кривых, соединяющих эти точки, он вычисляется. Можно показать, что и вообще величина этого интеграла по любой кривой, соединяющей две заданные точки, окажется одной и той же.

Этот интеграл также равен —88, если его вычислить и по ломанной OCA, состоящей из отрезка OC оси Ox и отрезка CA прямой $x = 2$.

В этом случае на отрезке OC $y = 0$; $dy = 0$. По отрезку OC $I = 0$ вследствие того, что под знаком интеграла взять $y = 0$ и $dy = 0$.

На отрезке CA: $x = 2$, $dx = 0$, y изменяется от 0 до 2

$$I = \int_0^2 (2 \cdot 2 - 9 \cdot 2^2 y^2)\, dy = (4y - 12y^3)\Big|_0^2 = -88.$$

Самостоятельно докажите, что этот интеграл равен —88, если его вычислить по ломанной OBA. На отрезке OB $x = 0$, на BA $y = 2$, $dy = 0$ (дифференциал постоянной величины равен нулю).

Решение этой задачи показывает, что подынтегральное выражение в криволинейном интеграле II типа может быть таким, что величина интеграла не зависит от той линии, по которой ведется интегрирование, а определяется только координатами начальной и конечной точек этой линии. (В таком случае говорят, что криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования). Ниже будет указано условие, которому должно подчиняться подынтегральное выражение $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$ в криволинейном интеграле II типа, для того чтобы этот интеграл не зависел от пути интегрирования, соединяющего две данные точки.

ШЕСТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание. Условие незавнсимости криволинейного интеграла по координатам от пути интегрирования. Интегрирование дифференциальных уравнений, левая часть которых есть полный дифференциал.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

1. Условие независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования

В общем случае при одном и том же подынтегральном выражении величина криволинейного интеграла зависит от формы пути, по которому он вычисляется (иначе говоря, от кривой, по которой он берется) и от координат начальной и конечной точек этого пути.

Вместе с тем последний интеграл предыдущего практического занятия представляет пример такого криволинейного интеграла, величина которого не зависит от формы пути интегрирования, а определяется только координатами начала и конца этого пути. Если так случается, то говорят, что криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования.

Определение. *Криволинейный интеграл*

$$\int\limits_{(\breve{AB})} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy$$

называется независящим от формы пути интегрирования в области (D), если каковы бы ни были точки A и B, принадлежащие области (D), значение этого интеграла остается одним и тем же независимо от того, по какой линии с началом в точке A и концом в точке B он вычисляется, лишь бы эта линия целиком лежала в области (D).

Односвязная область. Конечная область (D) называется ***односвязной****, если она ограничена единственным замкнутым контуром.* (Иначе говоря, односвязность области означает, что в ней отсутствуют «дыры», а это в свою очередь позволяет любой замкнутый контур, лежащий внутри такой области, стянуть в точку, не выходя за пределы этой области).

Приведем теорему, которая указывает необходимое и достаточное условие для того, чтобы криволинейный интеграл не зависел от формы пути интегрирования.

Теорема. Если функция $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ определены и непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в замкнутой ограниченной односвязной области (D), то, для того чтобы криволинейный интеграл

$$\int\limits_{(\breve{AB})} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy \tag{A}$$

не зависел от формы пути интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы во всех точках этой области выполнялось условие

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{6,1}$$

Напомним, что:

1) условие (6,1) является необходимым и достаточным для того, чтобы выражение $P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy$ являлось полным дифференциалом некоторой однозначной функции, определенной

---

* Для неодносвязной области эта теорема в общем случае неверна.

в области (D). Поэтому можно утверждать, что для того, чтобы криволинейный интеграл не зависел от пути интегрирования (AB), а только от его концов, необходимо и достаточно, чтобы подынтегральное выражение $Pdx+Qdy$ было полным дифференциалом некоторой функции.

2) Если выполняется условие (6,1), т. е. если выражение $Pdx+Qdy$ является полным дифференциалом некоторой функции, то криволинейный интеграл (A), взятый по любому замкнутому контуру, лежащему в односвязной ограниченной замкнутой области (D), равен нулю.

Обозначение. Если путь, по которому вычисляется криволинейный интеграл (A) безразличен, то употребляется обозначение

$$\int\limits_{(x_0,\ y_0)}^{(x_1,\ y_1)} P(x,\ y)\,dx+Q(x,\ y)\,dy, \tag{B}$$

где $(x_0,\ y_0)$ и $(x_1,\ y_1)$ координаты начала и конца пути интегрирования, а в качестве пути интегрирования в этом случае обыкновенно выбирается самый простой путь — отрезок прямой, соединяющий точки $(x_0,\ y_0)$ и $(x_1,\ y_1)$.

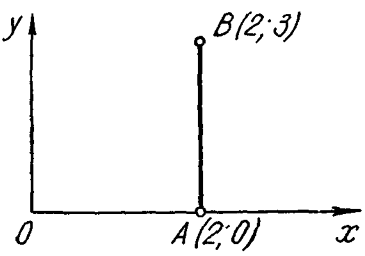
Задача 6,1. Выяснить, будет ли криволинейный интеграл

$$I=\int\limits_{AB}(6xy+4y^2+5y)\,dx+(3x^2+8xy+5x)\,dy$$

зависеть от формы пути интегрирования.

Решение. Здесь функция $P(x,\ y)=6xy+4y^2+5y$, а функция $Q(x,\ y)=3x^2+8xy+5x$.

Интеграл не будет зависеть от формы пути интегрирования, если будет выполнено условие (6,1). Чтобы проверить его выполнение, найдем частные производные: от функции $P(x,\ y)$ по независимой переменной y, а от функции $Q(x,\ y)$ по независимой переменной x. (Заметим для запоминания, что функция $P(x,\ y)$ умножается под знаком интеграла на дифференциал переменной x, частная производная от нее берется по переменной y, а функция $Q(x,\ y)$ умножается в подынтегральном выражении на дифференциал переменной y частная же производная от нее берется по переменной x).



К задаче 6,1

$$\frac{\partial P}{\partial y}=6x+8y+5;\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=6x+8y+5;\quad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Условие (6,1) выполнено — предложенный криволинейный интеграл не зависит от формы пути интегрирования.

Вычислим этот интеграл по пути, соединяющему начало координат с точкой $A(2,3)$. Так как от формы пути, как мы показали, интеграл не зависит, то самым простым путем интегрирования явится отрезок прямой, соединяющий начало координат с точкой $A(2,3)$. Уравнение пути интегрирования: $y = \frac{3}{2}x$.

Поэтому, подставляя под знак интеграла $\frac{3}{2}x$ вместо y, получим

$$I = \int_0^2 \left(6x \cdot \frac{3}{2}x + 4\left(\frac{3}{2}x\right)^2 + 5 \cdot \frac{3}{2}x\right)dx +$$

$$+ \left(3x^2 + 8x \cdot \frac{3}{2}x + 5x\right) \cdot \frac{3}{2}dx = \int_0^2 \left(\frac{81}{2}x^2 + 15x\right)dx =$$

$$= \left(\frac{81}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{15}{2}x^2\right)\Big|_0^2 = \frac{81}{2} \cdot \frac{8}{3} + \frac{15}{2} \cdot 4 = 138.$$

$\left(\text{учтено, что если } y = \frac{3}{2}x, \text{ то } dy = \frac{3}{2}dx\right)$.

Для упражнения этот же интеграл вычислить по ломаной OAB и убедиться что, получится 138 (на OA переменная y равна 0, на AB переменная x равна 2, а y изменяется от 0 до 3).

Задача 6,2 (для самостоятельного решения). Убедиться, что интеграл

$$I = \int_{AB} (6xy^2 + 4x^3)\,dx + (6x^2y + 3y^2)\,dy$$

не зависит от формы пути интегрирования. После этого вычислить его по отрезку прямой, соединяющей точки (2,3) и (3,4).

Указание. $P(x, y) = 6xy^2 + 4x^3$; $Q(x, y) = 6x^2y + 3y^2$.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 12xy; \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 12xy; \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Уравнение прямой, соединяющей точки (2,3) и (3,4): $y = x + 1$; $dy = dx$.

В подынтегральном выражении заменить y на $x + 1$, а dy на dx. Под интегралом будет функция одной переменной x, пределы интегрирования: нижний 2, верхний 3.

Задачу можно было поставить так. Вычислить интеграл

$$I = \int_{(2,3)}^{(3,4)} (6xy^2 + 4x^3)\,dx + (6x^2y + 3y^2)\,dy.$$

Но такая запись допустима только в том случае, когда заранее известно, что интеграл не зависит от формы пути интегрирования, т. е. что условие $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ выполнено.

Ответ. 426.

Задача 6,3 (для самостоятельного решения). Выяснить, будет ли интеграл

$$\int\limits_{(\breve{AB})} (2xy - 5y^3)\, dx + (x^2 - 15xy^2 + 6y)\, dy$$

зависеть от пути интегрирования и вычислить его по линии AB, соединяющей точки (0,0) и (2,2).

Указание. Вычислить $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$. Убедиться, что $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} (= 2x - 15y^2)$.

За линию AB принять прямую, соединяющую указанные точки. Ее уравнение: $y = x$.

Ответ. -60.

Задача 6,4 (для самостоятельного решения). Вычислить интеграл

$$\int\limits_{(1,1)}^{(3,2)} \frac{x}{(x+y)^2}\, dx + \frac{2x+y}{(x+y)^2}\, dy.$$

Указание. Прежде всего убедиться, что $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. За путь интегрирования выбрать прямую, соединяющую точки (1,1) и (3,2). Ее уравнение $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

Ответ. $\ln\frac{5}{2} - \frac{1}{10}$.

Задача 6,5. Будет ли криволинейный интеграл

$$\oint\limits_{(L)} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{3y^2}{x^4}\right) dx - \frac{2y}{x^3}\, dy,$$

взятый по замкнутому контуру, равен нулю?

Решение. Из 2) на стр. 110 следует, что при выполнении условия $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ **криволинейный интеграл**, взятый по любому замкнутому контуру, равен нулю. Поэтому, чтобы ответить на вопрос задачи, следует только убедиться в том, что условие это выполнено. У нас

$$P(x, y) = \frac{1}{x^2} + \frac{3y^2}{x^4}; \quad Q(x, y) = -\frac{2y}{x^3}.$$

Поэтому

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{6y}{x^4}; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{2y}{x^6} 3x^2 = \frac{6y}{x^4}.$$

Значит, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ и на вопрос задачи следует дать утвердительный ответ: заданный интеграл, если его взять по замкнутому контуру, равен нулю. Однако следует указать, что этот контур не должен ни охватывать, ни проходить через точку с абсциссой $x = 0$.

Задача 6,6. Будет ли криволинейный интеграл

$$\oint\limits_{(L)} (x^2 + y^2)(x\,dx + y\,dy),$$

где (L) замкнутый контур, равен нулю? Подтвердить полученное заключение непосредственным вычислением по какому-нибудь замкнутому контуру.

Решение. Проверим, является ли подынтегральное выражение полным дифференциалом. У нас

$$P(x, y) = x^3 + xy^2; \quad Q(x, y) = x^2y + y^3;$$
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2xy.$$

Этим доказано, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, и, значит, можно утвердительно ответить на вопрос задачи: по замкнутому контуру заданный интеграл равен нулю.

Теперь подтвердим это заключение непосредственным вычислением этого интеграла по какому-нибудь замкнутому контуру. В качестве такого контура выберем, например, окружность единичного радиуса с центром в начале координат. Параметрические уравнения такой окружности

$$\left.\begin{aligned} x &= \cos t \\ y &= \sin t \end{aligned}\right\}. \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

Тогда $x^2 + y^2 = 1$; $dx = -\sin t\,dt$;

$x\,dx = -\sin t \cos t\,dt$; $y = \sin t$; $dy = \cos t\,dt$; $y\,dy = \sin t \cos t\,dt$.

Подынтегральное выражение $(x^2 + y^2)(x\,dx + y\,dy) =$

$$= 1(-\sin t \cos t\,dt + \sin t \cos t\,dt) = 0.$$

По этому контуру интеграл равен нулю. По любому другому замкнутому контуру он также окажется равным нулю.

Уравнение окружности можно было задать и не параметрическими уравнениями, а в виде $x^2 + y^2 = 1$. Тогда, дифференцируя, получим: $2x\,dx + 2y\,dy = 0$ или $x\,dx + y\,dy = 0$. Поэтому подынтегральная функция равна нулю.

Этот же интеграл вычислить по периметру треугольника с вершинами в точках $(0,0)$; $(1,0)$; $(1,1)$.

Задача 6,7 (для самостоятельного решения). Вычислить интеграл

$$\int\limits_{(3,4)}^{(5,12)} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + y\right) dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + x\right) dy,$$

убедившись сначала, что он не зависит от пути интегрирования.

Ответ. 56.

Задача 6,8 (для самостоятельного решения). Убедившись, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, вычислить следующие интегралы:

$$(1) \int\limits_{(2,\,1)}^{(1,\,2)} \left(2xy^2 + 3x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{2x}{y^2}\right) dx + \Big(2x^2y + 3y^2 + \frac{1}{y^2} - \frac{2x^2}{y^3}\ dy$$

(вдоль путей, не пересекающих координатных осей и не проходящих через начало координат).

$$2) \int\limits_{(2,1)}^{(5,\,3)} \frac{-y^2\,dx + x^2\,dy}{(x-y)^2}$$

(вдоль путей, которые не пересекают биссектрису первого и третьего координатных углов).

$$3) \int\limits_{(1,1)}^{(\sqrt{3},\,1)} \frac{2}{y \sin\frac{2x}{y}}\,dx - \frac{2x}{y^2 \sin\frac{2x}{y}}\,dy.$$

Ответ. 1) $-\frac{15}{4}$; 2) 5,5; 3) $\ln\frac{\pi}{3}$.

II. Интегрирование дифференциальных уравнений, левая часть которых есть полный дифференциал

Сведения из теории

Дифференциальное уравнение вида

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$$

называется уравнением в полных дифференциалах, если его левая часть удовлетворяет условию

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Общий интеграл такого уравнения может быть найден по одной из следующих двух формул:

$$\int_a^x (P(x, y)\,dx + \int Q(a, y)\,dy = C \tag{6,3}$$

или

$$\int_b^y Q(x, y)\,dy + \int P(x,b)\,dx = C, \tag{6,4}$$

где нижние пределы a и b могут быть выбраны произвольно.

В формуле (6,3) во втором интеграле функция $Q(x, y)$ преобразовывается: в нее вместо переменной x подставляется a — нижний предел первого интеграла и она становится равной $Q(a, y)$. Пользуясь произвольностью числа a, его следует выбрать так, чтобы функция $Q(a, y)$ стала наиболее простой.

Это указание относится и к формуле (6,4). В этой формуле функция $P(x, b)$ получается из функции $P(x, y)$, если в ней переменную величину y заменить нижним пределом b первого интеграла. Ясно, что и число b выгодно выбрать так, чтобы функция $P(x, b)$ оказалась наиболее простой.

Задача 6,9. Найти общий интеграл уравнения

$$\left[\frac{y^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{x}\right]dx + \left[\frac{1}{y} - \frac{x^2}{(x-y)^2}\right]dy = 0.$$

Решение. Прежде всего следует убедиться в том, что левая часть уравнения является полным дифференциалом. Здесь

$$P(x, y) = \frac{y^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{x}; \quad Q(x, y) = \frac{1}{y} - \frac{x^2}{(x-y)^2}.$$

Отыскиваем $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{2xy}{(x-y)^3}; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{2xy}{(x-y)^3}; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Заключение. Левая часть уравнения есть полный дифференциал. Для отыскания общего решения уравнения применим формулу (6,3). Возникает вопрос о выборе нижнего предела a в первом интеграле этой формулы. Конечно, было бы очень хорошо, если бы можно было взять этот предел равным нулю, так как в этом случае замена в функции $Q(x, y)$ переменной x нулем преобразовала бы ее в $Q(0, y) = \frac{1}{y}$. Но, к сожалению, этого сделать нельзя, так как интеграл

$$\int_0^x P(x, y)\,dx = \int_0^x \left(\frac{y^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{x}\right)dx$$

становится несобственным. Положим $a=1$. Тогда, заменив в $Q(x, y)$ x на 1, получим

$$Q(1, y)=\frac{1}{y}-\frac{1}{(1-y)^2},$$

и формула (6,3) дает

$$\int_1^x\left[\frac{y^2}{(x-y)^2}-\frac{1}{x}\right]dx+\int\left[\frac{1}{y}-\frac{1}{(1-y)^2}\right]dy=C.$$

При вычислении первого интеграла переменная y должна рассматриваться как величина постоянная.

Выполнив интегрирование, получим:

$$\left(-\frac{y^2}{x-y}-\ln x\ \right|_1^x+\ln y-\frac{1}{1-y}=C$$

или

$$-\frac{y^2}{x-y}-\ln x+\frac{y^2}{1-y}+\ln y-\frac{1}{1-y}=C.$$

Преобразования в левой части приводят к выражению

$$\ln\frac{y}{x}-\frac{y^2}{x-y}+\frac{y^2-1}{1-y}=C,$$

откуда

$$\ln\frac{y}{x}-\frac{y^2}{x-y}-y-1=C. \qquad (A)$$

Относя -1 к произвольной постоянной, получаем окончательно:

$$\ln\frac{y}{x}-\frac{xy}{x-y}=C.$$

Если бы вместо $a=1$ мы взяли бы любое другое число, не равное нулю, то в левую часть равенства (А) входила бы другая постоянная величина, а не -1 и ее мы опять-таки ввели бы в состав произвольной постоянной.

Задача 6,10 (для самостоятельного решения). Найти общие интегралы уравнений, убедившись сначала, что их левая часть является полным дифференциалом;

1) $[\sin 2x-2\cos(x+y)]\,dx-2\cos(x+y)\,dy=0.$

Указание. Применить формулу (6,3). Нижний предел в первом интеграле взять равным 0.

2) $\left(\frac{1}{x^2}+\frac{3y^2}{x^4}\right)dx-\frac{2y}{x^3}\,dy=0.$

Указание. Удобно применить формулу (6,4), взяв нижний предел $b=0$.

3) $\frac{x-y}{x^2+y^2}\,dx+\frac{x+y}{x^2+y^2}\,dy=0.$

4) $\left(\frac{x+y+1}{x^2}+\frac{y}{x^2+y^2}\right)dx-\left(\frac{x+y}{xy}+\frac{x}{x^2+y^2}\right)dy=0;$

5) $\left(\frac{1}{y}-\frac{y}{x^2}\right)dx+\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{y^2}\right)dy=0;$

6) $\frac{y}{x^2+y^2}e^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}\,dx-\frac{x}{x^2+y^2}e^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}\,dy=0;$

7) $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dx+\frac{y}{(x+\sqrt{x^2+y^2})\sqrt{x^2+y^2}}dy=0;$

8) $(\sin y+y\cos x)\,dx+(x\cos y+\sin x)\,dy=0;$

9) $(1+e^{\frac{x}{y}})\,dx+\left(1-\frac{x}{y}\right)e^{\frac{x}{y}}\,dy=0;$

10) $\frac{\sqrt{2}\,xy}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}}\,dx-\frac{\sqrt{2}\,x^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}}\,dy=0.$

Указание. Применить формулу (6,3). В первом интеграле положить нижний предел $a=1$. При вычислении интеграла

$$\int_1^x \frac{\sqrt{2}\,xy}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}}\,dx$$

удобно применить подстановку $x=y\sec z$, которая приведет к вычислению интеграла

$$\sqrt{2}\int_{\operatorname{arcsec}\frac{1}{y}}^{\operatorname{arcsec}\frac{x}{y}}\frac{\sec^2 z}{1+\sec^2 z}\,dz=\sqrt{2}\int_{\operatorname{arcsec}\frac{1}{y}}^{\operatorname{arcsec}\frac{x}{y}}\frac{dz}{1+\cos^2 z}=$$

$$=\sqrt{2}\int_{\operatorname{arcsec}\frac{1}{y}}^{\operatorname{arcsec}\frac{x}{y}}\frac{dz}{\sin^2 z+2\cos^2 z}=\sqrt{2}\int_{\operatorname{arcsec}\frac{1}{y}}^{\operatorname{arcsec}\frac{x}{y}}\frac{\frac{1}{\cos^2 z}}{2+\operatorname{tg}^2 z}\,dz=$$

$$=\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} z}{\sqrt{2}}\Bigg|_{\operatorname{arcsec}\frac{1}{y}}^{\operatorname{arcsec}\frac{x}{y}}=$$

$$=\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arcsec}\frac{x}{y}\right)}{\sqrt{2}}-\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arcsec}\frac{1}{y}\right)}{\sqrt{2}}.$$

Легко видеть, что

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arcsec}\frac{x}{y}\right)=\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{y},$$

а

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arcsec}\frac{1}{y}\right)=\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}.$$

Поэтому

$$\int_1^x \frac{\sqrt{2}\,xy}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}}\,dx = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{2}\,y} - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{2}\,y}. \qquad (A)$$

Функция

$$Q(x, y) = \frac{-\sqrt{2}\,x^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}}.$$

Подставляя в нее $x = 1$ — нижний предел первого интеграла, получим, что

$$Q(1, y) = \frac{-\sqrt{2}}{(1+y^2)\sqrt{1-y^2}}.$$

Интеграл $-\int \frac{\sqrt{2}}{(1+y^2)\sqrt{1-y^2}}\,dy$ удобно вычислить подстановкой $y = \sin z$, которая приведет к интегралу

$$-\sqrt{2}\int\frac{dz}{1+\sin^2 z} = -\sqrt{2}\int\frac{dz}{2\sin^2 z+\cos^2 z} =$$

$$= -\sqrt{2}\int\frac{\frac{1}{\cos^2 z}\,dz}{2\operatorname{tg}^2 z+1} = \operatorname{arcctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} z) = \operatorname{arcctg}\left(\sqrt{2}\,\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\right),$$

так как из $y = \sin z$ следует, что $\operatorname{tg} z = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$. Но

$$\operatorname{arcctg}\left(\sqrt{2}\,\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\right) = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{2}\,y}.$$

Таким образом, получен второй интеграл в формуле (6,3). Складывая его с выражением (A), получим ответ.

Ответ.

1) $\sin^2 x - 2\sin(x+y) = C$;

2) $\frac{x^2+y^2}{x^3} = C$;

3) $\ln\sqrt{x^2+y^2} - \operatorname{arctg}\frac{x}{y} = C$;

4) $\ln\frac{y}{x} + \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \frac{y+1}{x} = C$;

5) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = C$;

6) $e^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}} = C$;

7) $\ln(x+\sqrt{x^2+y^2}) = C$;

8) $x\sin y + y\sin x = C$;

9) $x + ye^{\frac{x}{y}} = C$;

10) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{2}\,y} = C.$