Интегралы

$$\iint\limits_{(\sigma_x)} y^2\,dy\,dz \quad \text{и} \quad \iint\limits_{(\sigma_x)} z^2\,dy\,dz$$

равны соответственно моментам инерции этого эллипса относительно его осей c_1 и b_1. В задаче 4,14 моменты инерции эллипса относительно его осей были получены:

$$I_{c_1} = \frac{1}{4}\pi b_1^3 c_1; \quad I_{b_1} = \frac{1}{4}\pi b_1 c_1^3.$$

Подставляя сюда значения b_1 и c_1 из соотношений (В), получим

$$\iint\limits_{(\sigma_x)} y^2\,dy\,dz = I_{c_1} = \frac{1}{4}b^3 c\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^2;$$

$$\iint\limits_{(\sigma_x)} z^2\,dy\,dz = I_{b_1} = \frac{1}{4}bc^3\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^2.$$

Подставляя эти значения в (А) и выполняя интегрирование по x, получим окончательно

$$I_x = \frac{4}{15}\pi abc\,(b^2+c^2)\ \text{см}^5.$$

Аналогично найдем моменты инерции этого тела относительно осей Oy и Oz:

$$I_y = \frac{4}{15}\pi abc\,(a^2+c^2)\ \text{см}^5;$$

$$I_z = \frac{4}{14}\pi abc\,(a^2+b^2)\ \text{см}^5.$$

ПЯТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Криволинейные интегралы.

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

I. Криволинейный интеграл I типа

Пусть на плоскости xOy задана кривая линия (L), в каждой точке которой определена функция $f(x, y)$ двух независимых переменных x и y, предполагаемая непрерывной.

Разобьем дугу AB кривой (L) на n частей точками: $A_0 = A$, $A_1, A_2, \ldots, A_n = B$. На каждой части A_iA_{i+1} выберем любую точку $M_i(x_i, y_i)$. Вычислим в этой точке значение заданной на кривой функции $f(x, y)$. Число $f(x_i, y_i)$ умножим на длину дуги $A_iA_{i+1} = \Delta S_i$. Сложим все эти произведения. Получится сумма

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i, y_i)\,\Delta S_i.$$

Отыщем предел этой суммы при условии, что наибольшая из дуг A_iA_{i+1} стремится к нулю, а число их $n \to \infty$.

Если функция $f(x, y)$ непрерывна во всех точках дуги AB, то этот предел существует и не зависит ни от способа разбиения дуги AB на части, ни от выбора точки $M(x_i, y_i)$ на каждой из этих частей.

Этот предел называется криволинейным интегралом I типа и обозначается символом

$$\int\limits_{(AB)} f(x, y)\,dS.$$

Таким образом,

$$\lim_{\max \Delta S_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i, y_i)\,\Delta S_i = \int\limits_{(AB)} f(x, y)\,dS.$$

Из этого следует, что кривой (AB) не приписывается определенного иаправления, т. е.

$$\int\limits_{(AB)} f(x, y)\,dS = \int\limits_{(BA)} f(x, y)\,dS.$$

По аналогии с этим, если (AB) — пространственная кривая, то криволинейным интегралом, распространенным на эту кривую, называется интеграл вида

$$\int\limits_{(AB)} f(x, y, z)\,dS,$$

где $f(x, y, z)$ — функция трех независимых переменных, определенная в каждой точке кривой (AB), причем

$$\int\limits_{(AB)} f(x, y, z)\,dS = \lim_{\max \Delta S_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i, y_i, z_i)\,\Delta S_i.$$

II. Формула для вычисления криволинейного интеграла I типа

Если кривая AB задана параметрическими уравнениями

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t) \end{aligned}\right\},$$

а параметр t изменяется на дуге AB от $t = \alpha$ до $t = \beta$, то криволинейный интеграл I типа вычисляется по формуле

$$\int\limits_{(AB)} f(x, y)\,dS = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t), \psi(t)] \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,dt. \qquad (5;1)$$

При этом предполагается, что производные функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — непрерывны.

Если кривая (AB) задана уравнением $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$, то

$$\int\limits_{(AB)} f(x, y)\,dS = \int\limits_{a}^{b} f[x, f(x)] \sqrt{1 + y'^2}\,dx. \qquad (5{,}2)$$

III. Механический смысл криволинейного интеграла I типа

Если в каждой точке кривой (AB) плотность μ масс, расположенных вдоль кривой, является заданной функцией координат этой точки, т. е. $\mu = f(x, y)$, *то масса m этой кривой равна криволинейному интегралу I типа*:

$$m = \int\limits_{(AB)} f(x, y)\, dS. \qquad (5,3)$$

Если масса распределена непрерывно вдоль дуги кривой (AB) с плотностью $\mu = f(x, y)$ в каждой точке этой кривой, то статические моменты s_x и s_y дуги относительно координатных осей Ox и Oy определяются по формулам

$$S_x = \int\limits_{(AB)} yf(x, y)\, ds; \quad S_y = \int\limits_{(AB)} xf(x, y)\, ds. \qquad (5,4)$$

Моменты инерции этой дуги относительно координатных осей равны

$$I_x = \int\limits_{(AB)} y^2 f(x, y)\, ds; \quad I_y = \int\limits_{(AB)} x^2 f(x, y)\, ds. \qquad (5,5)$$

6. Координаты центра тяжести дуги (AB) определяются по формулам

$$x_c = \frac{S_y}{m}; \quad y_c = \frac{S_x}{m}, \qquad (5,6)$$

где m — масса этой дуги.

Формулы (5,6) с учетом формул (5,3) и (5,4) запишутся так:

$$x = \frac{\int\limits_{(AB)} xf(x, y)\, ds}{\int\limits_{(AB)} f(x, y)\, ds}; \quad y_c = \frac{\int\limits_{(AB)} yf(x, y)\, ds}{\int\limits_{(AB)} f(x, y)\, ds}. \qquad (5,7)$$

Если кривая однородна, то плотность $\mu = f(x, y) = \text{const}$, а потому формулы (5,7) запишутся в виде

$$x_c = \frac{\int\limits_{(AB)} x\, ds}{\int\limits_{(AB)} ds}; \quad y_c = \frac{\int\limits_{(AB)} y\, ds}{\int\limits_{(AB)} ds}, \qquad (5,8)$$

где $\int\limits_{(AB)} ds$ — длина дуги AB.

Задача 5,1. Вычислить интеграл $\int\limits_{(AB)} x^2 y\, ds$, где (AB) есть часть окружности $x^2 + y^2 = R^2$, лежащая в первой четверти.

Решение. Уравнение окружности $x^2 + y^2 = R^2$ запишем, выражая явно ординату y через абсциссу x, и применим формулу (5,2).

Из $x^2+y^2=R^2$ следует, что $y=\sqrt{R^2-x^2}$ (перед корнем удержан знак плюс потому, что в первой четверти $y \geqslant 0$). Чтобы применить формулу (5,2), найдем $\sqrt{1+y'^2(x)}$:

$$y'(x)=-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}; \quad y'^2=\frac{x^2}{R^2-x^2}; \quad 1+y'^2=1+\frac{x^2}{R^2-x^2}=$$
$$=\frac{R^2}{R^2-x^2}; \quad \sqrt{1+y'^2}=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}.$$

Поэтому по (5,2)

$$\int\limits_{(AB)} x^2y\,ds=\int\limits_0^R x^2\cdot\underbrace{\sqrt{R^2-x^2}}_{y}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\,dx=R\int\limits_0^R x^2\,dx=R\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^R=\frac{R^4}{3}.$$

В дальнейшем все размеры указаны в сантиметрах.

Задача 5,2 (для самостоятельного решения). Вычислить $I=$ $=\int\limits_{(AB)} x^2y\,ds$, где (AB) — четверть эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, лежащая в первом квадранте.

Указание. Воспользоваться формулой (5,2).

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}; \quad y'=-\frac{b}{a}\,\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}};$$
$$\sqrt{1+y'^2}=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{a^4-(a^2-b^2)\,x^2}{a^2-x^2}};$$
$$I=\int\limits_0^a x^2\cdot\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\cdot\frac{1}{a}\sqrt{\frac{a^4-(a^2-b^2)\,x^2}{a^2-x^2}}\,dx=$$
$$=\frac{b}{a^2}\int\limits_0^a x^2\sqrt{a^4-(a^2-b^2)\,x^2}\,dx.$$

Для вычисления этого интеграла удобно применить подстановку

$$x=\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\sin z.$$

Тогда $\sqrt{a^4-(a^2-b^2)\,x^2}=a^2\cos z$; $dx=\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\cos z\,dz$.

$$I=\frac{b}{a^2}\int\limits_0^{\arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}}\frac{a^4}{a^2-b^2}\sin^2 z\cdot a^2\cos z\cdot\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\cos z\,dz=$$
$$=\frac{a^6b}{(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}}\int\limits_0^{\arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}}\sin^2 z\cos^2 z\,dz=$$
$$=\frac{a^6b}{8\,(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}}\left(z-\frac{1}{4}\sin 4z\right)\Big|_0^{\arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}}.$$

Учесть, что: 1)

$$\sin^2 z\cos^2 z = \left(\frac{1}{2}\sin 2z\right)^2 = \frac{1}{4}\sin^2 2z = \frac{1}{8}(1-\cos 4z)$$

2)

$$\sin 4z = 4\sin z\cos z(1-2\sin^2 z).$$

Ответ.

$$I = \frac{a^6 b}{8(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} - \frac{b(2b^2-a^2)\sqrt{a^2-b^2}}{a^4}\right).$$

Задача 5,3 (для самостоятельного решения). Вычислить $\int\limits_{(AB)}(y-x)\,ds$, где (AB) — дуга кубической параболы $y = x^3$ от точки $(1,1)$ до точки $(2,8)$.

Указание. Воспользоваться формулой (5,2). Под интегралом заменить y на x^3. На дуге (AB) x изменяется от 1 до 2:

$$I = \int\limits_1^2 (x^3 - x)\sqrt{1+9x^4}\,dx; \quad I_1 = \int\limits_1^2 x^3\sqrt{1+9x^4}\,dx;$$

$$I_2 = \int\limits_1^2 x\sqrt{1+9x^4}\,dx.$$

При вычислении I_2 удобна подстановка $3x^2 = z$. Изменить пределы интегрирования: $z = 3$ при $x = 1$;

$z = 12$ при $x = 2$.

$$I_2 = \frac{1}{6}\int\limits_3^{12}\sqrt{1+z^2}\,dz = \frac{1}{6}\left[\frac{z}{2}\sqrt{1+z^2} + \frac{1}{2}\ln\left(z+\sqrt{1+z^2}\right)\right]\Bigg|_3^{12}.$$

Ответ.

$$\frac{1}{5}\left(145^{\frac{3}{2}} - 10^{\frac{3}{2}}\right) - \frac{1}{6}\left(6\sqrt{145} - \frac{3}{2}\sqrt{10} + \ln\sqrt{\frac{12+\sqrt{145}}{3+\sqrt{10}}}\right)$$

Задача 5,4. Найти центр тяжести полуокружности $x^2 + y^2 = R^2$, лежащей в верхней полуплоскости, а также ее момент инерции относительно оси Ox. Плотность считать равной единице.

Решение. Центр тяжести дуги кривой определяется по формулам (5,8). Из соображений симметрии ясно, что он находится на оси Oy. Поэтому $x_c = 0$.

Ордината центра тяжести

$$y_c = \frac{\int\limits_{(AB)} y\,ds}{\int\limits_{(AB)} ds}.$$

Знаменатель этой дроби — длина полуокружности. Поэтому

$$\int\limits_{(AB)} ds = \pi R.$$

Для вычисления числителя воспользуемся параметрическими уравнениями окружности

$$\left.\begin{aligned} x &= R\cos t \\ y &= R\sin t \end{aligned}\right\}. \tag{A}$$

Дифференциал дуги $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = R\,dt$

$$\int\limits_{(AB)} y\,ds = \int\limits_0^{\pi} R\sin t \cdot R\,dt = R^2 \int\limits_0^{\pi} \sin t\,dt = R^2(-\cos t)\Big|_0^{\pi} = 2R^2;$$

$$y_c = \frac{2R^2}{\pi R} = \frac{2R}{\pi}\ см.$$

Итак, искомые координаты центра тяжести

$$x_c = 0; \quad y_c = \frac{2R}{\pi}\ см.$$

Из решения этой задачи следует, что статический момент полуокружности относительно стягивающего ее диаметра $S_d = 2R^2\ см^2$.

По первой формуле (5,5) момент инерции относительно оси с учетом, что плотность равна единице:

$$I_x = \int\limits_{(AB)} y^2\,ds.$$

Из (A) следует, что $y^2 = R^2\sin^2 t$, и учитывая, что $ds = R\,dt$, получим

$$\int\limits_{(AB)} y^2\,ds = \int\limits_0^{\pi} R^3\sin^2 t\,dt = R^3 \int\limits_0^{\pi} \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt = \frac{\pi R^3}{2}\ см^3.$$

Задача 5,5 (для самостоятельного решения). Найти центр тяжести одной арки циклоиды

$$x = a(t - \sin t);\ y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

Считать плотность равной единице.

Указание. Воспользоваться формулами (5,8). Учесть, что знаменатель дробей в этих формулах $\int\limits_{(AB)} ds$ — длина дуги одной арки циклоиды, равная $8a$ (она вычислена в третьей книге автора «Практические занятия по высшей математике»).

Учитывая симметрию, сразу заключаем, что абсцисса центра тяжести $x_c = \pi a$. Ордината центра тяжести $y_c = \frac{\int\limits_{(\breve{AB})} y\,ds}{\int\limits_{(\breve{AB})} ds}$.

Дифференциал дуги

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = 2a \sin\frac{t}{2}\,dt; \quad \int\limits_{\breve{AB}} ds = 8a.$$

$$\int\limits_{(\breve{AB})} y\,ds = \int\limits_0^{2\pi} a(1 - \cos t) \cdot 2a \sin\frac{t}{2}\,dt = 2a^2 \int\limits_0^{2\pi} (1 - \cos t) \sin\frac{t}{2}\,dt =$$

$$= 2a^2 \int\limits_0^{2\pi} 2\sin^2\frac{t}{2} \cdot \sin\frac{t}{2}\,dt = 4a^2 \int\limits_0^{2\pi} \sin^3\frac{t}{2}\,dt = \frac{32}{3}a^2.$$

Ответ. $x_c = \pi a$ *см*; $y_c = \frac{4}{3}a$ *см.*

Задача 5,6 (для самостоятельного решения). Определить центр тяжести дуги астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, лежащей в первой четверти $\left(0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$. Плотность считать равной единице.

Ответ. $x_c = y_c = \frac{2}{5}a$ *см.*

Задача 5,7 (для самостоятельного решения). Вычислить статический момент относительно координатных осей прямолинейного отрезка (AB), соединяющего точки (a, a) и (b, b) $(b > a)$. Плотность в каждой точке отрезка равна произведению координат этой точки.

Указание. Воспользоваться формулами (5,4).

$$S_x = \int\limits_{(\breve{AB})} y(xy)\,ds; \quad S_y = \int\limits_{(\breve{AB})} x \cdot (xy)\,ds.$$

Уравнение отрезка AB: $y = x$; $ds = \sqrt{1 + y'^2}\,dx = \sqrt{2}dx$

Ответ. $S_x = S_y = \frac{\sqrt{2}}{4}(b^4 - a^4)\,см^4$.

Задача 5,8 (для самостоятельного решения). Найти массу кривой $y = x^2$ от точки $x = 0$ до $x = \sqrt{2}$, если в каждой точке кривой плотность равна квадрату ее абсциссы.

Указание. Использовать формулу (5,4), в которой $f(x, y) = x^2$, а $ds = \sqrt{1 + 4x^2}\,dx$. Интеграл $\int x^2\sqrt{1 + 4x^2}\,dx$ записать в виде

$$\int \frac{x^2(1 + 4x^2)}{\sqrt{1 + 4x^2}}\,dx = (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\sqrt{1 + 4x^2} + E\int \frac{dx}{\sqrt{1 + 4x^2}}.$$

Коэффициенты A, B, C, D, E определить на основании указаний задачи 9,33 в третьей части этой книги.

Ответ. Масса $m = \frac{17\sqrt{2}}{32} - \frac{1}{64}\ln(2\sqrt{2} + 3)$.

Задача 5,9 (для самостоятельного решения). Найти массу участка кривой $y = \ln x$ от точки с абсциссой $x_1 = \sqrt{3}$ до точки с абсциссой $x_2 = 2\sqrt{2}$, если плотность в каждой точке равна квадрату ее абсциссы.

Указание. $ds = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx.$

Ответ. $m = \frac{19}{3}$.

Задача 5,10 (для самостоятельного решения). Найти массу кривой $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ на участке от $x = 0$ до $x = a$, считая, что в каждой точке плотность обратно пропорциональна ординате этой точки.

Указание. Дифференциал дуги $ds = \operatorname{ch} \frac{x}{a} dx$; $m = \int\limits_0^a \frac{k}{y} ds$.

Ответ. $m = k$, где k — коэффициент пропорциональности.

II. Криволинейные интегралы II типа

Пусть во всех точках дуги AB плоской кривой (L) определена функция двух независимых переменных $P(x, y)$.

Дугу AB разобьем на n частичных дуг точками $A_0 = A$; $A_1, A_2, \ldots A_i, A_{i+1}, \ldots, A_n = B$. На каждой из частичных дуг выберем произвольную точку $M_i(x_i, y_i)$. В этой точке вычислим значение функции $P(x, y)$. Полученное число $P(x_i, y_i)$ умножим на $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ — проекцию дуги A_iA_{i+1} на ось Ox и получим произведение $P(x_i, y_i)\Delta x_i$.

Сложив все такие произведения, получим сумму

$$\sum_{i=0}^{n-1} P(x_i, y_i)\Delta x_i.$$

Если функция $P(x, y)$ непрерывна во всех точках дуги AB, а сама эта дуга не имеет особых точек, то существует предел $\sum\limits_{i=0}^{n-1} P(x_i, y_i)\Delta x_i$ при стремлении всех Δx_i к нулю, и он не зависит ни от способа разбиения дуги AB на части, ни от выбора точки M_i на каждой частичной дуге. Этот предел *называется криволинейным интегралом II типа от $P(x, y)\,dx$ по дуге (AB) и обозначается символом* $\int\limits_{(AB)} P(x, y)\,dx$, т. е.

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} P(x_i, y_i)\Delta x_i = \int\limits_{(AB)} P(x, y)\,dx.$$

Если бы значение функции $P(x, y)$ в точке $M_i(x_i, y_i)$, т. е. $P(x_i, y_i)$, мы умножили не на Δx_i, а на Δy_i, т. е. на проекцию дуги A_iA_{i+1} на ось Oy, то получили бы произведение $P(x_i, y_i)\Delta y_i$. Предел суммы таких произведений при условии, что все Δy_i стремятся к нулю, был бы также криволинейным интегралом II типа и обозначался бы так: $\int\limits_{(\overset{\smile}{AB})} P(x, y)\,dy$;

$$\lim_{\Delta y_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} P(x_i, y_i)\Delta y_i = \int\limits_{(\overset{\smile}{AB})} P(x, y)\,dy.$$

В том случае, когда на дуге (AB) заданы две непрерывные функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, то можно рассмотреть криволинейные интегралы:

$$\int\limits_{(\overset{\smile}{AB})} P(x, y)\,dx \quad \text{и} \quad \int\limits_{(\overset{\smile}{AB})} Q(x, y)\,dy. \tag{A}$$

Сумму этих двух интегралов обозначают символом

$$\int\limits_{(\overset{\smile}{AB})} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy. \tag{5,9}$$

(При этом предполагается, что оба интеграла (А) вычисляются в одном и том же направлении).

Свойства криволинейного интеграла II типа

1. При изменении направления интегрирования криволинейный интеграл II типа меняет знак на противоположный, т. е.

$$\int\limits_{(\overset{\smile}{AB})} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = -\int\limits_{(\overset{\smile}{BA})} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$$

(для криволинейного интеграла I типа направление интегрирования роли не играет).

2. Если точка C находится внутри дуги AB, то криволинейный интеграл

$$\int\limits_{(\overset{\smile}{AB})} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \int\limits_{(\overset{\smile}{AC})} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy + \\ + \int\limits_{(\overset{\smile}{CB})} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy.$$

Если (L) — замкнутая кривая, то криволинейный интеграл II типа определяется так же. В этом случае следует обязательно указывать направление интегрирования, причем положительным направлением обхода замкнутого контура по условию считается то, при котором область, которую ограничивает этот контур, остается слева.

Когда криволинейный интеграл вычисляется по замкнутому контуру, он обозначается символом

$$\oint_{(L)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy,$$

причем на кружке, помещенном на знаке интеграла, указывается стрелкой направление обхода контура.

Формула для вычисления криволинейного интеграла II типа

Вычисление криволинейного интеграла второго типа сводится к вычислению определенного интеграла.

Если кривая (L), по которой вычисляется криволинейный интеграл, задана параметрическими уравнениями $x = \varphi(t)$; $y = \psi(t)$; $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$, где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, а также их производные $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ — непрерывные функции t, то вычисление криволинейного интеграла производится по формуле

$$\int_{(L)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \int_{\alpha}^{\beta} \{P[\varphi(t), \psi(t)]\,\varphi'(t) + Q[\varphi(t), \psi(t)]\,\psi'(t)\}\,dt. \quad (5,10)$$

Если же кривая (L) задана явным уравнением $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$, где $f(x)$ — непрерывная функция, то криволинейный интеграл II типа вычисляется по формуле

$$\int_{(L)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \int_{a}^{b} \{P[x, f(x)] + Q[x, f(x)]\,f'(x)\}\,dx. \quad (5,11)$$

Задача 5,11. Вычислить криволинейный интеграл $\int_{(L)} (x^2+y^2)\,dx$, если (L) — дуга параболы $y = 2x^2$ от точки $x = 2$ до точки $x=4$.

Решение. Кривая задана явным уравнением. Для вычисления интеграла применим формулу (5,10). Эта же формула применяется и для решения задач 5,11—5,16.

Пользуясь уравнением параболы $y = 2x^2$, заменим в подынтегральной функции y^2 на $4x^4$. Тогда

$$\int_{(L)} (x^2 + y^2)\,dx = \int_{2}^{4} (x^2 + 4x^4)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{4}{5}x^5\right)\Bigg|_2^4 = \frac{12184}{15}.$$

Ответ. $\frac{12184}{15}$.

Задача 5,12. Вычислить интеграл $\int\limits_{L} x^2\,dx + \sqrt{x}y\,dy$, где (L) есть четверть окружности $x^2+y^2=R^2$, пробегаемая против часовой стрелки, лежащая в первой четверти.

Решение. Из уравнения окружности $x^2+y^2=R^2$ выразим y в функции от x: $y=\pm\sqrt{R^2-x^2}$. Перед корнем следует удержать знак плюс, так как в первой четверти $y \geqslant 0$. Найдем теперь dy: $dy = -\frac{x\,dx}{\sqrt{R^2-x^2}}$. После подстановки y и dy под знак интеграла подынтегральная функция будет зависеть только от x, а пределы интегрирования по x, учитывая, что интегрирование ведется против часовой стрелки, будут $+R$ и 0.

Таким образом,

$$\int\limits_{(L)} x^2\,dx + \sqrt{x}y\,dy = \int\limits_{R}^{0} x^2\,dx + \sqrt{x}\sqrt{R^2-x^2}\cdot\left(-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)dx =$$

$$= \int\limits_{R}^{0}(x^2 - x\sqrt{x})\,dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5}\right)\Bigg|_R^0 = -\frac{R^3}{3} + \frac{2}{5}R^{\frac{5}{2}} = \frac{1}{15}R^2(6\sqrt{R}-5R).$$

Задача 5,13 (для самостоятельного решения). Вычислить интеграл $\int\limits_{(L)} (x^2-y^2)\,dy$, где (L) — дуга кубической параболы $y=2x^3$ от точки $x=0$ до точки $x=1$.

Указание. Из уравнения кривой следует, что $dy=6x^2\,dx$, а $y^2=4x^6$.

Ответ. $-\frac{22}{15}$.

Задача 5,14 (для самостоятельного решения). Вычислить интегралы: 1) $\int\limits_{(L)} (x^2-y^2)\,dx$, где (L) — дуга параболы $y=x^2$ от точки $x=0$ до точки $x=2$; 2) $\int\limits_{(L)} (x^2-y^2)\,dy$, где (L) — та же дуга, что и в первом интеграле.

Ответ. 1) $-\frac{56}{15}$; 2) $\frac{40}{3}$.

Задача 5,15 (для самостоятельного решения). Вычислить интеграл $I = \int\limits_{(L)} (x-y)\,dx + (x+y)\,dy$, где (L): 1) отрезок прямой, соединяющей точки A (2, 3) и B (3, 5); 2) дуга параболы $y=x^2$ $(0 \leqslant x \leqslant 2)$; 3) дуга параболы $x=y^2$. Соединяющие точки — C (0, 0) и D (4, 2).

Ответ. 1) Уравнение отрезка прямой: $y=2x-1$; $dy=2dx$. $I=\frac{23}{2}$; 2) $\frac{38}{3}$; 3) $dx=2y\,dy$; $I=\frac{22}{3}$.

Задача 5,16. Вычислить интеграл

$$I = \int\limits_{(L)} (2y - 6xy^3)\,dx + (2x - 9x^2y^2)\,dy,$$

где (L) — одна из линий, соединяющих точки $O(0, 0)$ и $A(2, 2)$:

1) отрезок прямой, соединяющий эти точки;

2) парабола $y = \frac{1}{2}x^2$;

3) парабола $x = \frac{1}{2}y^2$;

4) кубическая парабола $y = \frac{1}{4}x^3$.

Решение. 1) Уравнение прямой: $y = x$. Поэтому $dy = dx$. Заменяя в подынтегральном выражении y на x, а dy на dx, получим, что

$$I = \int\limits_0^2 (2x - 6x \cdot x^3)\,dx + (2x - 9x^2 \cdot x^2)\,dx = -88.$$

2) Из уравнения кривой $y = \frac{1}{2}x^2$ следует, что

$$dy = x\,dx.$$

Заменяя в подынтегральном выражении y на $\frac{1}{2}x^2$, а dy на $x\,dx$ получим, что

$$I = \int\limits_0^2 \left[2 \cdot \frac{1}{2}x^2 - 6x\left(\frac{1}{2}x^2\right)^3\right]dx + \left[2x - 9x^2 \cdot \left(\frac{1}{2}x^2\right)^2\right]x\,dx =$$

$$= \int\limits_0^2 (3x^2 - 3x^7)\,dx = -88.$$

3) Так как уравнение линии $x = \frac{1}{2}y^2$, то $dx = y\,dy$. Заменяя в подынтегральном выражении x на $\frac{1}{2}y^2$, а dx на $y\,dy$, получим учитывая, что y изменяется от 0 до 2,

$$I = \int\limits_0^2 \left[2y - 6 \cdot \left(\frac{1}{2}y^2\right)\right]y\,dy + \left[2 \cdot \frac{1}{2}y^2 - 9 \cdot \left(\frac{1}{2}y^2\right)^2 \cdot y^2\right]dy =$$

$$= \int\limits_0^2 \left(3y^2 - \frac{21}{4}y^6\right)dy = y^3 - \frac{3}{4}y^7\Big|_0^2 = 8 - \frac{3}{4} \cdot 128 = -88.$$

4) Убедитесь самостоятельно, что в этом случае $I = -88$.

Итак, по какой бы из указанных кривых, соединяющих точки $(0, 0)$ и $(2, 2)$, мы ни вычисляли этот интеграл, оказывается, что он равен одному и тому же числу. Иначе говоря, величина заданного интеграла не зависит от того, по какой из указанных кривых, соединяющих эти точки, он вычисляется. Можно показать, что и вообще величина этого интеграла по любой кривой, соединяющей две заданные точки, окажется одной и той же.

Этот интеграл также равен —88, если его вычислить и по ломанной OCA, состоящей из отрезка OC оси Ox и отрезка CA прямой $x = 2$.

В этом случае на отрезке OC $y = 0$; $dy = 0$. По отрезку OC $I = 0$ вследствие того, что под знаком интеграла взять $y = 0$ и $dy = 0$.

На отрезке CA: $x = 2$, $dx = 0$, y изменяется от 0 до 2

$$I = \int_0^2 (2 \cdot 2 - 9 \cdot 2^2 y^2)\,dy = (4y - 12y^3)\Big|_0^2 = -88.$$

Самостоятельно докажите, что этот интеграл равен —88, если его вычислить по ломанной OBA. На отрезке OB $x = 0$, на BA $y = 2$, $dy = 0$ (дифференциал постоянной величины равен нулю).

Решение этой задачи показывает, что подынтегральное выражение в криволинейном интеграле II типа может быть таким, что величина интеграла не зависит от той линии, по которой ведется интегрирование, а определяется только координатами начальной и конечной точек этой линии. (В таком случае говорят, что криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования). Ниже будет указано условие, которому должно подчиняться подынтегральное выражение $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$ в криволинейном интеграле II типа, для того чтобы этот интеграл не зависел от пути интегрирования, соединяющего две данные точки.

ШЕСТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание. Условие независимости криволинейного интеграла по координатам от пути интегрирования. Интегрирование дифференциальных уравнений, левая часть которых есть полный дифференциал.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

I. Условие независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования

В общем случае при одном и том же подынтегральном выражении величина криволинейного интеграла зависит от формы пути, по которому он вычисляется (иначе говоря, от кривой, по которой он берется) и от координат начальной и конечной точек этого пути.