# ПЕРВОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание. Численное решение алгебраических уравнений

## ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Алгебраическое уравнение степени $n$ с действительными коэффициентами

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0 \qquad (1,1)$$

имеет $n$ корней, среди которых могут быть действительные различные корни, действительные кратные корни, а также комплексные корни, попарно сопряженные. Если корнями уравнения являются числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, то левая часть уравнения может быть представлена в виде

$$f(x) = a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ \ldots\ (x-\alpha_n). \qquad (1,2)$$

Если $\alpha$—корень уравнения, то левая часть уравнения делится без остатка на $x-\alpha$.

*Прежде всего следует найти все действительные корни уравнения, а потом уже его комплексные корни.*

## 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ КОРНЕЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

При решении алгебраических уравнений степени выше второй мы будем отыскивать действительные корни методами последовательных приближений с использованием схемы Горнера для деления левой части уравнения на $x-\alpha$, где $\alpha$ — действительный корень уравнения.

В методах последовательных приближений, применяемых при решении уравнений, отыскивается последовательность чисел $x_1$, $x_2, \ldots, x_n$, которая имеет своим пределом число $\alpha$, являющееся корнем уравнения. Мы будем считать $x_n$ хорошим приближением к корню $\alpha$, если остаток от деления левой части уравнения на $x-x_n$ достаточно мал.

Схема Горнера для деления многочлена на двучлен $x-\alpha$, а также схема для деления многочлена на квадратный трехчлен $x^2+px+q$, которая понадобится при определении комплексных корней уравнения, даны ниже.

Сейчас же укажем правило Декарта, согласно которому можно сделать заключение о числе положительных и отрицательных корней алгебраического уравнения.

## Правило Декарта

Если в уравнении (1,1) у двух соседних коэффициентов разные знаки, то говорят, что имеет место перемена знака; если же у двух соседних коэффициентов одинаковые знаки, то говорят, что имеет место сохранение знака. При этом учитываются только коэффициенты, отличные от нуля.

**Пример.** В уравнении

$$x^5-7x^3-4x^2+5=0$$

имеют место две перемены знака (у членов первого и второго, третьего и четвертого и одно постоянство знака у второго и третьего членов).

Если в уравнении (1,1) нет коэффициентов, равных нулю, то оно называется «полным».

*Для определения числа положительных и отрицательных корней алгебраического уравнения существует правило Декарта, которое гласит:*

*Число положительных корней алгебраического уравнения равно числу перемен знака в ряде коэффициентов этого уравнения или на четное число меньше его, причем, равные нулю коэффициенты просто не считаются.*

*Число отрицательных корней уравнения равно числу перемен знака в ряде коэффициентов уравнения* $f(-x)=0$ *или на четное число меньше его.*

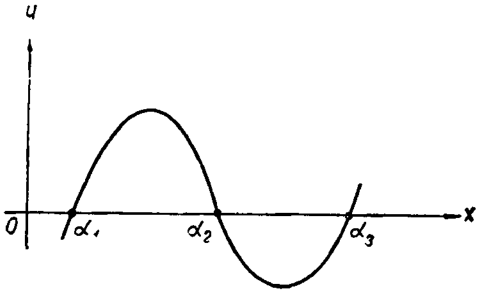
*Если уравнение «полное», то число его положительных корней равно числу перемен знака или на четное число меньше его, а число его отрицательных корней равно числу постоянств знака в ряде коэффициентов или меньше его на четное число.*

Это правило мы неоднократно будем применять при решении задач.

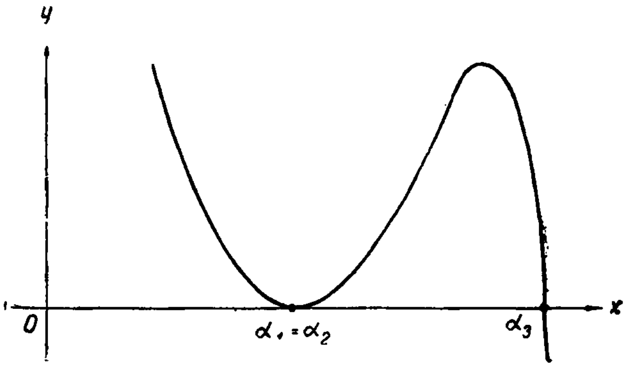
**Отделение корией.** *Отделением корня уравнения* $f(x)=0$ *называется нахождение отрезка* $[a, b]$, *на концах которого функция принимает значения разных знаков и внутри которого находится только один корень.* Отделив корень, мы получаем возможность в качестве его приближенного значения принять любое число из отрезка $[a, b]$. Отделение действительных корней уравнения $f(x)=0$ очень удобно производить графически. Значения действительных корней уравнения $f(x)=0$ являются абсциссами точек пересечения графика функции $y=f(x)$ с осью $Ox$. Чтобы указать отрезки, заключающие только по одному корню уравнения, не требуется особой точности.

**Пример.** Если график функции имеет вид, указанный на фиг. 1, 1 то уравнение имеет три простых корня. Если какой-либо действительный корень является двукратным, например, $\alpha_1=\alpha_2$ то кривая $y=f(x)$ касается оси $Ox$ в точке, где $x=\alpha_1$ (фиг. 1, 2).

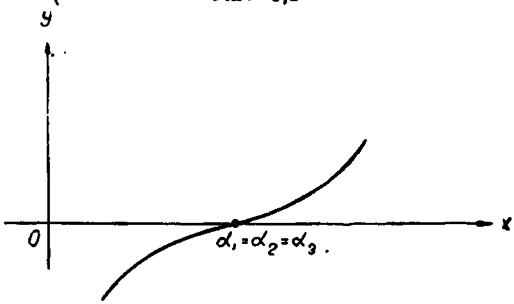
Если имеется трехкратный действительный корень, например, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$, то в месте касания с осью кривая $y = f(x)$ имеет точку перегиба (фиг. 1,3).




Фиг. 1,1




Фиг. 1,2




Фиг. 1,3

Графический метод отделения корней должен рассматриваться только как вспомогательное средство при определении приближенного значения корней и большой точности от него ждать нечего. Отделенные графическим методом корни уточняются способами, указанными ниже.

## Способ № 1

### (Способ Ньютона и его видоизменение *).

В этом способе приближенное значение действительного корня $\alpha$ улучшается по формуле

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{1,3}$$

(см. В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. I, гл. 6, § 2), где через $x_n$ и $x_{n+1}$ обозначены соответственно $n$-ое и $(n+1)$-ое приближения корня. Эта формула дает возможность по известному $n$-му приближению корня найти его $(n+1)$-ое приближение.

Чтобы сократить вычисления по формуле (1,3), можно для всех приближений корня удовольствоваться одним и тем же значением производной, стоящей в знаменателе дроби в этой формуле, вычислив ее значение только для первого приближения корня. Способ Ньютона с этим упрощением мы будем называть видоизмененным (модифицированным) способом Ньютона.

Когда применяется способ Ньютона, корень необходимо отделить, т. е. определить отрезок $[a, b]$, в котором находится единственный действительный корень.

За первое приближение корня следует взять значение того конца этого отрезка, на котором знак функции совпадает со знаком ее второй производной.

## Способ № 2

### (Способ линейной интерполяции и его видоизменение **)

В этом способе для вычисления $(n+1)$-го приближения корня пользуются формулой

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_i}{f(x_n) - f(x_i)} \tag{1,4}$$

(см. например, В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. 1, гл. 6, § 2), причем $x_n$ и $x_i$ — значения, между которыми находится искомый корень. Формула (1,4) дает возможность по найденному $n$-му приближению корня найти его $(n+1)$-ое приближение. В этом способе за первое приближение корня можно принять значение любого из концов отрезка, на котором находится отделенный корень.

Замечание. Значительную экономию вычислительной работы можно получить при помощи этого способа, если значение дроби

$$\frac{x_n - x_i}{f(x_n) - f(x_i)}$$

---

* Этот способ называется также способом касательных.

** Этот способ называется также способом хорд.

в формуле (1,4) брать одним и тем же для всех приближений корня.

Способ, в котором будет применено это упрощение, мы будем называть видоизмененным (модифицированным) способом линейной интерполяции. Часто бывает выгодно одновременно применять способ Ньютона и способ линейной интерполяции.

## Способ № 3

*для определения приближенного значения наибольшего и наименьшего по абсолютной величине корня алгебраического уравнения.*

Если дано уравнение

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0, \qquad (1,5)$$

то его простой, наибольший по абсолютной величине корень можно приближенно найти из уравнения

$$x + a_1 = 0 \qquad x = -a_1 \qquad (1,6)$$

или из уравнения

$$x^2 + a_1x + a_2 = 0, \qquad (1,7)$$

взяв его больший по абсолютной величине корень.

Укажем, что найденные таким образом приближенные значения окажутся достаточно точными, если наибольший по абсолютной величине корень уравнения (1,5) значительно превосходит остальные корни этого уравнения.

Приближенное значение наименьшего по абсолютной величине корня можно найти из уравнения

$$a_{n-1}x + a_n = 0 \qquad (1,8)$$

или из уравнения

$$a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n = 0, \qquad (1,9)$$

взяв его наименьший по абсолютной величине корень. Улучшение корня, найденного по этому способу, можно провести по способу № 1 и № 2 или видоизменениям этих способов, указанным выше, определив отрезок, в котором находится найденный корень.

## Способ № 4

В уравнении

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n = 0$$

отбираем три последних члена и решаем квадратное уравнение

$$a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n = 0. \qquad (1,10)$$

1. Если корни этого уравнения действительны, то поступаем так: решаем уравнение

$$a_{n-1}x + a_n = 0 \tag{1,11}$$

и за первое приближение корня берем

$$x_1 = -\frac{a_n}{a_{n-1}}. \tag{1,12}$$

Левую часть уравнения (1,5) делим на $x - x_1$. Деление проводим по схеме Горнера (см. ниже) до тех пор, пока не останется двучлен вида

$$b_{n-1}x + a_n, \tag{1,13}$$

который не делится без остатка на $x - x_1$. Приравниваем нулю двучлен (1,13) и из уравнения

$$b_{n-1}x + a_n = 0$$

находим второе приближение корня

$$x_2 = -\frac{a_n}{b_{n-1}}. \tag{1,14}$$

Теперь левую часть уравнения (1,14) делим на $x - x_2$ по схеме Горнера и получаем остаток в виде

$$c_{n-1}x + a_n, \tag{1,15}$$

с которым мы поступаем, как с предыдущим: приравниваем его нулю

$$c_{n-1}x + a_n = 0. \tag{1,16}$$

Определяем третье приближение

$$x_3 = -\frac{a_n}{c_{n-1}} \tag{1,17}$$

и снова по схеме Горнера делим левую часть уравнения на $x - x_3$. Обычно этот процесс приводит к ряду значений $x_1, x_2, x_3, \ldots$, приближающихся к искомому корню.

После того как мы остановились на некотором приближении корня $x_n$ и приняли его за искомое значение корня, разделим левую часть уравнения (1,5) на $x - x_n$. Получится многочлен степени на единицу меньшей, чем левая часть данного уравнения. Приравниваем этот многочлен нулю и с полученным новым уравнением поступаем, как было описано выше.

Замечание. При использовании этого способа может случиться, что последовательность чисел $x_1, x_2, x_3, \ldots$ не приближается к искомому корню, т. е. имеет место так называемый расходящийся процесс. Приведем две рекомендации для улучшения вычислений в тех случаях, когда приближение к искомому корню происходит медленно или «колебательно», т. е. не монотонно.

А. Если при определении вещественных корней уравнения (1,5) последовательные значения

$$x_1 = -\frac{a_n}{a_{n-1}}; \quad x_2 = -\frac{a_n}{b_{n-1}}; \quad x_3 = -\frac{a_n}{c_{n-1}}; \ \ldots \tag{1,18}$$

меняются не монотонно, а «колебательно», то следует брать новое приближенное значение корня для следующего деления равным полусумме предыдущего значения и того, которое получается из остатка выполненного деления, т. е. брать в этом случае, например, третье приближение равным

$$x_3 = \frac{1}{2}\left(x_2 + \frac{a_n}{c_{n-1}}\right). \tag{1,19}$$

Б. Если же при определении вещественных корней значения (1,18) меняются, хотя и не монотонно, но очень медленно, надо следующее, например, третье приближение корня, брать в этом случае в виде

$$x_3 = \frac{x_2 r_1 - x_1 r_2}{r_1 - r_2}, \tag{1,20}$$

где $r_1$ и $r_2$ — остатки от деления левой части уравнения (1,5) соответственно на $x - x_1$, и на $x - x_2$.

2. Если окажется, что корни уравнения (1,10) комплексны, то для вычисления пары комплексных сопряженных корней поступаем так: представляем его левую часть в виде трехчлена

$$x^2 + \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}x + \frac{a_n}{a_{n-2}}. \tag{A}$$

Этот трехчлен будем считать первым приближением к тому трехчлену, из которого мы впоследствии определим пару корней. На этот трехчлен делим левую часть уравнения (1,5), пока не останется трехчлен вида

$$b_{n-2}x^2 + b_{n-1}x + b_n,$$

который уже целиком не делится на (А). В качестве второго приближения выделяемого трехчлена принимаем трехчлен

$$x^2 + \frac{b_{n-1}}{b_{n-2}}x + \frac{b_n}{b_{n-2}} \tag{B}$$

и на него снова делим левую часть уравнения до тех пор, пока не получится остаток вида

$$c_{n-2}x^2 + c_{n-1}x + c_n.$$

За третье приближение выделяемого трехчлена принимаем трехчлен

$$x^2 + \frac{c_{n-1}}{c_{n-2}} x + \frac{c_n}{c_{n-2}}. \qquad (C)$$

По коэффициентам трехчленов (A), (B) и (C) судим о том, сходится ли этот процесс. Останавливаемся на каком-либо приближении, коэффициенты которого мало отличаются от коэффициентов предыдущего. Если это будет трехчлен

$$x^2 + bx + c,$$

то решение уравнения

$$x^2 + bx + c = 0$$

даст два корня исходного уравнения. На странице 17 указана удобная схема для деления многочлена на квадратный трехчлен, которая значительно облегчит процесс деления. Подробное изложение указанных выше способов можно найти, например, в книге: И. С. Березин и Н. П. Жидков. Методы вычислений, Физматгиз, 1959.

### Схема Горнера

Чтобы не отсылать студента к учебникам, где изложен способ Горнера для деления целой рациональной функции

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

на линейный двучлен $x - x_0$, приведем этот вывод здесь.

При делении многочлена

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \text{ на } x - x_0$$

получится в частном многочлен степени $(n - 1)$

$$b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + b_2x^{n-3} + \cdots + b_{n-2}x + b_{n-1}$$

и остаток $r$ — число, так что

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n =$$
$$= (x - x_0)(b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + b_2x^{n-3} + \cdots + b^{n-2}x + b^{n-1}) + r. \qquad (1,21)$$

Определению подлежат коэффициенты $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ частного и остаток от деления $r$.

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях буквы $x$ в левой и правой частях равенства (1, 21), получим:

$$a_0 = b_0;$$
$$a_1 = -b_0x_0 + b_1;$$
$$a_2 = -b_1x_0 + b_2;$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$a_n = -b_{n-1}x_0 + r.$$

Решая эти равенства относительно $b_0$, $b_1$, $b_2$, ..., $b_{n-1}$ и $r$, найдем:

$$b_0 = a_0;$$
$$b_1 = a_0x_0 + a_1;$$
$$b_2 = b_1x_0 + a_2;$$
$$\cdots\cdots$$
$$b_{n-1} = b_{n-2}x_0 + a_{n-1};$$
$$r = b_{n-1}x_0 + a_n.$$

Эти равенства показывают, что каждый последующий коэффициент $b_i$ получается умножением предыдущего $b_{i-1}$ на $x_0$ и прибавлением соответствующего коэффициента $a_i$. Остаток $r$ из $b_{n-1}$ находится также. Вычисления удобно располагать по схеме, в которой принято $a_0 = 1$.

### Схема Горнера для деления многочлена

$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ на двучлен $x - x_0$

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $a_0 = 1$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | ... | $a_{n-1}$ | $a_n$ |
| $x_0$ | | $b_0x_0$ | $b_1x_0$ | $b_2x_0$ | $b_3x_0$ | ... | $b_{n-2}x_0$ | $b_{n-1}x_0$ |
| | $b_0 = 1$ | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | $b_4$ | ... | $b_{n-1}$ | $r$ |

В первую строку вписываем коэффициенты делимого. Из схемы видно, что коэффициенты частного получаются в третьей строке от сложения чисел, стоящих над ними в первой и второй строках.

Приведем пример использования схемы Горнера. Разделим многочлен

$$f(x) = x^4 + 5x^3 + 4x^2 - 3x + 2$$

на $x - 3$. У нас $x_0 = 3$.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 5 | 4 | —3 | 2 |
| 3 | | $3\cdot 1=3$ | $3\cdot 8=24$ | $3\cdot 28=84$ | $3\cdot 81=243$ |
| | 1 | 8 | 28 | 81 | 245 |

Коэффициенты частного равны 1; 8; 28; 81; в частном получаем $x^3+8x^2+28x+81$, а остаток $r=245$. Схемой Горнера удобно пользоваться также для вычисления значений многочлена

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

при $x=x_0$, т. е. значения $f(x_0)$. Вычисление $f(x_0)$ требуется при нахождении корней по способу Ньютона, способу линейной интерполяции и при использовании способа № 4. Следует помнить, что $f(x_0)$ равно остатку от деления многочлена $f(x)$ на $x-x_0$. Так, в приведенном примере значение $f(x)$ при $x=3$ будет $f(3)=245$, т. е. равно остатку от деления $f(x)$ на $x-3$.

### Случай кратных действительных корней уравнения

Известно, что если многочлен $f(x)$ последовательно $n$ раз делить на $x-a$, то в остатках будем получать: после первого деления $f(a)$, после второго $f'(a)$, после третьего $\frac{1}{2!}f''(a)$ ..., после $n$-го деления $\frac{1}{(n-1)!}f^{n-1}(a)$.

Если $\alpha_1$ — корень кратности $k$ уравнения (1,1), то не только $f(\alpha_1)=0$, но и $f'(\alpha_1)=0$; $f''(\alpha_1)=0$ ...; $f^{(k-1)}(\alpha_1)=0$.

**Пример.** Рассмотрим уравнение

$$f(x)=x^3-9x^2+24x-16=0.$$

Разделим $f(x)$ на $x-4$ по схеме Горнера:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Первое деление | 1 | —9 | 24 | —16 |
| 4 | | 4 | —20 | +16 |
| Второе деление | 1 | —5 | 4 | $0=f(4)$ |
| 4 | | 4 | —4 | |
| | 1 | —1 | $0=f'(4)$ | |

(остаток от деления; 0 есть значение функции при $x=4$).

Поскольку не только $f(4)=0$, но и $f'(4)=0$, то $x=4$ есть двукратный корень нашего уравнения. Частное от деления $f(x)$ на $(x-4)^2$ равно $x-1$, а его коэффициенты 1 и $-1$ находятся на последней строке. Поэтому третий корень уравнения получим из уравнения

$$x-1=0;\quad x=1.$$

### Случай, когда уравнение имеет два близких корня

В способе № 1 (способ Ньютона) употребляется формула (1,3)

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Если уравнение имеет два близких по величине корня, то знаменатель дроби в формуле (1,3) будет мало отличаться от нуля, что повлечет за собой резкое изменение правой части этой формулы при изменении $x$. В этом случае следует решить уравнение $f'(x)=0$, найти его корень $a$ и разложить $f(x)$ по степеням $x-a$, сохраняя в разложении только члены с $x-a$ и $(x-a)^2$, т. е. разложение функции $f(x)$ представить в виде

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$$

и рассмотреть уравнение $f(x)=0$, или

$$f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2=0.$$

Так как $a$ есть корень уравнения $f'(x)=0$, то $f'(a)=0$ и последнее уравнение запишется в виде

$$f(a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2=0,$$

а отсюда

$$\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2=-f(a);$$

$$(x-a)^2=-\frac{f(a)}{\frac{1}{2}f''(a)};$$

$$x-a=\pm\sqrt{-\frac{f(a)}{\frac{1}{2}f''(a)}};$$

$$\left.\begin{aligned} x_1&=a+\sqrt{-\frac{f(a)}{\frac{1}{2}f''(a)}}\\ x_2&=a-\sqrt{-\frac{f(a)}{\frac{1}{2}f''(a)}}\end{aligned}\right\}. \qquad (1,22)$$

Этими соображениями мы будем пользоваться всякий раз, когда понадобится определить два близких между собой корня.

## 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ КОРНЕЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

После того как определены все действительные кории алгебраического уравнения, следует приступить к определению его комплексных корией.

Пусть иайденные действительные корни уравнения (1,5) есть числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_k$ ($k < n$, если $k = n$, то решение закончено).

Разделим левую часть $f(x)$ уравнения (1,5) на произведение

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_k).$$

В частном получится многочлен $\varphi(x)$ степени $n-k$

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_k)}.$$

Деление следует проводить по схеме Горнера, разделив сначала $f(x)$ на $x-\alpha_1$, затем полученное частное — иа $x-\alpha_2$ и т. д.

Так как все вещественные корни уже найдены, то уравнение

$$\varphi(x) = 0$$

вещественных корней не имеет, а потому степень $n-k$ многочлена $\varphi(x)$ будет обязательно четной. Пусть $n-k=2l$, а многочлен $\varphi(x)$ записывается так:

$$\varphi(x) = x^{2l} + d_1x^{2l-1} + d_2x^{2l-2} + \cdots + d_{2l-2}x^2 + d_{2l-1}x + d_{2l} = 0. \tag{1,22a}$$

Для определения пары комплексных корней $\varphi(x)$ следует выделить квадратный трехчлен, являющийся делителем $\varphi(x)$. Этот делитель в первом приближении принимаем равным

$$x^2 + \frac{d_{2l-1}}{d_{2l-2}}x + \frac{d_{2l}}{d_{2l-2}} \tag{1,23}$$

и делим на него многочлен $\varphi(x)$ до тех пор, пока не останется трехчлен вида

$$ex^2 + fx + k, \tag{1,24}$$

не делящийся на трехчлен (1,23).

Трехчлен

$$x^2 + \frac{f}{e}x + \frac{k}{e}, \tag{1,25}$$

получеиный из предыдущего делением всех его членов на $e$, принимаем за второе приближение выделяемого трехчлена. Теперь делим $\varphi(x)$ на (1,25) до тех пор, пока не получится трехчлен вида

$$e_1x^2 + f_1x + k_1,$$

уже не делящийся целиком на (1,25).

Из этого трехчлена делением всех членов на $e_1$ получаем трехчлен

$$x^2 + \frac{f_1}{e_1}x + \frac{k_1}{e_1}, \tag{1,26}$$

который принимаем за третье приближение выделяемого трехчлена. Обычно уже на третьем, четвертом шаге мы получим хорошее приближение в виде трехчлена

$$x^2 + \frac{f_i}{e_i}x + \frac{k_i}{e_i},$$

приравниваем его нулю и находим пару комплексных корней.

Мы остановимся на том приближении, коэффициенты которого мало отличаются от предыдущего. Разделив $\varphi(x)$ на (1,26) (собственно, частное уже получено в последнем делении), получим многочлен степени на 2 меньшей, чем $\varphi(x)$, и с ним поступаем точно так же, как и с $\varphi(x)$.

Замечание. Если вычисления при определении комплексных корней сходятся плохо, надо многочлен (1,22a) преобразовать заменой $x = \frac{1}{z}$ в многочлен

$$\varphi\left(\frac{1}{z}\right) = \varphi_1(z) = \frac{1}{z^{2l}} + d_1\frac{1}{z^{2l-1}} + d_2\frac{1}{z^{2l-2}} + \cdots + d_{2l-1}\frac{1}{z} + d_{2l}$$

или

$$\varphi_1(z) = \frac{1}{z^{2l}}(1 + d_1z + d_2z^2 + \cdots + d_{2l-1}z^{2l-1} + d_{2l}z^{2l})$$

и рассмотреть уравнение

$$\varphi_1(z) = 0. \tag{1,27}$$

Корни уравнения $\varphi(x) = 0$ будут обратными величинами корней последнего уравнения (1,27).

### Схема для деления многочлена на квадратный трехчлен

Укажем теперь удобную схему для деления многочлена на трехчлен вида $x^2 + px + q$. Пусть

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n =$$
$$= (x^2 + px + q)(b_0x^{n-2} + b_1x^{n-3} + b_2x^{n-4} + \cdots + b_{n-3}x + b_{n-2}) +$$
$$+ b_{n-1}x + b_n.$$

Коэффициенты $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{n-2}, b_{n-1}, b_n$ находят по схеме, которая легко получится, если, как и в схеме Горнера, сравнить коэффициенты при одинаковых степенях $x$ в левой и в правой частях предыдущего равенства.

Схема имеет такой вид:

| | $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $\cdots$ | $a_{n-2}$ | $a_{n-1}$ | $a_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-p$ | | $-pb_0$ | $-pb_1$ | $-pb_2$ | $-pb_3$ | $\cdots$ | $-pb_{n-3}$ | $-pb_{n-2}$ | |
| $-q$ | | | $-qb_0$ | $-qb_1$ | $-qb_2$ | $\cdots$ | $-qb_{n-4}$ | $-qb_{n-3}$ | $-qb_{n-2}$ |
| | $b_0$ | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | $b_4$ | $\cdots$ | $b_{n-2}$ | $b_{n-1}$ | $b_n$ |

В первую строку записываются коэффициенты многочлена $f(x)$. Коэффициент частного $b_0 = a_0$. Образование чисел второй и третьей строки ясно из схемы. Искомые коэффициенты получаются как сумма чисел, стоящих в одном и том же столбце.

Так как в описываемом способе мы делим до тех пор, пока не останется многочлен вида

$$ex^2 + fx + k,$$

то с помощью этой схемы коэффициенты $e, f$ и $k$ можно получить так:

коэффициент $e$ — это $b_{n-2}$ в третьем столбце схемы, считая справа;

коэффициент $f$ получится в предпоследнем столбце, если не вписывать в него произведение — $pb_{n-2}$;

коэффициент $k$ равен $a_n$ — свободному члену уравнения. Иначе говоря,

$$e = b_{n-2};\ f = b_{n-1} + pb_{n-2};\ k = a_n.$$

Приводим пример деления по этой схеме многочлена

$$f(x) = 5x^6 + 3x^5 - x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 4x + 8 \text{ на } x^2 + 7x + 8$$

| | $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 3 | −1 | 5 | −3 | 4 | 8 |
| −7 | | −35 | 224 | −1281 | 7140 | −39711 | |
| −8 | | | −40 | +256 | −1464 | 8160 | −45384 |
| | 5 | −32 | 183 | −1020 | 5673 | −31547 | −45376 |
| | $b_0$ | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | $b_4$ | $b_5$ | $b_6$ |

Итак, частное от деления равно $5x^4 - 32x^3 + 183x^2 - 1020x + 5673$, а остаток равен $-31547x - 45376$.

Если же производить деление до получения в остатке интересующего нас квадратного трехчлена вида $ex^2 + fx + k$, то он окажется равным $5673x^2 + 8164x + 8$, причем $8164 = 8160 + 4$ (8160 — выделено жирным шрифтом), а 8 — свободный член (мы сознательно привели несколько громоздкий пример).

### Проверка решения

Проверку всех найденных корней следует произвести, пользуясь известными свойствами корней алгебраического уравнения (формулы Виета).

Сумма всех корней алгебраического уравнения (1,1)

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_n = -\frac{a_1}{a_0}, \tag{1,28}$$

а их произведение

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \ldots \alpha_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}. \tag{1,29}$$

После этих указаний приступим к решению задач. Рекомендуется пользоваться при этом арифмометром или любой клавишной вычислительной машиной.

**Задача 1,1.** Решить уравнение

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 4x + 0{,}092$$

(с точностью 0,001).

**Решение.** Используя правило Декарта (стр. 6), заключаем, что положительных корней будет два или ни одного, так как у нас две перемены знака $(+ - + +)$, отрицательный же корень только один, поскольку уравнение «полное» (коэффициентов, равных нулю, в уравнении нет), а число сохранений знака одно в последних двух коэффициентах: $+ \ +$ (см. стр. 6). Будем пользоваться указаниями способа № 3 для определения наибольшего по абсолютной величине корня.

Составляем квадратное уравнение вида (1,7). У нас $a_1 = -5$; $a_2 = 4$ и это уравнение имеет вид

$$x^2 - 5x + 4 = 0.$$

Решая его, находим

$$x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4};$$

$$x_1 = 4; \qquad x_2 = 1.$$

Принимаем $x_1 = 4$ за первое приближение наибольшего корня. Теперь мы должны отделить корень (см. стр. 6). Делим $f(x)$ на $x - 4$ по схеме Горнера (стр. 13):

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | −5 | 4 | 0,092 |
| 4 | | 4 | −4 | 0 |
| | 1 | −1 | 0 | 0,092 = $f(4)$ |

(остаток от деления 0,092 есть значение левой части уравнения при $x=4$)

У нас $f(4)=0{,}092>0$. Возьмем $x=3{,}9$. Разделив теперь $f(x)$ на $x-3{,}9$, получим

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | −5 | 4 | 0,092 |
| 3,9 | | 3,9 | −4,29 | −1,131 |
| | 1 | −1,1 | −0,29 | −1,039 = $f(3{,}9)$ |

(остаток от деления −1,039 есть значение левой части уравнения при $x=3{,}9$)

и $f(3{,}9)=-1{,}039<0$.

Значит, $f(3{,}9)<0$, а $f(4)>0$ и корень содержится между 3,9 и 4. Из рассмотрения остатков деления 0,092 и −1,039 заключаем, что искомый корень ближе к 4, чем к 3,9. Уточним корень линейной интерполяцией (способ № 2).

Второе приближение корня получим по формуле (1,4), которая для нашего случая запишется так:

$$x_2=x_1-f(x_1)\frac{x_1-x_l}{f(x_1)-f(x_l)}.$$

Здесь $x_1$ и $x_l$ — концы отрезка [3,9; 4], в котором находится корень. В формулу (1,4) подставим

$$x_1=4;\quad x_l=3{,}9;$$

$$f(x_1)=f(4)=0{,}092;\ \text{а}\ f(x_l)=f(3{,}9)=-1{,}039;$$

$$x_2=4-\frac{0{,}092\cdot(4-3{,}9)}{0{,}092-(-1{,}039)};$$

$$x_2=4-\frac{0{,}0092}{1{,}131};$$

$$x_2=4-0{,}008=3{,}992.$$

Значит, вторым приближением корня будет $x_2=3{,}992$.

Разделим теперь $f(x)$ на $x - 3{,}992$ по схеме Горнера:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | −5 | 4 | 0,092 |
| 3,992 | | 3,992 | −4,024 | −0,095 |
| | 1 | −1,008 | −0,024 | −0,003 = $f$(3,992) |

(A)

Остаток от деления получился значительно меньшим ($r = -0{,}003$ вместо $-1{,}039$ в предыдущем делении). Испробуем значение $x = 3{,}993$. Разделим $f(x)$ на $x - 3{,}993$:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | −5 | 4 | 0,092 |
| 3,993 | | 3,993 | −4,021 | −0,083 |
| | 1 | −1,007 | −0,021 | 0,009 = $f$(3,993) |

От деления получился положительный остаток $r = 0{,}009$. Значит, $f(3{,}993) > 0$, а $f(3{,}992) < 0$. Отсюда заключаем, что значение искомого корня уравнения промежуточное — между 3,992 и 3,993. Ограничиваясь тремя знаками, принимаем $x = 3{,}992$.

Считая, что $x$ находится на отрезке [3,992; 3,993], мы допускаем погрешность, меньшую 0,001.

В схеме (*A*) уже имеются коэффициенты частного от деления $f(x)$ на $x - 3{,}992$. Эти коэффициенты равны 1; −1,008 и −0,024, а само частное равно $x^2 - 1{,}008x - 0{,}024$. Приравнивая его нулю и решая квадратное уравнение

$$x^2 - 1{,}008x - 0{,}024 = 0,$$

получим (при решении пользуйтесь таблицами для извлечения квадратных корней)

$$x = 0{,}504 \pm \sqrt{0{,}254 + 0{,}024};$$

$$x = 0{,}504 \pm \sqrt{0{,}278};$$

$$x = 0{,}504 \pm 0{,}527 = \begin{cases} 1{,}031; \\ -0{,}023. \end{cases}$$

Итак, корни уравнения равны

$$x_1 = -0{,}023; \ x_2 = 1{,}031; \ x_3 = 3{,}992.$$

Количество полученных отрицательных и положительных корней уравнения соответствуют тому, которое было определено на основании правила Декарта (см. начало решеиия). После того как корни найдены, их следует располагать в порядке возрастания.

Проверка. $x_1 + x_2 + x_3 = -0{,}023 + 1{,}031 + 3{,}992 = 5$, как и должно быть на основании формулы (1,28), так как у нас

$$-\frac{a_1}{a_0} = 5 \quad (a_0 = 1;\ a_1 = -5).$$

На основании формулы (1,29)

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}$$

$n = 3$; $a_n = 0{,}092$ и должно получиться, что $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -0{,}092$. Фактически же мы получаем $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -0{,}096$, что следует признать достаточно хорошим приближением. Мы получили $x_2 = 1{,}031$. Точным значением корня является $x_2 = 1{,}03$.

Значение наименьшего по абсолютной величине корня $x = -0{,}023$ можно было бы найти сразу, решив уравнение вида (1,11)

$$a_{n-1}x + a_n = 0.$$

В нашем случае это уравнение запишется так:

$$4x + 0{,}092 = 0.$$

Отсюда $x = -0{,}023$.

Проверим этот корень делением левой части уравнения на $x + 0{,}023$:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | —5 | 4 | 0,092 |
| —0,023 | | —0,023 | +0,116 | —0,094 |
| | 1 | —5,023 | 4,116 | —0,002 = $f(-0{,}023)$ |

(остаток от деления)

Поскольку остаток от деления мал, заключаем, что это хорошее приближение.

**Задача 1,2.** Найти с точностью до 0,001 корни уравнения

$$f(x) = x^3 - 4x^2 - 7x + 13 = 0.$$

Решение. По правилу Декарта заключаем, что положительных корней два или их вовсе нет, так как в ряде коэффициентов уравнения две перемены знака. Отрицательный же корень один, поскольку число сохранения знака в ряде коэффициентов равно 1.

Начнем с определения наибольшего по абсолютной величине корня (способ № 3, прочтите его!). Для этого составляем квадратное уравнение (1,7), в котором $a_1 = -4$, $a_2 = -7$.

Уравнение (1,7) принимает вид

$$x^2 - 4x - 7 = 0.$$

Отсюда $x = 2 \pm \sqrt{4+7}$;

$$x = 2 \pm \sqrt{11} = \begin{cases} +5{,}317 \\ -1{,}317, \end{cases}$$

так как $\sqrt{11} = 3{,}317$.

Поскольку нас интересует больший по абсолютной величине корень, берем $x = 5{,}317$ и будем считать 5,317 первым приближенным значением корня. Теперь определим отрезок, на котором находится корень, т. е. отделим корень. Разделив по схеме Горнера левую часть данного уравнения на $x - 5{,}317$, получим

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | —4 | —7 | 13 |
| 5,317 | | 5,317 | 7,002 | 0,011 |
| | 1 | 1,317 | 0,002 | 13,011 = $f$ (5,317) (остаток от деления) |

Остаток от деления 13,011 и есть значение левой части уравнения при $x = 5{,}317$. Возьмем теперь значение меньшее, чем 5,317, например, $x = 5$, и для определения $f(5)$ разделим левую часть уравнения на $x - 5$. Пользуясь схемой Горнера, получим

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | —4 | —7 | 13 |
| 5 | | 5 | 5 | —10 |
| | 1 | 1 | —2 | 3 = $f$ (5) (остаток от делеиия) |

Теперь остаток от деления равен 3 и $f(5) = 3$. Возьмем значеиие меньшее, чем 5, например $x = 4{,}8$, и разделим $f(x)$ на $x - 4{,}8$;

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | —4 | —7 | 13 |
| 4,8 | | 4,8 | 3,84 | —15,168 |
| | 1 | 0,8 | —3,16 | —2,168 = $f$ (4,8) (остаток от деления |

Остаток от деления равен —2,168. Остаток поменял знак. Значение левой части уравнения при $x = 4{,}8$ будет $f(4{,}8) = -2{,}168$. Поскольку $f(5) = 3 > 0$, а $f(4{,}8) = -2{,}168 < 0$, т. е. значения левой части данного уравнения на концах отрезка [4,8; 5] имеют различные знаки, искомый корень находится именно на этом отрезке. Уточним значение корня по способу № 2 линейной интерполяции. Это удобно сделать именно этим способом, так как все величины, входящие в формулу (1,4), уже вычислены. Принимаем за первое приближение корня $x_1 = 4{,}8$. У нас $x_i = 5$; $x_1 = 4{,}8$; $f(x_i) = 3$; $f(x_1) = -2{,}168$, и мы получаем второе приближение корня по формуле (1,4)

$$x_2 = x_1 - f(x_1) \frac{x_1 - x_i}{f(x_1) - f(x_i)}$$

или, подставляя числа, будем иметь

$$x_2 = 4{,}8 - (-2{,}168) \cdot \frac{4{,}8 - 5}{-2{,}168 - 3}.$$

Значение дроби

$$\frac{4{,}8 - 5}{-2{,}168 - 3} = \frac{-0{,}2}{-5{,}168} = 0{,}039 \qquad \text{(A)}$$

и $x_2 = 4{,}8 + (2{,}168) \cdot (+0{,}039) = 4{,}8 + 0{,}084 = 4{,}884$. Итак, второе приближение корня $x_2 = 4{,}884$.

Вычислим теперь значение левой части нашего уравнения при $x = 4{,}884$. Вычисление производим по способу Горнера, путем деления левой части уравнения на $x - 4{,}884$:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | −4 | −7 | 13 |
| 4,884 | | 4,884 | 4,317 | −13,104 |
| | 1 | 0,884 | −2,863 | −0,104 = $f$ (4,884) (остаток от деления) |

Остаток от деления $r = -0{,}104$, а потому значение левой части уравнения при $x = 4{,}884$ будет $f(4{,}884) = -0{,}104$. Теперь отрезок, на котором находится корень, сузился. Этот отрезок $[4{,}884;\ 5]$, и мы имеем $f(4{,}884) = -0{,}104 < 0$, а $f(5) = 3 > 0$. Тем же способом найдем и третье приближение по формуле (1,4)

$$x_3 = x_2 - f(x_2)\frac{x_2 - x_l}{f(x_2) - f(x_l)}.$$

Здесь у нас $x_2 = 4{,}884$; по-прежнему $x_l = 5$;

$$f(x_2) = f(4{,}884) = -0{,}104; \quad f(x_l) = f(5) = 3.$$

Подставляя эти значения в последнюю формулу, будем иметь

$$x_3 = 4{,}884 - (-0{,}104) \cdot \frac{4{,}884 - 5}{-0{,}104 - 3}.$$

Значение дроби

$$\frac{4{,}884 - 5}{-0{,}104 - 3} = \frac{-0{,}116}{-3{,}104} = 0{,}037 \qquad \text{(B)}$$

(при вычислении $x_2$ — второго приближения аналогичная дробь была равна 0,039); $x_3 = 4{,}884 - (-0{,}104) \cdot (0{,}037)$; $x_3 = 4{,}884 + 0{,}004$; $x_3 = 4{,}888$, т. е. третье приближение корня будет $x_3 = 4{,}888$.

Вычислим теперь значение левой части уравнения при $x = 4{,}888$. Воспользуемся снова схемой Горнера. Разделив левую часть уравнения на $x - 4{,}888$, получим

| | 1 | −4 | −7 | 13 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 4,888 | | 4,888 | 4,340 | −13,002 | (C) |
| | 1 | 0,888 | −2,660 | $-0{,}002 = f(4{,}888)$ (остаток от деления) | |

Теперь остаток от деления изменился с $-0{,}104$ в предыдущем делении до $-0{,}002$, и значение левой части данного уравнения при $x = 4{,}888$ будет $f(4{,}888) = -0{,}002$.

Так как остаток от деления мал, испытаем значение на 0,001 большее, чем третье приближение, т. е. $x = 4{,}889$. Если окажется, что левая часть уравнения при $x = 4{,}889$ будет положительной, то искомый корень лежит на отрезке $[4{,}888;\ 4{,}889]$. Выполняем деление левой части уравнения на $x - 4{,}889$:

| | 1 | −4 | −7 | 13 |
|---|---|---|---|---|
| 4,889 | | 4,889 | 4,346 | −12,975 |
| | 1 | 0,889 | −2,654 | $0{,}025 = f(4{,}889)$ |

Мы получили $f(4{,}889) = 0{,}025 > 0$, а так как $f(4{,}888) = -0{,}002 < 0$, то искомый корень действительно находится на отрезке $[4{,}888;\ 4{,}889]$, и мы достигли требуемой точности, так как длина этого отрезка равна 0,001. Принимаем $x = 4{,}888$.

Вычисления можно было бы сократить, если бы при определении третьего приближения вместо значения дроби (В), равного 0,037, мы взяли значение дроби (А), равное 0,039, которое уже было вычислено при определении второго приближения (см. замечание к способу № 2). Тогда мы сразу получили бы $x_3 = x_2 - f(x_2) \times 0{,}039$, т. е. $x_3 = 4{,}884 - (-0{,}104) \cdot 0{,}039 = 4{,}884 + 0{,}004$; $x_3 = 4{,}888$, как и прежде, но вычислительная работа сократилась бы значительно.

Теперь покажем, как тот же корень можно определить по способу касательных (способ № 1 Ньютона).

Было установлено, что корень находится на отрезке $[4{,}8;\ 5]$. У нас $f(x) = x^3 - 4x^2 - 7x + 13$. Значит, $f'(x) = 3x^2 - 8x - 7$, а $f''(x) = 6x - 8$.

В способе Ньютона за первое приближение корня принимается значение того конца отрезка, заключающего корень, на котором знак функции такой же, как и знак ее второй производной. Вторая производная $f''(x)$ положительна на всем отрезке $[4{,}8;\ 5]$, а функция $f(x)$ положительна на правом конце этого отрезка ($f(5) > 0$), и за первое приближение корня следует взять $x = 5$. По формуле (1,3)

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

У нас $x_1 = 5$: уже было найдено, что $f(x_1) = f(5) = 3$, а $f'(x_1) = f'(5) = 3 \cdot 5^2 - 8 \cdot 5 - 7 = 75 - 40 - 7 = 28$; $f'(x_1) = 28$ (ввиду простоты вычислений схемой Горнера мы не пользовались).

Итак,

$$x_2 = 5 - \frac{3}{28} = 5 - 0,107 = 4,893.$$

Для следующего применения формулы (1,3) надо вычислить значение левой части уравнения при $x = 4,893$. Пользуясь схемой Горнера, разделим левую часть уравнения на $x - 4,893$:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | −4 | −7 | 13 |
| 4,893 | | 4,893 | +4,369 | −12,873 |
| | 1 | 0,893 | −2,631 | 0,127 = $f$ (4,893) (остаток от деления) |

Так как остаток от деления равен 0,127, то $f(4,893) = 0,127$. Вычислим теперь $f'(4,893)$. Для этого разделим $f'(x) = 3x^2 - 8x - 7$ на $x - 4,893$. Остаток от деления даст $f'(4,893)$:

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 3 | −8 | −7 |
| 4,893 | | 14,679 | +32,680 |
| | 3 | +6,679 | +25,680 = $f'$ (4,893) |

и так как остаток от деления равен +25,680, то $f'(4,893) = 25,680$. По формуле (1,3)

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)};$$

$$x_3 = 4,893 - \frac{0,127}{+25,680} = 4,893 - 0,005 = 4,888.$$

Мы получили то же, что и раньше. Можно было бы воспользоваться указанием на возможную модификацию способа № 1 (стр. 8) и принять при вычислении третьего приближения знаменатель дроби в формуле (1,3) $f'(x_2)$ таким же, каким он был при вычислении второго приближения, т. е. равным $f'(x_1) = 28$.

Приводим вычисления дробей $\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$ и $\frac{f(x_2)}{f'(x_1)}$.

В первом случае $\frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = \frac{0,127}{25,680} = 0,00494$.

Во втором случае $\frac{f(x_2)}{f'(x_1)} = \frac{0,127}{28} = 0,00454$.

Если округлить полученные дроби до трех знаков после запятой, то в обоих случаях получим 0,005. При решении этого примера мы убедились в выгодности применения модификаций способа Ньютона и способа линейной интерполяции. Повторяем, что, применяя способ Ньютона с целью сокращения вычислений в формуле (1,3), значение знаменателя $f'(x_n)$ можно принимать одним и тем же при вычислении всех приближенных значений корня, а, пользуясь способом линейной интерполяции, можно при вычислении всех приближенных значений корня в формуле (1,4) принимать одним и тем же значение дроби

$$\frac{x_n - x_i}{f(x_n) - f(x_i)}.$$

Теперь уже определим остальные два корня нашего уравнения. Из таблицы (С) видно, что частное от деления левой части уравнения на $x - 4,888$ имеет коэффициенты 1; 0,888 и $-2,660$ (в таблице (С) они подчеркнуты). Поэтому искомое частное будет равно $x^2 + 0,888x - 2,660$. Приравниваем его нулю и решаем квадратное уравнение

$$x^2 + 0,888x - 2,660 = 0;$$

$$x = -0,444 \pm \sqrt{0,197 + 2,660};$$

$$x = -0,444 \pm \sqrt{2,857};$$

$$x = -0,444 \pm 1,690 = \begin{cases} -2,134 \\ \phantom{-}1,246; \end{cases}$$

$$x_1 = -2,134 \text{ и } x_2 = 1,246.$$

Итак, $x_1 = -2,134$; $x_2 = 1,246$ и $x_3 = 4,888$. Здесь снова подчеркнем, что количество положительных и отрицательных корней, полученных при решении, соответствует тому, которое следует из правила Декарта.

Проверка.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4,$$

что и должно быть в соответствии с формулой (1,28), так как у нас $a_1 = -4$; $a_0 = 1$.

Вычислив затем произведение корней, получим $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -12,997$ вместо $-13$, что также следует признать хорошим результатом — см. формулу (1,29): $n = 3$; $a_n = 13$; $a_0 = 1$.

Это же уравнение

$$f(x) = x^3 - 4x^2 - 7x + 13 = 0$$

решим по способу № 4.

1. Составляем квадратное уравнение вида (1,10). У нас $a_{n-2} = -4$; $a_{n-1} = -7$; $a_n = 13$, и это уравнение запишется так:

$$-4x^2 - 7x + 13 = 0,$$

или

$$4x^2 + 7x - 13 = 0.$$

2. Корни этого уравнения действительны, а потому решаем уравнение вида (1,11), в котором $a_{n-1} = -7$; $a_n = 13$, само уравнение имеет вид $-7x + 13 = 0$, а $x = 1,857$.

Это значение $x$ примем за первое приближение к искомому корню и обозначим его через $x_1$. Делим левую часть уравнения на $x-1,857$, пользуясь схемой Горнера, и получаем

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | —4 | —7 | 13 |
| 1,857 | | 1,857 | —3,980 | |
| | 1 | —2,143 | $\underbrace{-10,980}_{b_{n-1}}$ | 13 |

Составляем уравнение вида (1,13), в котором $b_{n-1}=-10,980$ и по-прежнему $a_n=13$. Получаем $-10,980x+13=0$, откуда вторым приближением искомого корня будет $x=1,184$. Делим теперь левую часть уравнения на $x-1,184$, пользуясь опять-таки схемой Горнера:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | —4 | —7 | 13 |
| 1,184 | | 1,184 | —3,334 | |
| | 1 | —2,816 | $\underbrace{-10,334}_{c_{n-1}}$ | 13 |

Составляем теперь уравнение вида (1,16), в котором будет $c_{n-1}=-10,334$ и по-прежнему $a_n=13$. Получаем $-10,334x+$ $+13=0$; $x=1,257$. Это и будет третьим приближением корня. Делим теперь левую часть уравнения на $x-1,257$;

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | —4 | —7 | 13 |
| 1,257 | | 1,257 | —3,448 | |
| | 1 | —2,743 | $\underbrace{-10,448}_{d_{n-1}}$ | 13 |

Уравнение для определения следующего приближения имеет вид $-10,448x+13=0$ и четвертое приближение корня $x_4=1,244$. Разделим левую часть уравнения на $x-1,244$:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | —4 | —7 | 13 |
| 1,244 | | 1,244 | —3,428 | |
| | 1 | —2,756 | $\underbrace{-10,428}_{e_{n-1}}$ | |

и уравнение для получения следующего приближения запишется так:

$$-10,428x+13=0; \quad x_5=1,246.$$

На следующем шаге мы найдем — то же значение $x$ (проверьте!), а потом на найденном значении и остановимся. Этот же корень был получен и раньше. Способ № 4, которым мы только что пользовались, очень прост и доступен.

**Задача 13.** Найти корни уравнения $f(x) = x^3 - 10x^2 + 44x + 29 = 0$ с точностью до 0,0001.

Решение. Используя правило Декарта, заключаем, что уравнение имеет точно один отрицательный корень, так как в ряде коэффициентов уравнения, ни один из которых не равен нулю, число сохранений знака равно единице (у двух последних коэффициентов).

Желая определить приближенное значение наименьшего по абсолютной величине корня, решим, согласно способу № 3, уравнение (1,8). У нас $a_{n-1} = 44$; $a_n = 29$ и уравнение (1,8) запишется в виде

$$44x + 29 = 0,$$
$$x = -0,66.$$

Теперь определим интервал, в котором находится искомый корень. Разделим левую часть уравнения на $x + 0,66$ и определим остаток от деления:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | —10 | 44 | 29 | |
| —0,66 | | —0,66 | 7,04 | —33,69 | (A) |
| | 1 | —10,66 | 51,04 | $\underbrace{-4,69 = f(-0,66)}_{\text{(остаток от деления)}}$ | |

Отсюда заключаем, что значение левой части уравнения при $x = -0,66$ будет равно —4,69, т. е. $f(-0,66) = -4,69$.

Возьмем $x = -0,56$ и вычислим значение $f(-0,56)$. Делим $f(x)$ на $x + 0,56$, снова применяя схему Горнера:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | —10 | 44 | 29 | |
| —0,56 | | —0,56 | 5,91 | —27,95 | (B) |
| | 1 | —10,56 | 49,91 | $\underbrace{1,05 = f(-0,56)}_{\text{(остаток от деления)}}$ | |

Теперь, сравнивая $f(-0,66) = -4,69$ и $f(-0,56) = 1,05$, замечаем, что значения левой части уравнения на концах отрезка $[-0,66; -0,56]$ имеют противоположные знаки. Следовательно, искомый корень находится на этом отрезке. Значение корня уточним по способу № 2 линейной интерполяции. Первым приближением корня будем считать $x = -0{,}56$ и воспользуемся формулой (1,4):

$$x_2 = x_1 - f(x_1)\frac{x_1 - x_i}{f(x_1) - f(x_i)}.$$

У нас $x_1 = -0{,}56$; значение $f(x_1)$ уже подсчитано. Это остаток от деления в таблице (B): $f(x_1) = 1{,}05$; $x_i = -0{,}66$, а $f(x_i) = -4{,}69$ — остаток от деления в таблице (A).

Подставляя эти значения в предыдущую формулу, имеем

$$x_2 = -0{,}56 - 1{,}05\frac{-0{,}56 - (-0{,}66)}{1{,}05 - (-4{,}69)},$$

$$x_2 = -0{,}56 - 1{,}05\frac{0{,}10}{5{,}74}.$$

Значение дроби

$$\frac{0{,}10}{5{,}74} = 0{,}0174. \qquad (C)$$

Этим значением нам придется пользоваться при вычислении следующих приближений, так как мы намерены применить способ № 2 в его модифицированном виде.

Итак,

$$x_2 \doteq -0{,}56 - 1{,}05 \cdot (0{,}0174) = -0{,}56 - 0{,}0183; \quad x_2 = -0{,}5783.$$

Разделим теперь левую часть уравнения на $x + 0{,}5783$ и определим остаток от деления. Пользуясь схемой Горнера, получаем

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | −10 | 44 | 29 |
| −0,5783 | | −0,5783 | 6,1174 | −28,9829 |
| | 1 | −10,5783 | 50,1174 | 0,0171 $\doteq f(0{,}5783)$ (остаток от деления) |

Остаток от деления 0,0171 достаточно мал. Значит, мы уже близко подошли к искомому корню.

Так как мы ищем корень с точностью до 0,0001, то прежде чем переходить к следующему приближению, полезно испробовать $x = -0{,}5784$, отличающееся от предыдущего на $-0{,}0001$. Разделим левую часть уравнения на $x + 0{,}5784$ и определим остаток от деления. Если он окажется противоположным по знаку предыдущему остатку, то цель достигнута.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | −10 | 44 | 29 | |
| −0,5784 | | −0,5784 | 6,1185 | −28,9895 | (*D*) |
| | 1 | −10,5784 | 50,1185 | 0,0115 $= f(-0{,}5784)$ | |

Наши ожидания не оправдались, так как остаток не поменял знака. Но очевидно, что значение $x = -0{,}5784$ является лучшим приближением, чем значение $x = -0{,}5783$, поскольку остаток уменьшился. Вычисление следующего приближения по формуле (1,4) приведет нас к

$$x_3 = x_2 - f(x_2)\,\frac{x_2 - x_l}{f(x_2) - f(x_l)},$$

но значение дроби в правой части возьмем равным дроби (C), т. е. 0,0174. У нас $x_2 = -0{,}5784$; $f(x_2)$ есть остаток от деления $f(x)$ на $x + 0{,}5784$. В таблице ($D$) он уже вычислен и равен $+0{,}0115$ и $f(-0{,}5784) = +0{,}0115$.

Для $x_3$ получаем

$$x_3 = -0{,}5784 - 0{,}0115 \cdot 0{,}0174,$$

$$x_3 = -0{,}5784 - 0{,}0002; \quad x_3 = -0{,}5786.$$

Разделим теперь левую часть уравнения на $x + 0{,}5786$ и определим остаток от деления:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | −10 | 44 | 29 |
| −0,5786 | | −0,5786 | 6,1208 | −28,9999 |
| | 1 | −10,5786 | 50,1208 | 0,0001 = $f$(−0,5786) (остаток от деления) |

(E)

Итак, $f(-0{,}5786) = 0{,}0001 > 0$. Вычислите самостоятельно остаток от деления левой части уравнения на $x + 0{,}5787$. У вас получится $-0{,}0055$, т. е. $f(-0{,}5787) = -0{,}0055 < 0$, на концах отрезка $[-0{,}5787;\ -0{,}5786]$ функция $f(x)$ имеет разные знаки. Так как величина $-0{,}5786$ отличается от $-0{,}5787$ на 0,0001, то требуемая точность достигнута. Принимаем $x = -0{,}5786$.

Применим теперь для отыскания того же корня способ Ньютона (способ № 1) в модифицированном виде, т. е. в формуле (1,3) знаменатель дроби $f'(x_n)$ будем считать одним и тем же для всех приближений.

Корень у нас уже отделен, и мы знаем, что он находится на отрезке $[-0{,}66;\ -0{,}56]$. В способе Ньютона, как указывалось, за первое приближение корня следует принять тот конец этого отрезка, на котором знак функции и знак второй производной одинаковы. Находим вторую производную от левой части уравнения.

$$f(x) = x^3 - 10x^2 + 44x + 29.$$

Первая производная

$$f'(x) = 3x^2 - 20x + 44,$$

а $f''(x) = 6x - 20$. На отрезке $[-0,66;\ -0,56]$ $f''(x)$ всюду отрицательна. Функция же $f(x)$ отрицательна на левом конце этого отрезка. Следовательно, совпадение знака функции со знаком второй производной происходит на левом конце отрезка, а потому за первое приближение к искомому корню принимаем $x_1 = -0,66$. В таблице (А) уже вычислено значение $f(x_1) = f(-0,66) = -4,69$. Теперь следует найти $f'(x_1) = f'(-0,66)$ и сохранить его значение для всех последующих приближений, так как мы используем способ Ньютона в модифицированном виде. Делением $f'(x)$ на $x + 0,66$ найдем значение $f'(-0,66)$. По схеме Горнера получаем

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 3 | —20 | 44 |
| —0,66 | | —1,92 | +14,4672 |
| | 3 | —21,92 | 58,4672 = $f'(-0,66)$ (остаток от деления) |

Итак, сохраняя два знака после запятой, $f'(-0,66) = 58,47$. Это значение производной будем брать и в последующих приближениях.

Используем формулу (1,3) и, полагая в ней $n = 1$, получаем

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

У нас $x_1 = -0,66$; $f(x_1) = -4,69$; $f'(x_1) = 58,47$;

$$x_2 = -0,66 - \frac{-4,69}{58,47} = -0,66 + 0,0802;$$

$$x_2 = -0,5798.$$

Для третьего приближения следует вычислить $f'(-0,5798)$. Делением $f(x)$ на $x + 0,5798$ получим

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | —10 | 44 | 29 |
| —0,5798 | | —0,5798 | 6,1342 | —29,0678 |
| | 1 | —10,5798 | 50,1342 | —0,0678 = $f(-0,5798)$ |

Полагая в формуле (1,3) $n = 2$, найдем

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}.$$

Но мы условились, что знаменатель дроби в правой части формулы (1,3) будем брать одним и тем же во всех приближениях, а потому возьмем его равным $f'(x) = 58,47$. Тогда $x_2 = -0,5798$, $f(x_2) = -0,0678$, а

$$x_3 = -0,5798 - \frac{-0,0678}{58,47} = -0,5798 + 0,0012;\quad x_3 = -0,5786.$$

Это тот же корень, который был найден по способу № 2. Закончим теперь решение этой задачи. У нас $x = -0,5786$.

В таблице (Е) уже проведено деление $f(x)$ на $x + 0,5786$, и коэффициенты частного от деления равны 1, $-10,5786$ и $50,1208$, а само частное будет $x^2 - 10,5786x + 50,1208$. Приравниваем его нулю и решаем квадратное уравнение

$$x^2 - 10,5786x + 50,1208 = 0;$$
$$x = 5,2893 \pm \sqrt{27,9767 - 50,1208};$$
$$x = 5,2893 \pm \sqrt{22,1441}\,i;$$
$$x = 5,2893 \pm i \cdot 4,7058.$$

Итак,

$$x_1 = -0,5786;$$
$$x_2 = 5,2893 + 4,7058i;$$
$$x_3 = 5,2893 - 4,7058i.$$

И здесь отметим, что уравнение в соответствии с правилом Декарта действительно имеет только один отрицательный корень.

Проверка.

$x_1 + x_2 + x_3 = 10$ (верно!), так как сумма корней по (1,28) должна быть равна $-\frac{a_1}{a_0}$, а у нас

$$a_1 = -10; \quad a_0 = 1 \text{ и } -\frac{a_1}{a_0} = 10.$$

Найдем произведение корней: $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -0,5786 \cdot (5,2893 + 4,7058i) \cdot (5,2893 - 4,7058i) = -0,5786 \times 50,1212 = -29,0001$, а должно быть $-29$, так как произведение корней по (1,29) равно $(-1)^n \frac{a_n}{a_0}$. У нас показатель степени $n = 3$; $a_n = 29$, $a_0 = 1$ и $(-1)^n \frac{a_n}{a_0} = -29$.

Таким образом, проверка дала хорошие результаты.

Решим теперь этот же пример по способу № 4 (см. стр. 9).

1. Составляем квадратное уравнение вида (1,10)

$$a_{n-2} = -10; \quad a_{n-1} = 44; \quad a_n = 29.$$

Это уравнение приобретает вид

$$-10x^2 + 44x + 29 = 0.$$

Умножая обе его части на $-1$, получим

$$10x^2 - 44x - 29 = 0.$$

2. Легко убедиться, что корни этого уравнения действительны.

Теперь решаем уравнение вида (1,11), в котором у $a_{n-1} + 44$; $a_n = +29$, а само уравнение имеет вид

$$44x + 29 = 0.$$

Корень этого уравнения, $x = -0{,}6592$ принимаем за первое приближение искомого корня Левую часть уравнения делим по способу Горнера на $x + 0{,}6592$ и получаем

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | $-10$ | 44 | 29 |
| $-0{,}6592$ | | $-0{,}6592$ | 7,0265 | — |
| | 1 | $-10{,}6592$ | $\underbrace{51{,}0265}_{b_{n-1}}$ | 29 |

Составляем уравнение вида (1,13), в котором $b_{n-1} = 51{,}0265$, $a_n = 29$. Это уравнение имеет вид

$$51{,}0265x + 29 = 0$$

Отсюда получаем второе приближение искомого корня

$$x_2 = -0{,}5683$$

Теперь делим левую часть уравнения на $x + 0{,}5683$ по схеме Горнера:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | $-10$ | 44 | 29 |
| $-0{,}5683$ | | $-0{,}5683$ | 6,0060 | — |
| | 1 | $-10{,}5683$ | $\underbrace{50{,}0060}_{c_{n-1}}$ | 29 |

Затем составляем уравнение (1,16), которое приобретает вид

$$50{,}0060x + 29 = 0,$$

и находим, что третье приближение искомого корня будет

$$x_3 = -0{,}5799$$

Продолжая деление, на следующем шаге получаем

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | $-10$ | 44 | 29 |
| $-0{,}5799$ | | $-0{,}5799$ | 6,1353 | — |
| | 1 | $-10{,}5799$ | $\underbrace{50{,}1353}_{d_{n-1}}$ | 29 |

и составляем уравнение

$$50{,}1353x + 29 = 0.$$

Отсюда четвертое приближение

$$x_4 = -0,5784.$$

Снова деля, получим

| | 1 | $-10$ | 44 | 29 |
|---|---|---|---|---|
| $-0,5784$ | | $-0,5784$ | 6 1185 | — |
| | 1 | $-10,5084$ | 50,1185 | 29 |

и для определения следующего приближения будем иметь уравнение

$$50,1185x + 29 = 0;$$

$$x_5 = -0,5786$$

Следующее приближение снова даст $x_6 = -0,5786$ (проверьте самостоятельно) На этом значении мы и остановимся

Итак, $x = -0,5786$ Это то же значение, что и полученное раньше Однако вычислительная работа была значительно меньшей и чрезвычайно простой Здесь способ № 4 быстро привел к цели Он очень прост в применении