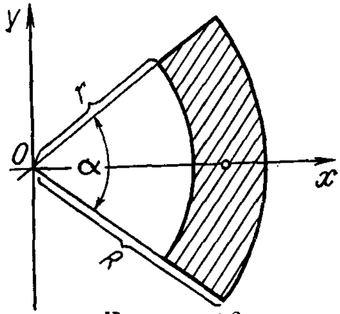
$$\varphi \text{ от } -\frac{\alpha}{2} \text{ до } \frac{\alpha}{2}.$$

Площадь этого кругового кольца равна разности площадей круговых секторов с радиусами r и R.

Ответ.

$$x_c = \frac{4}{3}\cdot\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\alpha}\cdot\frac{R^2+Rr+r^2}{R+r}\text{ см};$$

$$y_c = 0.$$



К задаче 4,8

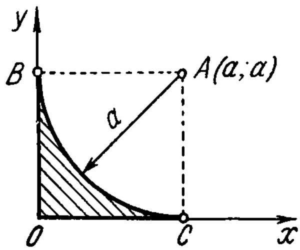
Задача 4,9 (для самостоятельного решения). Определить координаты центра тяжести так называемого кругового треугольника (см. чертеж) — фигуры, ограниченной другой окружностью и координатными осями, которых она касается.

Указание. Уравнение окружности с центром в точке (a, a), радиуса a запишется так:

$$(x-a)^2+(y-a)^2=a^2.$$

Чтобы определить пределы интегрирования, надо решить уравнение окружности относительно переменной y:

$$y=a\pm\sqrt{a^2-(x-a)^2}.$$



К задаче 4,9

На дуге BC $y=a-\sqrt{a^2-(x-a)^2}$. В области интегрирования переменные x и y изменяются в таких пределах:

переменная y от 0 до

$$a-\sqrt{a^2-(x-a)^2};$$

переменная x от 0 до a. При вычислении x_c встретится интеграл

$$I=\int_0^a x\left(a-\sqrt{a^2-(x-a)^2}\right)dx. \qquad \text{(A)}$$

Его удобно представить в виде

$$\int_0^a [(x-a)+a]\left(a-\sqrt{a^2-(x-a)^2}\right)dx=$$

$$=\int_0^a \left[ax-(x-a)\sqrt{a^2-(x-a)^2}-a\sqrt{a^2-(x-a)^2}\right]dx.$$

Интеграл

$$\int_0^a (x-a)\sqrt{a^2-(x-a)^2}\,dx=-\frac{1}{2}\left.\frac{[a^2-(x-a)^2]^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^a.$$

Интеграл

$$\int_0^a \sqrt{a^2-(x-a)^2}\,dx$$

легко вычисляется по формуле

$$\int\sqrt{a^2-u^2}\cdot u'\,dx=\frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{u}{a}.$$

Интеграл $I=\frac{a^3}{12}(10-3\pi)$.

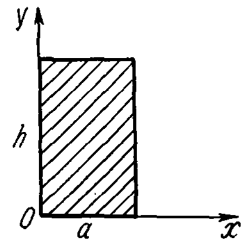
Площадь фигуры — знаменатель в дробях в формулах (4,5) — находится просто: она равна площади квадрата $OBAC$, т. е. a^2 минус площадь четверти круга $\frac{\pi a^2}{4}$ $см^2$. Площадь фигуры OBC равна, таким образом, $\frac{a^2}{4}(4-\pi)$.

Ответ. $x_c = y_c = \frac{a}{3} \cdot \frac{10-3\pi}{4-\pi} \approx 0{,}223\, a$ *см.*

II. Определение моментов инерции плоской фигуры

Задача 4,10. Найти момент инерции прямоугольника относительно его основания и высоты. Основание прямоугольника *a см*, высота *h см*.

Решение. Расположим оси прямоугольной системы координат так, как это показано на чертеже. Моменты инерции прямоугольника отиосительно его основания и высоты есть его моменты инерции относительно осей Ox и Oy соответственно.



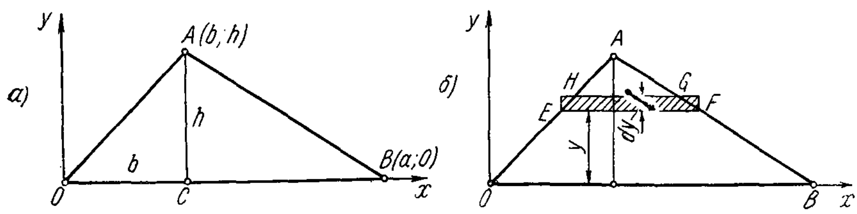
К задаче 4,10

По формулам (4,7) находим

$$I_x = \iint\limits_{(\sigma)} y^2\,dx\,dy = \int\limits_0^a dx \int\limits_0^h y^2\,dy = \frac{ah^3}{3}\,см^4;$$

$$I_y = \iint\limits_{(\sigma)} x^2\,dx\,dy = \int\limits_0^a x^2\,dx \int\limits_0^h dy = \frac{a^3h}{3}\,см^4.$$

Задача 4,11. Найти момент инерции однородного треугольника относительно его основания (см. чертеж).



К задаче 4,11

Решение. Укажем два способа решения этой задачи:

1. Пусть основание треугольника равно *a см*, его высота *h см*, а отрезок основания OC от вершины O до высоты равен *b см* (см. чертеж а).

Уравнение стороны OA будет таким: $y = \frac{h}{b}x$, а уравнение стороны AB: $y = h - h\frac{x-b}{a-b}$ (это уравнение легко найти, пользуясь уравнением прямой, проходящей через две данные точки). В области интегрирования переменные x и y изменяются в таких пределах:

переменная x от $\frac{b}{h}y$ до $-\frac{y-h}{h}(a-b)+b$;

переменная y от 0 до h

$$I_x = \iint\limits_{(\sigma)} y^2\,dx\,dy = \int_0^h y^2\,dy \int\limits_{\frac{b}{h}y}^{-\frac{y-h}{h}(a-b)+b} dx =$$

$$= \int_0^h \left[-\frac{y-h}{h}(a-b)+b-\frac{by}{h}\right] y^2\,dy =$$

$$= \int_0^h \left(a-\frac{ay}{h}\right) y^2\,dy = \left(\frac{ay^3}{3}-\frac{ay^4}{4h}\right)\Bigg|_0^h =$$

$$= \frac{ah^3}{3}-\frac{ah^3}{4} = \frac{ah^3}{12}\ \text{см}^4.$$

Итак, момент инерции треугольника относительно его основания

$$I_x = \frac{ah^3}{12}\ \text{см}^4.$$

2. Перепишем первую формулу в (4,7) так:

$$I_x = \iint\limits_{(\sigma)} y^2\,dx\,dy = \iint\limits_{(\sigma)} y^2\,d\sigma. \qquad (A)$$

Найдем элемент $EFGH$ площади (см. чертеж б) к этой задаче) — площадь прямоугольника с высотой dy и основанием $EF: d\sigma = EF \cdot dy$. Определим EF в зависимости от y.

Из подобия треугольников OAB и EFA

$$\frac{EF}{OB} = \frac{h-y}{h}; \quad EF = a\cdot\frac{h-y}{h},$$

а

$$d\sigma = a\cdot\frac{h-y}{h}\,dy.$$

Если подставить это выражение под знак интеграла в (A), то мы получим одномерный определенный интеграл

$$I_x = \int_0^h y^2\cdot a\cdot\frac{h-y}{h}\,dy$$

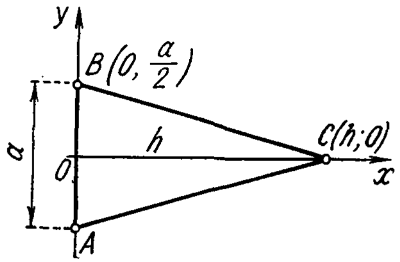
и для I_x получится ранее найденное значение.

Конечно, второе решение проще первого, но его нельзя не признать несколько искусственным. Все-таки проще пользоваться общим приемом, чем каждый раз находить $d\sigma$.

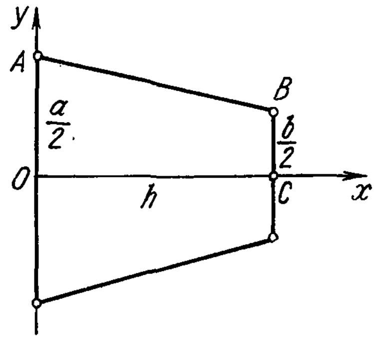
Задача 4, 12 (для самостоятельного решения). Найти моменты инерции однородного равнобедренного треугольника относительно его высоты (см. чертеж). Основание треугольника равно *a см*, высота *h см*.

Указание. Расположить оси, как показано на чертеже. Уравнение стороны BC: $y = \frac{a}{2}\left(1 - \frac{x}{h}\right)$.

Вычислить момент инерции треугольника OBC относительно оси Ox и полученное число умножить на 2, так как момент



К задаче 4,12



К задаче 4,13

инерции треугольника ABC равен удвоенному моменту инерции треугольника OBC.

Ответ. $I_x = \frac{a^3h}{48}$ *см*^{4}.

Задача 4, 13 (для самостоятельного решения). Найти момент инерции однородной равносторонней трапеции относительно прямой, соединяющей середины оснований. Размеры: большее основание равно *a см*, меньшее *b см*, высота *h см*.

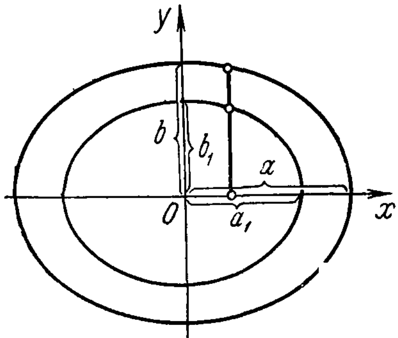
Указание. Расположить оси, как указано на чертеже. Найти момент инерции трапеции $OABC$ и найденное число удвоить. Уравнение стороны AB: $y = \frac{b-a}{2} \cdot \frac{x}{h} + \frac{a}{2}$.

Ответ. $I_x = \frac{h}{48} \cdot \frac{a^4 - b^4}{a - b}$ *см*^{4}.

Задача 4, 14. Определить момент инерции I_x и I_y эллиптического однородного кольца, образованного двумя эллипсами с общим центром и совпадающими осями («концентрические» эллипсы). Оси внешнего эллипса *a см* и *b см*, а внутреннего a_1 *см* и b_1 *см*.

Решение. Вычислим моменты инерции четверти эллиптического кольца, расположенного в первой четверти. Для этого вычислим моменты инерции $I_x^{\text{внешн}}$ и $I_y^{\text{внешн}}$ площади, ограниченной внешним эллипсом и осями координат ($x \geqslant 0$; $y \geqslant 0$), и вычтем из них соответственно моменты инерции $I_x^{\text{внутр}}$ и $I_y^{\text{внутр}}$ площади, ограниченной внутренним эллипсом и осями координат.

В первой четверти на площади, ограниченной внешним эллипсом и осями координат, переменные x и y изменяются в таких пределах:



К задаче 4.14

$$y \text{ от } 0 \text{ до } \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2};$$

$$x \text{ от } 0 \text{ до } a.$$

Поэтому

$$\frac{I_x^{\text{внешн}}}{4} = \int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} y^2\, dy.$$

Внутренний интеграл

$$\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} y^2\, dy = \left(\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{3}\,\frac{b^3}{a^3}(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Поэтому

$$\frac{I_x^{\text{внешн}}}{4} = \frac{1}{3}\cdot\frac{b^3}{a^3}\int_0^a (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\, dx.$$

Для вычисления $\int_0^a (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\, dx$ удобно применить тригонометрическую подстановку: $x = a\sin t$. Пределы интегрирования после подстановки станут равны 0 и $\frac{\pi}{2}$, а

$$\int_0^a (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\, dx = a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t\, dt.$$

С вычислением этого интеграла читатель неоднократно встречался. В результате вычислений окажется, что

$$I_x^{\text{внешн}} = \frac{1}{4}\pi a b^3 \text{ см}^4.$$

Совершенно ясно, что $I_x^{\text{внутр}} = \frac{1}{4}\pi a_1 b_1^3$.

Поэтому

$$I_x = \frac{1}{4}\pi ab^3 - \frac{1}{4}\pi a_1 b_1^3$$

и окончательно момент инерции эллиптического концентрического кольца относительно оси Ox

$$I_x = \frac{\pi}{4}(ab^3 - a_1 b^3)\ см^4. \qquad (A)$$

Докажите самостоятельно, что

$$I_y = \frac{\pi}{4}(a^3 b - a_1^3 b)\ см^4. \qquad (B)$$

Из полученных формул легко определить моменты инерции площади, ограниченной эллипсом, и площади круга. Чтобы получить моменты инерции площади, ограниченной эллипсом, а не эллиптическим кольцом, надо в предыдущих формулах взять $a_1 = 0$ и $b_1 = 0$.

Получим для эллипса

$$I_x = \frac{\pi}{4} ab^3; \quad I_y = \frac{\pi}{4} a^3 b.$$

Так как при $a = b$ эллипс становится окружностью, то для моментов инерции круга из последних формул получаем

$$I_x = I_y = \frac{\pi}{4} a^4\ см^4.$$

Из формул (A) и (B) легко получаются моменты инерции кругового кольца. В этом случае $b = a$, $b_1 = a_1$ и моменты инерции кругового кольца определятся по формулам

$$I_x = I_y = \frac{\pi}{4}(a^4 - a_1^4)\ см^4,$$

где a — радиус внешней окружности, а a_1 — радиус внутренней окружности.

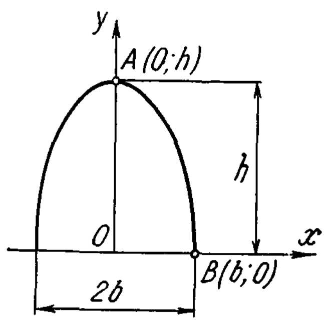
Задача 4, 15 (для самостоятельного решения). Определить момент инерции I_x параболического сегмента с размерами, указанными на чертеже.

Указание. Уравнение параболы имеет вид $y = ax^2 + c$. Параметры a и c определить, учитывая, что парабола проходит через точки $(0, h)$ и $(b, 0)$.

Окажется, что $a = -\frac{h}{b^2}$; $c = h$, уравнение параболы будет таким:

$$y = -\frac{h}{b^2}x^2 + h.$$

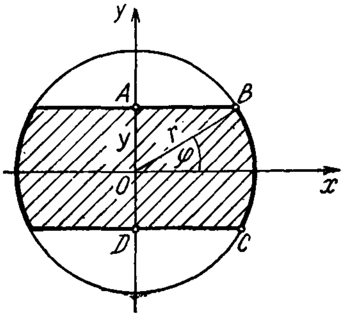
Ответ. $I_x = \frac{32}{105} bh^3\ см^4$.



К задаче 4,15

Задача 4,16 (для самостоятельного решения). Определить относительно оси Ox момент инерции фигуры, изображенной на чертеже.

Указание. Вычислить момент инерции половины площади фигуры, а полученное число удвоить. Так как уравнение окружности $x^2+y^2=r^2$, то переменные x и y в области интегрирования изменяются:



К задаче 4,16

переменная x от 0 до $\sqrt{r^2-y^2}$;
переменная y от 0 до $r\sin\varphi$

(φ — величина постоянная).

$$I_x = 2\iint_{(\sigma)} y^2\,dx\,dy =$$

$$= 2\int_0^{r\sin\varphi} y^2\,dy \int_0^{\sqrt{r^2-y^2}} dx.$$

Интеграл $\int_0^{r\sin\alpha} y^2\sqrt{r^2-y^2}\,dy$ удобно вычислить с помощью тригонометрической подстановки $y=r\sin u$. Пределами интегрирования станут 0 и u. При определении нового верхнего предела окажется, что $\varphi=u$. Поэтому удобно верхний предел обозначить через φ, чтобы он отличался от переменной u, по которой ведется интегрирование.

Заменить $\sin^2 u\cos^2 u$ через $\left(\frac{1}{2}\sin 2u\right)^2=\frac{1}{4}\sin^2 2u$.

Ответ.

$$I_x = \frac{r^4}{2}\left(\varphi-\frac{\sin 4\varphi}{4}\right) см^4.$$

III. Вычисление статических моментов, координат центра тяжести и моментов инерции тел

1. Статические моменты тела относительно координатных плоскостей xOy, yOz и xOz вычисляются по формулам

$$S_{xy}=\iiint_{(v)} \gamma z\,dv;\quad S_{yz}=\iiint_{(v)} \gamma x\,dv;\quad S_{xz}=\iiint \gamma y\,dv. \qquad (4,8)$$

2. Координаты x_c, y_c, z_c центра тяжести тела определяются по формулам:

$$\left.\begin{array}{l} x_c = \dfrac{\iiint\limits_{(v)} \gamma x\, dv}{\iiint\limits_{(v)} \gamma\, dv}; \quad y_c = \dfrac{\iiint\limits_{(v)} \gamma y\, dv}{\iiint\limits_{(v)} \gamma\, dv} \\ z_c = \dfrac{\iiint\limits_{(v)} \gamma z\, dv}{\iiint\limits_{(v)} \gamma\, dv} \end{array}\right\}. \tag{4,9}$$

3. Моменты инерции тела относительно координатных плоскостей вычисляются по формулам:

$$I_{xy} = \iiint\limits_{(v)} \gamma z^2\, dv; \quad I_{yz} = \iiint\limits_{(v)} \gamma x^2\, dx; \quad I_{xz} = \iiint\limits_{(v)} \gamma y^2\, dv. \tag{4,10}$$

4. Моменты инерции тела относительно координатных осей вычисляются по формулам:

$$I_x = \iiint\limits_{(v)} \gamma (y^2 + z^2)\, dv; \; I_y = \iiint\limits_{(v)} \gamma (x^2 + z^2)\, dv; \tag{4,11}$$

$$I_z = \iiint\limits_{(v)} \gamma (x^2 + y^2)\, dv.$$

Момент инерции тела относительно начала координат

$$I_0 = \iiint\limits_{(v)} \gamma\, x^2 + y^2 + z^2)\, dv. \tag{4,12}$$

Во всех этих формулах $\gamma = \gamma(x, y, z)$ — переменная плотность, dv — элемент объема. В случае, если тело однородно, то, применяя эти формулы, часто удобно считать, что $\gamma = 1$.

Если вычисления по этим формулам ведутся в цилиндрических координатах, надо x, y и z заменить по формулам (3, 10), а элемент объема dv — на $\rho\, d\rho\, d\varphi\, dz$.

При вычислении в сферических координатах надо x, y и z заменить по формулам (3,8), а элемент объема dv — на $\rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi$.

В прямоугольных координатах элемент объема

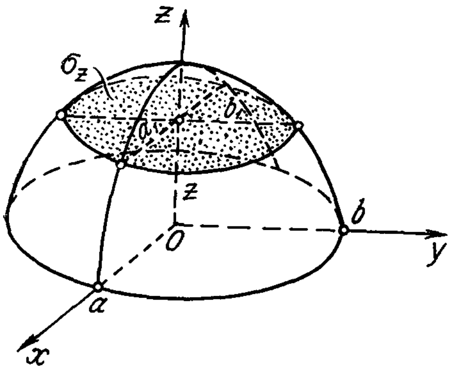
$$dv = dx\, dy\, dz.$$

Задача 4,17. Вычислить координаты центра тяжести однородного тела, расположенного над плоскостью xOy и ограниченного поверхностями

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1; \quad z = 0 \quad (z \geqslant 0).$$

Решение. Воспользуемся формулами (4, 9). Тело по условию однородно, и мы полагаем в них $\gamma = 1$. Из симметрии тела относительно координатных плоскостей xOz и yOz видно, что $x_c = 0$; $y_c = 0$, центр тяжести лежит на оси Oz. Знаменатель дроби в каждой из формул (4, 9) при $\gamma = 1$ — объем тела. Объем тела, ограниченный эллипсоидом, нами уже вычислен в задаче 2,10. Он равен $\frac{4}{3}\pi abc$. Поэтому интересующий нас объем равен половине этого объема, т. е. $\frac{2}{3}\pi abc$.

Остается только вычислить числитель в третьей из формул (4,9). С учетом того, что вычисления ведутся в прямоугольной системе координат, в которых элемент объема $dv = dx\,dy\,dz$, имеем



К задаче 4,17

$$\iiint_{(v)} z\,dv = \iiint_{(v)} z\,dx\,dy\,dz = \int_0^c z\,dz \iint_{(\sigma_z)} dx\,dy, \qquad (A)$$

где σ_z — область, полученная в сечении эллипсоида плоскостью, перпендикулярной оси Oz на расстоянии z от плоскости xOy $(z < c)$. Если считать z величиной фиксированной, то из уравнения эллипсоида следует, что уравнение эллипса в этом сечении

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{z^2}{c^2}$$

или

$$\frac{x^2}{a^2\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)} = 1.$$

Полуоси этого эллипса равны

$$a_1 = a\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}; \quad b_1 = b\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}.$$

Двойной интеграл $\iint_{(\sigma_z)} dx\,dy$ в формуле (A) равен площади этого эллипса, т. е.

$$\iint_{(\sigma_z)} dx\,dy = \pi a_1 b_1 = \pi a\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}} \cdot b\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}} = \pi ab\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right).$$

Поэтому интересующий нас интеграл

$$\iiint\limits_{(v)} z\,dv = \int\limits_0^c z\cdot\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)dz =$$

$$= \pi ab\int\limits_0^c \left(z-\frac{z^3}{c^2}\right)dz = \pi ab\left(\frac{z^2}{2}-\frac{z^4}{4c^2}\right)\Bigg|_0^c =$$

$$= \pi ab\left(\frac{c^2}{2}-\frac{c^2}{4}\right) = \frac{1}{4}\pi abc^2,$$

а

$$z_c = \frac{\frac{1}{4}\pi abc^2}{\frac{2}{3}\pi abc} = \frac{3}{8}c \text{ см.}$$

$$x_c = 0; \quad y_c = 0; \quad z_c = \frac{3}{8} \text{ см.}$$

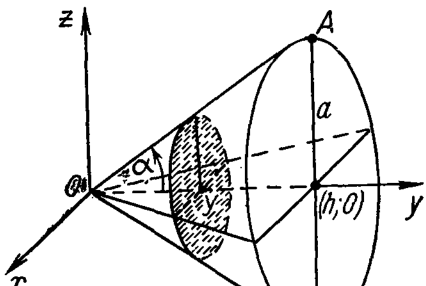
Задача 4,18. Найти координаты центра тяжести однородного кругового конуса, радиус основания которого равен a, а высота h.

Решение. Поверхность конуса образована вращением прямой OA вокруг оси Oy. Уравнение этой прямой $z = y\operatorname{tg}\alpha$. Уравнение поверхности конуса

$$\pm\sqrt{x^2+z^2} = y\operatorname{tg}\alpha,$$

или

$$x^2+z^2 = y^2\operatorname{tg}^2\alpha. \qquad (\text{A})$$



К задаче 4,18

Из симметрии тела относительно координатных плоскостей xOy и yOz ясно, что его центр тяжести лежит на оси Oy, а $x_c = z_c = 0$.

Чтобы вычислить y_c, надо воспользоваться второй из формул (4,9). В этой формуле знаменатель дроби — объем конуса, равный $\frac{1}{3}\pi a^2 h$, а потому нам остается вычислить только числитель этой дроби, т. е.

$$\iiint\limits_{(v)} y\,dv = \iiint\limits_{(v)} y\,dx\,dy\,dz = \int\limits_0^h y\,dy\iint\limits_{(\sigma_y)} dx\,dz, \qquad (\text{B})$$

где (σ_y) — сечение конуса плоскостью, перпендикулярной оси Oy при фиксированном значении $y (O < y < h)$. Этим сечением является круг, радиус которого из уравнения (А) равен

$$r = y\operatorname{tg}\alpha.$$

В уравнении (A) правая часть при постоянном y равна квадрату радиуса.

Двойной интеграл в (B) равен площади этого круга, т. е.

$$\iint\limits_{(\sigma_y)} dx\,dz = \pi r^2 = \pi y^2 \operatorname{tg}^2 \alpha,$$

а потому из формулы (B)

$$\int_0^h y\,dy \iint\limits_{(\sigma_y)} dx\,dz = \int_0^h y \cdot \pi y^2 \operatorname{tg}^2 \alpha\,dy =$$

$$= \pi \operatorname{tg}^2 \alpha \int_0^h y^3\,dy = \pi \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \frac{h^4}{4}.$$

Но $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{h}$, а потому этот интеграл равен

$$\frac{\pi}{4} \cdot \frac{a^2}{h^2} \cdot h^4 = \frac{1}{4}\pi a^2 h^2.$$

Окончательно, деля эту величину на объем конуса, получим, что

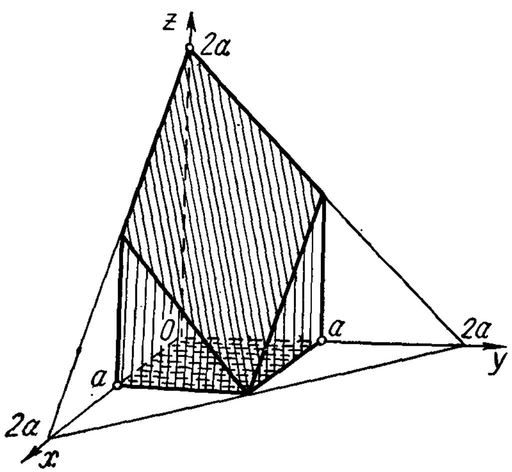
$$y_c = \frac{\frac{1}{4}\pi a^2 h^2}{\frac{1}{3}\pi a^2 h} = \frac{3}{4} h \textit{ см}.$$

Таким образом, центр тяжести однородного кругового конуса лежит на его оси на расстоянии, равном $\frac{3}{4}h$ от вершины.

Задача 4,19 (для самостоятельного решения). Определить координаты центра тяжести однородного тела, ограниченного поверхностями $x + y + z = a$; $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$.

Ответ.

$$x_c = y_c = z_c = \frac{a}{4}.$$



К задаче 4,20

Задача 4,20 (для самостоятельного решения). Определить координаты центра тяжести тела, ограниченного поверхностями $x + y + z = 2a$; $x = a$; $y = a$; $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$.

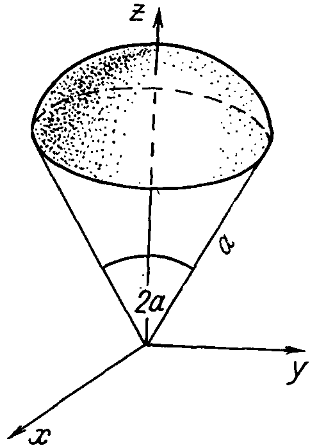
Ответ.

$x_c = \frac{5}{12} a$ *см*; $y_c = \frac{5}{12} a$ *см*; $z_c = \frac{7}{12} a$ *см*.

Задача 4,21. Найти центр тяжести сектора однородного шара радиуса a с телесным углом 2α.

Решение. Разместим оси, как указано на чертеже. Вычисления проведем в сферических координатах. Ясно, что центр тяжести находится на оси Oz, а потому $x_c = y_c = 0$. Координату центра тяжести найдем по третьей формуле в (4,9). После перехода к сферическим координатам ($z = \rho\cos\theta$; $dv = \rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$) получим

$$z_c = \frac{\iiint\limits_{(v)} \rho^3 \sin\theta\cos\theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi}{\iiint\limits_{(v)} \rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi}. \qquad \text{(A)}$$



К задаче 4,21

Переменные ρ, θ и φ в области интегрирования изменяются так:

ρ от 0 до a;
θ от 0 до α;
φ от 0 до 2π.

Знаменатель дроби в этой формуле — объем (v) указанного шарового сектора. В задаче 3,13 этот объем уже вычислен. Вычисляем числитель дроби в (A)

$$\iiint\limits_{(v)} \rho^3 \sin\theta\cos\theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\alpha} \sin\theta\cos\theta\, d\theta \int_0^{a} \rho^3\, d\rho =$$

$$= \frac{a^4}{4}\cdot\frac{\sin^2\alpha}{2}\cdot 2\pi = \frac{1}{4}\pi a^4 \sin^2\alpha.$$

Отсюда

$$z_c = \frac{\frac{1}{4}\pi a^4 \sin^2\alpha}{\frac{4}{3}\pi a^3 \sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{3}{16}a\cdot\frac{4\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Окончательно

$$z_c = \frac{3}{4}a\cos^2\frac{\alpha}{2}\ \text{см}.$$

Задача 4,22 (для самостоятельного решения). Найти координаты центра тяжести клинообразного однородного тела, ограниченного сферой радиуса a, плоскостью xOy и двумя меридианными плоскостями, составляющими с плоскостью xOz углы с соответственно равными φ_1 и φ_2

$$\left(\varphi_1 < \varphi_2 < \frac{\pi}{2}\right).$$

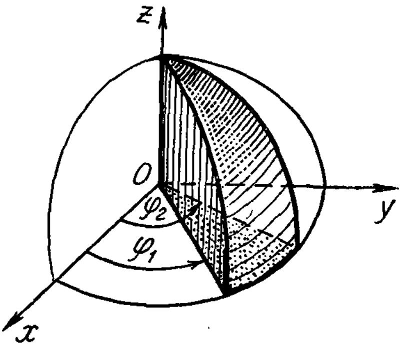
Указание. На основании результата, полученного в задаче 3,15, объем интересующего нас тела

$$V = \frac{1}{3} a^3 (\varphi_2 - \varphi_1).$$

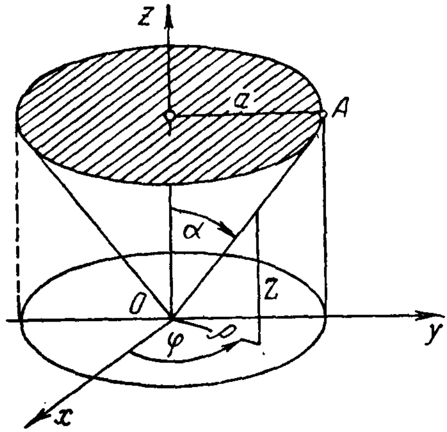
Вычисления провести в сферических координатах. Числители дробей в (4,9) для вычисления x_c, y_c и z_c окажутся соответственно равными

$$I_1 = \iiint\limits_{(v)} \rho^3 \sin^2\theta \cos\varphi \, d\rho \, d\theta \, d\varphi; \quad I_2 = \iiint\limits_{(v)} \rho^3 \sin^2\theta \sin\varphi \, d\rho \, d\theta \, d\varphi;$$

$$I_3 = \iiint\limits_{(v)} \rho^3 \sin\theta \cos\theta \, d\rho \, d\theta \, d\varphi.$$



К задаче 4,22



К задаче 4,23

Переменные ρ, θ и φ в области интегрирования изменяются так:

ρ от 0 до a;

θ от 0 до $\frac{\pi}{2}$;

φ от φ_1 до φ_2.

Указанные выше интегралы окажутся соответственно равными:

$$\frac{\pi a^4}{16}(\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1); \quad \frac{\pi a^4}{16}(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2);$$

$$\frac{a^4(\varphi_2 - \varphi_1)}{8};$$

Ответ. $x_c = \frac{3}{16}\pi a \frac{\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1}{\varphi_2 - \varphi_1}$; $\quad y_c = \frac{3}{16}\pi a \frac{\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2}{\varphi_2 - \varphi_1}$; $z_c = \frac{3}{8} a$.

Задача 4,23 (для самостоятельного решения). Определить момент инерции однородного кругового конуса относительно его оси, если высота конуса равна h *см*, радиус основания a *см*, угол между образующей и высотой конуса равен α.

Указание. Расположить координатные оси, как показано на чертеже. Уравнение поверхности конуса в цилиндрических координатах $z = \rho \operatorname{ctg} \alpha$.

Наличие суммы $x^2 + y^2$ в (4,11) указывает на целесообразность перейти к цилиндрическим координатам, в которых $x^2 + y^2 = \rho^2$, а $dv = \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz$.

В области интегрирования переменные z, ρ и φ изменяются так: z от его значения $z = \rho \operatorname{ctg} \alpha$ на поверхности конуса до $z = h$ на его основании; переменная ρ от 0 до a, а φ — от 0 до 2π. Поэтому

$$I_z = \iiint\limits_{(v)} \rho^2 \cdot \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a \rho^3 \, d\rho \int\limits_{\rho \operatorname{ctg} \alpha}^{h} dz.$$

Ответ. $I_z = \frac{1}{10} \pi a^4 h$ *см*^{5}.

Задача 4,24. Определить момент инерции однородного полого кругового цилиндра относительно его оси (ось Oz). Высота цилиндра равна h *см*, внутренний радиус a *см*, внешний b *см*.

Указание. $I_z = \iiint\limits_{(v)} (x^2 + y^2) \, dv$. Перейти к цилиндрическим координатам.

Ответ. $I_z = \frac{1}{2} \pi h (b^4 - a^4)$ *см*^{5}.

Задача 4,25 (для самостоятельного решения). Определить момент инерции относительно оси Ox однородного тела, ограниченного эллипсоидом

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Указание.

$$I_x = \iiint\limits_{(v)} (y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz = \int\limits_{-a}^{a} dx \iint\limits_{(\sigma_x)} (y^2 + z^2) \, dy \, dz =$$

$$= \int\limits_{-a}^{a} dx \iint\limits_{(\sigma_x)} y^2 \, dy \, dz + \int\limits_{-a}^{a} dx \iint\limits_{(\sigma_x)} z^2 \, dy \, dz, \qquad \text{(A)}$$

где (σ_x) — область, ограниченная эллипсом, по которому плоскость, перпендикулярная оси Ox, при фиксированном x, пересекает эллипсоид. Уравнение этого эллипса получим из уравнения эллипсоида, считая, что в нем x — величина постоянная:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}.$$

Полуоси этого эллипса

$$b_1 = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}; \quad c_1 = c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}. \qquad \text{(B)}$$

Интегралы

$$\iint\limits_{(\sigma_x)} y^2\,dy\,dz \quad \text{и} \quad \iint\limits_{(\sigma_x)} z^2\,dy\,dz$$

равны соответственно моментам инерции этого эллипса относительно его осей c_1 и b_1. В задаче 4,14 моменты инерции эллипса относительно его осей были получены:

$$I_{c_1} = \frac{1}{4}\pi b_1^3 c_1; \quad I_{b_1} = \frac{1}{4}\pi b_1 c_1^3.$$

Подставляя сюда значения b_1 и c_1 из соотношений (В), получим

$$\iint\limits_{(\sigma_x)} y^2\,dy\,dz = I_{c_1} = \frac{1}{4} b^3 c\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^2;$$

$$\iint\limits_{(\sigma_x)} z^2\,dy\,dz = I_{b_1} = \frac{1}{4} bc^3\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^2.$$

Подставляя эти значения в (А) и выполняя интегрирование по x, получим окончательно

$$I_x = \frac{4}{15}\pi abc\,(b^2 + c^2)\ \text{см}^5.$$

Аналогично найдем моменты инерции этого тела относительно осей Oy и Oz:

$$I_y = \frac{4}{15}\pi abc\,(a^2 + c^2)\ \text{см}^5;$$

$$I_z = \frac{4}{14}\pi abc\,(a^2 + b^2)\ \text{см}^5.$$

ПЯТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Криволинейные интегралы.

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

I. Криволинейный интеграл I типа

Пусть на плоскости xOy задана кривая линия (L), в каждой точке которой определена функция $f(x, y)$ двух независимых переменных x и y, предполагаемая непрерывной.

Разобьем дугу AB кривой (L) на n частей точками: $A_0 = A$, A_1, A_2, ..., $A_n = B$. На каждой части A_iA_{i+1} выберем любую точку $M_i(x_i, y_i)$. Вычислим в этой точке значение заданной на кривой функции $f(x, y)$. Число $f(x_i, y_i)$ умножим на длину дуги $A_iA_{i+1} = \Delta S_i$. Сложим все эти произведения. Получится сумма

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i, y_i)\,\Delta S_i.$$