СЕДЬМОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание. Формула Грина. Вычисление площади при помощи криволинейного интеграла.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

1. Формула Грина

Криволинейный интеграл по простому замкнутому гладкому контуру (C), ограничивающему односвязную область (D), может быть преобразован в некоторый двойной интеграл по области (D), ограниченной этим контуром.

Это преобразование выполняется по формуле Грина, которая записывается так:

$$\oint\limits_{(C)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \iint\limits_{(D)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy. \tag{7,1}$$

Предполагается, что функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, а также их частные производные $\frac{\partial Q}{\partial x}$ и $\frac{\partial P}{\partial y}$ непрерывны в области (D) и на контуре (C), который ее ограничивает, причем контур (C) пробегается в положительном направлении, т. е. так, что область (D) остается слева.

Если формулу (7,1) Грина прочесть справа налево, то можно сказать, что она сводит вычисление двойного интеграла по области (D) к вычислеиию криволинейного интеграла, взятого по контуру, ограничивающему эту область.

Формула (7,1) справедлива не только для указанных областей (D), но и для более сложных областей, ограниченных несколькими простыми гладкими контурами. В этом случае

$$\oint\limits_{(C)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$$

следует рассматривать как сумму интегралов по составляющим контурам, причем интегрирование по этим контурам должно вестись в таком направлении, чтобы область (D) оставалась слева.

Многие криволинейные интегралы по замкнутому контуру удобио вычислять, сводя их к двойному интегралу.

Задача 7,1. Применяя формулу Грина, показать, что криволинейный интеграл

$$\oint\limits_{(C)} (6xy + 5y)\,dx + (3x^2 + 5x)\,dy$$

по любому замкнутому контуру равен нулю. Проверить это заключение, вычислив этот интеграл по контуру, ограниченному линиями: $y=0$; $x=3$; $y=\sqrt{x}$.

Решение. Чтобы применить формулу Грина, следует найти $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ и под знак двойного интеграла подставить их разность $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}$. У нас $P(x, y)=6xy+5y$; $Q(x, y)=3x^2+5x$. Поэтому $\frac{\partial Q}{\partial x}=6x+5$; $\frac{\partial P}{\partial y}=6x+5$. Подставляя выражения $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ и $\frac{\partial P}{\partial y}$ в (7,1), получаем

$$\oint\limits_{(C)}(6xy+5y)\,dx+(3x^2+5x)\,dy=$$

$$=\iint\limits_{(D)}[(6x+5)-(6x+5)]\,dx\,dy=\iint\limits_{D}0dx\,dy=0.$$

Тем самым доказано требуемое.

Доказать, что заданный криволинейный интеграл, вычисленный по замкнутому контуру, равен нулю, можно, конечно, и не прибегая к формуле Грина. Из равенства $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ следует, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, а в этом случае криволинейный интеграл по замкнутому контуру, при соблюдении известных условий, равен нулю.

Второе требование задачи следует выполнить самостоятельно.

Задача 7,2. Вычислить, применяя формулу Грина, интеграл

$$\oint\limits_{(C)}-x^2y\,dx+xy^2\,dy,$$

где (C) — окружность $x^2+y^2=a^2$, пробегаемая в положительном направлении.

Решение. Здесь $P(x, y)=-x^2y$; $Q(x, y)=xy^2$; $\frac{\partial P}{\partial y}=-x^2$; $\frac{\partial Q}{\partial x}=y^2$.

Подставляя эти значения в формулу (7,1), получим

$$I=\oint\limits_{(C)}-x^2y\,dx+xy^2\,dy=\iint\limits_{(D)}[y^2-(-x^2)]\,dx\,dy=$$

$$=\iint\limits_{(D)}(x^2+y^2)\,dx\,dy.$$

Здесь (D) — круг, ограниченный окружностью $x^2+y^2=a^2$.

Вычисление полученного двойного интеграла удобно провести в полярных координатах. Элемент площади $dx\,dy$ надо заменить на $\rho d\rho\,d\varphi$, а $x^2+y^2=\rho^2$. Поэтому

$$\iint\limits_{(D)}(x^2+y^2)\,dx\,dy=\iint\limits_{(D)}\rho^2\cdot\rho d\rho\,d\varphi=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^a\rho^3d\rho=2\pi\frac{a^4}{4}=\frac{\pi a^4}{2}.$$

Подчеркнем, что формулу Грина можно применять только тогда, когда функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$ и их частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны в замкнутой области (D), т. е. внутри области (D) и на ее контуре. Так, например, приводя вычисление интеграла

$$I=\oint\limits_{(C)}-\frac{y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy \tag{A}$$

к двойному интегралу по формуле Грина, следует найти $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$. Окажется, что $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$, т. е. $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0$, а потому двойной интеграл в правой части формулы (7,1) будет равен нулю, следовательно, и заданный интеграл I, вычисленный по любому замкнутому контуру, равен нулю. Однако такое заключение для *любого* замкнутого контура является неверным. Например, если вычислить этот интеграл по окружности $x=a\cos t$; $y=a\sin t$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ с центром в начале координат, то можно легко проверить, что он будет равен не нулю, как это следует из формулы Грина, а 2π (проверьте!).

Такое несовпадение результатов объясняется тем, что в круге (D) с центром в начале координат подынтегральные функции $P(x, y)=-\frac{y}{x^2+y^2}$ и $Q(x, y)=\frac{x}{x^2+y^2}$ не являются непрерывными.

Интеграл (A) будет равен нулю только тогда, когда область (D) не содержит внутри себя начало координат.

Задача 7,3 (для самостоятельного решения). Вычислить с помощью формулы Грина интеграл

$$\oint\limits_{(C)}\frac{y}{x}\,dx+2\ln x\,dy,$$

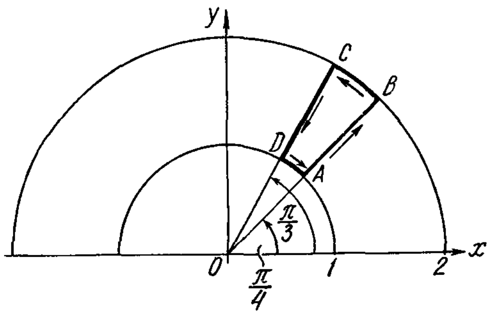
где (C) — замкнутый контур, составленный из отрезка оси Ox от точки $(1,0)$ до точки $(2,0)$, отрезка прямой $y=4-2x$ и отрезка прямой $x=1$ от точки $(1,0)$ до точки $(1,2)$.

Ответ. $4\ln 2-2$.

Задача 7,4 (для самостоятельного решения). С помощью формулы Грина вычислить интеграл

$$I = \oint\limits_{(C)} \frac{1}{x} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\, dx + \frac{2}{y} \operatorname{arctg} \frac{x}{y}\, dy,$$

где (C) — замкнутый контур, составленный дугами двух окружностей $x^2 + y^2 = 1$ и $x^2 + y^2 = 4$ $(y > 0)$ и отрезками прямых $y = x$ и $y = \sqrt{3}x$ $(y > 0)$, заключенных между этими окружностями.



К задаче 7,4

Указание.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{x^2 + y^2}; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{2}{x^2 + y^2};$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

По формуле Грина заданный интеграл

$$I = \iint\limits_{(D)} \frac{1}{x^2 + y^2}\, dx\, dy.$$

Выгодно перейти к полярным координатам

$$I = \iint\limits_{(D)} \frac{1}{\rho^2} \cdot \rho\, d\rho\, d\varphi,$$

(D) — часть кругового кольца, ограниченная указанными линиями. В области (D) переменная ρ изменяется от 1 до 2, а переменная φ от $\frac{\pi}{4}$ до $\frac{\pi}{3}$.

Ответ. $\frac{\pi}{12} \ln 2$.

Задача 7,5. (для самостоятельного решения). Криволинейный интеграл предыдущей задачи по тому же контуру вычислить, не применяя формулы Грина.

Указание. Переменная x изменяется на отрезке AB от $\frac{\sqrt{2}}{2}$ до $\sqrt{2}$, на отрезке CD от 1 до $\frac{1}{2}$ (установите это самостоятельно).

Уравнения окружностей преобразуйте к параметрической форме. Получатся уравнения $x = \cos t$; $y = \sin t$ и $x = 2\cos t$; $y = 2\sin t$. Параметр t изменяется: на дуге окружности BC от $\frac{\pi}{4}$ до $\frac{\pi}{3}$, а на дуге DA от $\frac{\pi}{3}$ до $\frac{\pi}{4}$.

Интегралы по этим двум дугам взаимно уничтожаются. Интеграл по отрезку AB равен $\frac{3}{4} \pi \ln 2$, а по отрезку CD он равен $-\frac{2}{3} \pi \ln 2$.

2. Вычисление площадей с помощью криволинейных интегралов

С помощью криволинейного интеграла площадь плоской фигуры (D), ограниченной кусочно-гладкой кривой вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2}\oint\limits_{(C)} x\,dy - y\,dx, \tag{7,2}$$

где (C) — контур, ограничивающий искомую площадь, а интегрирование по этому контуру ведется в положительном направлении, т. е. таком, чтобы область (D) оставалась слева.

Подынтегральное выражение в этой формуле легко запомнить, если его записать в виде определителя

$$\begin{vmatrix} x & y \\ dx & dy \end{vmatrix}.$$

Для вычисления площади с помощью криволинейного интеграла применяются также и такие формулы:

$$S = -\oint\limits_{(C)} y\,dx; \tag{7,3}$$

$$S = \oint\limits_{(C)} x\,dy, \tag{7,4}$$

однако формула (7,2) употребляется чаще.

Задача 7,6. С помощью криволинейного интеграла вычислить площадь, ограниченную эллипсом

$$\left.\begin{matrix} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{matrix}\right\}. \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

Решение. Чтобы воспользоваться формулой (7,2) найдем dx и dy:

$$dx = -a\sin t dt;\ dy = b\sin t dt.$$

Подынтегральное выражение в этой формуле равно

$$\begin{vmatrix} x & y \\ dx & dy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos t & b\sin t \\ -a\sin t dt & b\cos t dt \end{vmatrix} =$$
$$= ab\cos^2 t dt + ab\sin^2 t dt = ab dt.$$

Подставляя это значение подынтегрального выражения в формулу (7,2) и преобразовывая криволинейный интеграл в определенный, получим, что площадь, ограниченная эллипсом,

$$S = \frac{1}{2}\oint\limits_{(C)} ab\,dt = \frac{1}{2}ab\int\limits_0^{2\pi} dt = \frac{1}{2}ab\cdot 2\pi = \pi ab \text{ кв. ед.}$$

Задача 7,6 а. Определить площадь, ограниченную одной аркой циклоиды

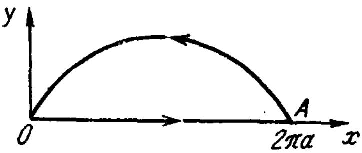
$$\left.\begin{aligned} x &= a(t - \sin t) \\ y &= a(1 - \cos t) \end{aligned}\right\}. \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

Решение. Прежде всего определим подынтегральное выражение в формуле (7,2):

$$dx = a(1 - \cos t)\,dt; \quad dy = a \sin t dt;$$

$$\begin{vmatrix} x & y \\ dx & dy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a(t - \sin t) & a(1 - \cos t) \\ a(1 - \cos t)\,dt & a \sin t dt \end{vmatrix} =$$
$$= a^2(t \sin t + 2\cos t - 2)\,dt.$$

При вычислении интеграла в формуле (7,2) интегрирование должно вестись по контуру $OABO$ в направлении, указанном стрелками. (Такое направление выбрано потому, что вычисляемая площадь при обходе по контуру, который ее ограничивает, должна оставаться слева). На отрезке OA $y = 0$, значит, $dy = 0$, а потому на этом отрезке подынтегральное выражение $x\,dy - y\,dx$ равно нулю.



К задаче 7,6а

На дуге ABO параметр t изменяется от 2π (его значение в точке A) до 0 (его значение в начале координат). Полезно вспомнить геометрический смысл параметра t у циклоиды. Учитывая это все, по формуле (7,2) получим

$$S = \frac{1}{2}\oint\limits_{(C)} a^2(t \sin t + 2\cos t - 2)\,dt =$$
$$= \frac{1}{2}a^2\int\limits_{2\pi}^{0}(t \sin t + 2\cos t - 2)\,dt =$$
$$= \frac{1}{2}a^2 \cdot 6\pi = 3\pi a^2 \text{ кв. ед.}$$

$\left(\text{интеграл } \int\limits_{2\pi}^{0} t \sin t\,dt = 2\pi\right)$.

Задача 7,7. Найти площадь, ограниченную астроидой

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos^3 t \\ y &= a\sin^3 t \end{aligned}\right\}. \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

Решение. Определим dx и dy:

$$dx = -3a\cos^2 t \sin t dt; \quad dy = 3a\sin^2 t \cos t dt$$

$$\begin{vmatrix} x & y \\ dx & dy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos^3 t & a\sin^3 t \\ -3a\cos^2 t \sin t dt & 3a\sin^2 t \cos t dt \end{vmatrix} =$$
$$= 3a^2\sin^2 t\cos^4 t dt + 3a^2\sin^4 t\cos^2 t dt =$$
$$= 3a^2\sin^2 t\cos^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t)\,dt = 3a^2\sin^2 t\cos^2 t dt.$$

Подставляя это выражение в формулу (7,2) и учитывая, что параметр t изменяется от 0 до 2π, получим

$$S=\frac{1}{2}\oint\limits_{(C)} x\,dy-y\,dx=\frac{1}{2}\cdot 3a^2\int\limits_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 t\,dt=$$

$$=\frac{3}{2}a^2\int\limits_0^{2\pi}(\sin t\cos t)^2\,dt=\frac{3}{2}a^2\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}\sin 2t\right)^2 dt=$$

$$=\frac{3}{16}a^2\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos 4t)\,dt=\frac{3}{16}a^2\left(t-\frac{\sin 4t}{4}\right)\Big|_0^{2\pi}=\frac{3}{8}\pi a^2 \text{ кв. ед.}$$

Задача 7,8 (для самостоятельного решения). Найти площадь фигуры, ограниченной одной аркой эпициклоиды и соответствующей дугой круга

$$\left.\begin{aligned} x&=a\,[(1+m)\cos mt-m\cos(1+m)\,t]\\ y&=a\,[(1+m)\sin mt-m\sin(1+m)\,t]\end{aligned}\right\}. \qquad \text{(A)}$$

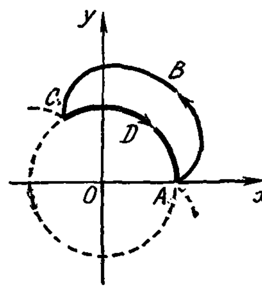
$$(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$$

Указание. Интеграл в формуле (7,2) нужно рассмотреть как сумму двух интегралов: сначала вычислить его по кривой ABC, а затем по дуге окружности CDA. В первом случае x и y взять из уравнений (A) эпициклоиды, причем на этой кривой параметр t изменяется от 0 до 2π.

Подынтегральное выражение

$$x\,dy-y\,dx=a^2m(1+m)(1+2m)(1-\cos t)\,dt$$

и по формуле (7,2) получится: $\pi a^2 m(1+m)(1+2m)$.



К задаче 7,8

На дуге CDA, принадлежащей окружности, параметр изменяется уже от 2π до 0. Уравнения окружности, если в них сохранить тот же параметр, что и в уравнении эпициклоиды, запишутся так:

$$\left.\begin{aligned} x&=a\cos mt\\ y&=a\sin mt\end{aligned}\right\}.$$

Подынтегральное выражение $x\,dy-y\,dx$ в этом случае будет равно $a^2m\,dt$.

Ответ. $S=\pi a^2m^2(2m+3)$ кв. ед.

Задача 7,9 (для самостоятельного решения). Найти площадь, ограниченную лемнискатой

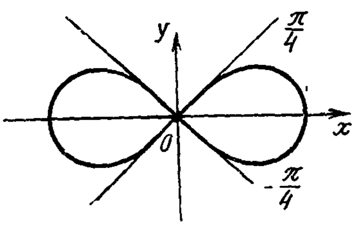
$$(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2). \qquad \text{(A)}$$

Указание. Получить параметрические уравнения лемнискаты. Ввести параметр с помощью подстановки

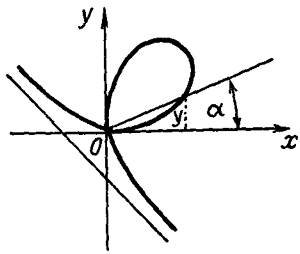
$$y = x \operatorname{tg} t. \qquad \text{(B)}$$

Подставляя это значение y в уравнение (А) лемнискаты, получим параметрические уравнения лемнискаты

$$\left.\begin{aligned} x &= a\sqrt{2}\cos t\sqrt{\cos 2t} \\ y &= a\sqrt{2}\sin t\sqrt{\cos 2t} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(C)}$$



К задаче 7,9



К задаче 7,10

Вычислить площадь одной петли (правой). Для этой петли, как видно из подстановки (В), параметр t изменяется от $-\frac{\pi}{4}$ до $\frac{\pi}{4}$.

Подынтегральное выражение в формуле (7,2) легко определить так: из подстановки (В) следует, что $\frac{y}{x} = t$. Дифференцируя обе части этого равенства, получим:

$$\frac{xdy - ydx}{x^2} \sec^2 t\, dt$$

или

$$x\,dy - y\,dx = x^2 \sec^2 t\, dt.$$

Подставляя сюда значение x из уравнений (С), получим

$$x\,dy - y\,dx = 2a^2 \cos 2t\, dt$$

и тогда по формуле (7,2)

$$\frac{S}{2} = \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 2a^2 \cos 2t\, dt = a^2.$$

Ответ. $S = 2a^2$ кв. ед.

Задача 7,10 (для самостоятельного решения). Найти площадь петли листа Декарта

$$x^3 + y^3 = 3axy.$$

Указание. Для получения параметрических уравнений контура положить

$$y = tx. \tag{A}$$

Получатся такие параметрические уравнения петли листа Декарта:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{3at}{1+t^3} \\ y &= \frac{3at^2}{1+t^3} \end{aligned}\right\}. \tag{B}$$

Пределы, в которых изменяется параметр t, когда точка пробегает петлю, легко усмотреть из подстановки (A): $\frac{y}{x} = t$, но $\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\alpha$ (см. чертеж). Угол α изменяется от 0 до $\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha$ при этом изменяется от 0 до ∞, а значит, и параметр t, который есть не что иное как $\operatorname{tg}\alpha$, также изменяется от 0 до ∞.

Подынтегральное выражение легко найдется из подстановки (А):

$$\frac{y}{x} = t; \quad d\left(\frac{y}{x}\right) = dt;$$

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = dt; \quad x\,dy - y\,dx = x^2\,dt.$$

Подставляя сюда значение x из уравнений (В), получаем, что

$$x\,dy - y\,dx = \frac{9a^2t^2}{(1+t^3)^2}\,dt.$$

Площадь петли

$$S = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{9a^2t^2}{(1+t^3)^2}\,dt.$$

Ответ. $S = \frac{3}{2}a^2$ кв. ед.

Задача 7,11 (для самостоятельного решения). Найти площадь, ограниченную кардиоидой

$$\left.\begin{aligned} x &= 2a\cos t - a\cos 2t \\ y &= 2a\sin t - a\sin 2t \end{aligned}\right\}.$$

$$(0 \leqslant t \leqslant$$

Ответ. $6\pi a^2$ кв. ед.