ВТОРОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание. Численное решение алгебраических уравнений

Задача 2,1. Найти с точностью до 0,00001 корни уравнения

$$x^3-3x^2-17x+22=0.$$

Решение. Решим эту задачу по способу № 4. Составим квадратное уравнение вида (1,10)

$$-3x^2-17x+22=0.$$

Корни этого уравнения, как нетрудно видеть, действительны, а потому решаем уравнение (1,11), которое дает $-17x+22=0$, откуда $x_1=1{,}294118$ (вычисления будем вести с одним запасным знаком). По схеме Горнера делим левую часть уравнения на $x-1{,}294118$ и получаем

	1	−3	−17	22
1,294118		1,294118	−2,207613	−24,856918
	1	−1,705882	$\underbrace{-19{,}207613}_{b_{n-1}}$	−2,856918

Составляем уравнение вида (1,13). У нас $b_{n-1}=-19{,}207613$, а свободный член уравнения $a_n=22$ и для определения второго приближения имеем $-19{,}207613x+22=0$; второе приближение

$$x_2=1{,}145379.$$

Делим левую часть уравнения по схеме Горнера на $x-x_2$, т. е. на $x-1{,}145\,379$.

	1	−3	−17	22
1,145379		1,145379	−2,124244	−21,904507
	1	−1,854621	$\underbrace{-19{,}124244}_{c_{n-1}}$	+0,095493

(обратите внимание на то, что остаток уменьшился по абсолютной величине и изменил знак, однако он еще велик).

Теперь составляем уравнение (1,16) в котором $c_{n-1} = -19,124244$ и по-прежнему $a_n = 22$. Получаем

$$-19,124244x + 22 = 0,$$

а третье приближение $x_3 = 1,150372$.

Делим $f(x)$ на $x - 1,150372$ по схеме Горнера:

	1	—3	—17	22
1,150372		1,150372	2,127660	—22,003924
	1	—1,849628	$\underbrace{-19,127660}_{d_{n-1}}$	— 0,003924 (остаток от деления)

Решаем уравнение (1,16) которое теперь принимает вид $-19,127660x + 22 = 0$. Отсюда $x_4 = 1,150167$.

Новое деление по схеме Горнера $f(x)$ на $x - 1,150167$ дает

	1	—3	—17	22	
1,150167		1,150167	— 2,127617	—21,999954	(A)
	1	—1,849833	—19,127617	+ 0,000046 (остаток от деления)	

Остаток от деления изменил знак по сравнению с предыдущим и оказался теперь достаточно малым. Мы брали четвертое приближение равным $x_4 = 1,150167$. Округлим его до пяти знаков и возьмем $x = 1,15017$. Произведем два деления: 1) $f(x)$ на $x - 1,15017$ и 2) $f(x)$ на $x - 1,15016$.

Первое деление дает

	1	—3	—17	—22	
1,15017		1,15017	— 2,12762	—22,00001	(A)
	1	—1,84983	—19,12762	— 0,00001 (остаток от деления)	
		(коэффициенты частного)			

и остаток от деления отрицателен.

Деление $f(x)$ на $x - 1,15016$ дает

	1	—3	—17	22
1,15016		1,15016	—2,12761	—21,99981
	1	—1,84984	—19,12761	0,00019 (остаток от деления)

и остаток от деления положителен.

Таким образом, в качестве искомого корня можно взять $x = 1,15016$ или $x = 1,15017$. Берем $x = 1,15017$. Разделим теперь $f(x)$ на $x - 1,15017$. В таблице (A) уже найдены коэффициенты частного, а само частное равно

$$x^2 - 1,84983x - 19,12762.$$

Приравняем его нулю и решим уравнение

$$x^2 - 1,84983x - 19,12762 = 0:$$

$$x = 0,92492 \pm \sqrt{0,85548 + 19,12762};$$

$$x = 0,92492 \pm \sqrt{19,98310} = 0,92492 \pm 4,47024 = \begin{cases} +5,39516 \\ -3,54532 \end{cases}$$

Таким образом, мы получили следующие корни: $x_1 = -3,54532$; $x_2 = 1,15017$; $x_3 = 5,39516$.

Проверка:

Сумма корней

$$x_1 + x_2 + x_3 = +3,00001,$$

т. е. на одну стотысячную больше того, что должно было получиться. Произведение же корней

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -21,99995$$

вместо —22, что также следует признать хорошим результатом.

Задача 2,2. Найти корни уравнения

$$f(x) = x^3 - 10,91x^2 + 38,52x - 44,36 = 0.$$

Решение. По правилу Декарта заключаем, что отрицательных корней уравнение не имеет, так как нет ни одного сохранения знака в ряде коэффициентов (+ — + —). Положительных корней будет три или один, так как число перемен знака равно трем. Испытаем в качестве корней числа 2 и 3, а f (2) и f (3)

найдем как остатки от деления $f(x)$ соответственно на $x-2$ и на $x-3$. Делим по схеме Горнера:

	1	−10,91	38,52	−44,36
2		2	−17,82	41,40
	1	8,91	20,70	−2,60 = $f(2)$ (остаток от деления)

Итак, $f(2) = -2{,}60$

	1	−10,91	38,52	−44,36
3		3	−23,73	44,37
	1	−7,91	14,79	+ 0,01 = $f(3)$ (остаток от деления)

и $f(3) = +0{,}01$. Поскольку $f(2)$ и $f(3)$ имеют различные знаки, в отрезке [2; 3] имеется корень, причем, так как остаток от деления $f(x)$ на $x-3$ значительно меньше по абсолютной величине, чем остаток от деления на $x-2$, мы заключаем, что корень имеет значение, близкое к 3.

Полезно исследовать, не будет ли уравнение иметь два близких корня. Используя указания на стр. 15, разделим $f'(x)$ на $x-3$. У нас $f'(x) = 3x^2 - 21{,}82x + 38{,}52$. Деление дает

	3	−21,82	38,52
3		9	−38,46
	3	−12,82	0,06 = $f'(3)$

Поскольку остаток от деления мал, делаем заключение, что число, близкое к 3, является корнем и производной $f'(x)$. Это говорит о том, что уравнение имеет два близких корня.

Находим корень уравнения $f'(x) = 0$, т. е. уравнения

$$\varphi(x) = 3x^2 - 21{,}82x + 38{,}52 = 0.$$

Решение будем проводить по способу Ньютона. Первым приближением корня будем считать $x = 3$. Двукратным последовательным делением левой части последнего уравнения на $x-3$ найдем остаток от деления, причем первый остаток даст числитель, а второй — знаменатель дроби в формуле (1,3). Деление производим на одной таблице:

	3	−21,82	38,52
3		9	−38,46
	3	−12,82	$+0{,}06 = \varphi(3)$
3		9	
	3	$-3{,}82 = \varphi'(3)$	

Считая в формуле (1,3) первым приближением число 3, найдем, что корень уравнения $f'(x) = 0$, который обозначим буквой a, равен

$$a = 3 - \frac{0{,}06}{-382};$$

$$a = 3{,}0157.$$

Теперь воспользуемся формулой (1,22, стр. 15), чтобы получить два близких между собою корня уравнения. Для того чтобы воспользоваться этой формулой, нам следует найти

$$f(a) \text{ и } \frac{1}{2} f''(a).$$

Разделим $f(x)$ на $x - a$ три раза последовательно. Остаток от первого деления даст $f(a)$, а остаток от третьего деления $\frac{1}{2} f''(a)$. Деление по схеме Горнера произведем на одной таблице:

	1	−10,91	38,52	−44,36
3,0157		3,0157	−23,8068	44,3706
	1	−7,8943	14,7132	$0{,}0106 = f(a)$
3,0157		3,0157	−14,7124	
	1	4,8786	$0{,}0008 = f'(a)$	
3,0157		3,0157		
	1	$-1{,}8629 = \frac{1}{2} f''(a)$		

Теперь находим корни уравнения по формуле (1,22). У нас $f(a) = 0{,}0106$; $\frac{1}{2} f''(a) = -1{,}8629$; $a = 3{,}0157$;

$$x_{1,2} = 3{,}0157 \pm \sqrt{\frac{-0{,}0106}{-1{,}8629}};$$

$$x_{1,2} = 3{,}0157 \pm \sqrt{0{,}0057};$$

$$x_{1,2} = 3{,}0157 \pm 0{,}0747;$$

$$x_1 = 3{,}0904;$$

$$x_2 = 2{,}9410$$

Сохраняя после запятой только два десятичных знака, получаем $x_1 = 3{,}09$; $x_2 = 2{,}94$. Точные значения корней данного уравнения 2,92 и 3,12. Разделим $f(x)$ на произведение $(x - 2{,}94) \times \times (x - 3{,}09)$. По схеме Горнера сначала разделим на $x - 2{,}94$, а потом на $x - 3{,}09$, причем деление выполним на одной таблице:

	1	—10,91	38,52	—44,36	
2,94		2,94	—23,43	+44,36	
	1	7,97	15,09	0	$= f(2{,}94)$
3,09		3,09	—15,11		
	1	—4,89	— 0,02		

Частное от деления равно $x - 4{,}89$. Приравнивая его нулю, получаем уравнение для определения третьего корня

$$x - 4{,}89 = 0$$

откуда $x = 4{,}89$.

Итак, корни уравнения: $x_1 = 2{,}94$; $x_2 = 3{,}09$; $x_3 = 4{,}89$.

Проверка. Сумма корней дает $x_1 + x_2 + x_3 = 10{,}92$ вместо 10,91, а произведение корней $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 44{,}40$ вместо 44,36. Полученные приближенные значения корней следует признать хорошими.

Задача 2,3. $f(x) = x^4 - 2x^3 - 3{,}74x^2 + 8{,}18x - 3{,}48 = 0$.

Решение. По правилу Декарта заключаем, что будет один отрицательный корень, так как в ряде коэффициентов только одно сохранение знака, положительных корней — один или три, поскольку число перемен знака равно трем.

Для отыскания наибольшего по абсолютной величине корня решим уравнение вида (1,6), где в нашем случае $a_1 = -2$. Решаем уравнение

$$x - 2 = 0,$$

откуда $x = 2$.

Для определения значения левой части уравнения при $x = 2$ разделим $f(x)$ на $x - 2$ по схеме Горнера:

	1	−2	−3,74	8,18	−3,48
2		2	0	−7,48	1,40
	1	0	−3,74	0,70	−2,08 = $f(2)$

Теперь решим квадратное уравнение вида (1,7). У нас $a_1 = -2$; $a_2 = -3{,}74$, и (1,7) запишется в виде

$$x^2 - 2x - 3{,}74 = 0;$$

$$x = 1 \pm \sqrt{1 + 3{,}74};\quad x = 1 \pm \sqrt{4{,}74};\quad x = 1 \pm 2{,}17.$$

Выбираем $x = 1 + 2{,}17$ или $x = 3{,}17$, так как мы ищем приближенное значение наибольшего по абсолютной величине корня. Найдем теперь $f(3{,}17)$. Пользуясь схемой Горнера, получим

	1	−2	−3,74	8,18	−3,48
3,17		3,17	3,71	−0,10	25,61
	1	1,17	−0,03	8,08	22,13 = $f(3{,}17)$

Итак, $f(2) < 0$, а $f(3{,}17) > 0$ и, значит, искомый корень находится на отрезке [2; 3,17], причем он ближе к 2, чем к 3,17, так как остаток от деления на $x - 2$ меньше по абсолютной величине остатка от деления на $x - 3{,}17$. Попробуем сузить отрезок, на котором находится корень. Возьмем среднее арифметическое из абсцисс концов отрезка $\frac{2 + 3{,}17}{2} = 2{,}58$ и рассмотрим $f(2{,}58)$.

Применяя схему Горнера, получим

	1	−2	−3,74	8,18	−3,48	
2,58		2,58	1,50	−5,80	+6,14	(A)
	1	0,58	−2,24	2,38	2,66 = $f(2{,}58)$	

Поскольку $f(2{,}58) = 2{,}66$, а $f(2) = -2{,}08$, корень находится в отрезке [2; 2,58]. Этот отрезок по сравнению с предыдущим значительно сужен. Для решения задачи применим способ Ньютона.

Определим $f''(x)$, чтобы решить вопрос, какой из концов этого отрезка принять за первое приближение корня.

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 7{,}48x + 8{,}18;$$

$$f''(x) = 12x^2 - 12x - 7{,}48.$$

Найдем значение второй производной при $x = 2$ и при $x = 2{,}58$. Снова применяя схему Горнера, получим

	12	—12	— 7,48
2		24	24
	12	12	16,52 = $f''(2)$
	12	—12	— 7,48
2.58		30.96	48.92
	12	18.96	41.44 = $f''(2.58)$

Легко проверить, что $f''(x)$ внутри отрезка [2; 2,58] в нуль не обращается. Таким образом, на всем этом отрезке $f''(x)$ сохраняет знак, оставаясь положительной. А так как функция $f(x)$ положительна на правом конце отрезка [2; 2,58], то значение x на правом конце этого отрезка, т. е. $x = 2{,}58$, и следует принять за первое приближение искомого корня.

Нами уже найдено $f(2{,}58) = 2{,}66$ (табл. *А*), определим $f'(2{,}58)$, так как $f'(x_n)$ входит в формулу (1,3) в способе Ньютона.

Для определения $f'(2{,}58)$ разделим $f'(x)$ на $x - 2{,}58$ по схеме Горнера ($f'(x)$ было получено раньше):

	4	— 6	— 7.48	8,18
2,58		10.32	11,14	9,44
	4	4,32	3,66	17,62 = $f'(2.58)$ (остаток от деления)

Итак, $f'(2{,}58) = 17{,}62$.

По формуле (1,3), в которой $x_1 = 2{,}58$, $f(x_1) = 2{,}66$, $f'(x) = 17{,}62$,

$$x_2 = 2{,}58 - \frac{2{,}6}{17{,}62} = 2{,}58 - 0{,}15 = 2{,}43;$$

$$x_2 = 2{,}43 \text{ (второе приближение корня).}$$

Вычислим теперь $f(x_2)$ и $f'(x_2)$ делением $f(x)$ и $f'(x)$ на $x - 2{,}43$, причем деление выполним на одной таблице:

	1	—2	3,74	8,18	—3,48
2,43		2,43	1,04	—6,56	3,93
	1	0,43	—2,70	1,62	0.45 = f(2.43) (остаток от деления)
2,43		2,43	6,94	10,30	
	1	2,86	4,24	11,92 = f'(2,43) (остаток от деления)	

Итак, $f(2{,}43) = 0{,}45$, а $f'(2{,}43) = 11{,}92$.
Формула (1,3) дает третье приближение

$$x_3 = 2{,}43 - \frac{0{,}45}{11{,}92};$$

$$x_3 = 2{,}43 - 0{,}0377; \quad x_3 = 2{,}3923.$$

Найдем еще одно приближение. Получаем $f(x_3)$ и $f'(x_3)$. По схеме Горнера

	1	—2	—3,74	8,18	—3,48
2,3923		2,3923	0,9385	—6,7020	3,5358
	1	0,3923	—2,8015	1,4780	0,0558 = f(2,3923) (остаток от деления)
2,3923		2,3923	6,6616	9,2345	
	1	2,7846	3,8601	10,7125 = f'(2,3923) (остаток от деления)	

Четвертое приближение корня по формуле (1,3) даст

$$x_4 = 2{,}3923 - \frac{0{,}0558}{10{,}7125} = 2{,}3923 - 0{,}0052;$$

$$x_4 = 2{,}3871.$$

Знаки $f(2{,}3871)$ и $f(2{,}3870)$ противоположны (проверьте), поэтому мы можем утверждать, что $x = 2{,}3871$ с точностью до одной десятитысячной дает искомый корень.

Разделим теперь $f(x)$ на $x - 2{,}3871$ и частное приравняем нулю. Выполним деление по схеме Горнера:

	1	—2	—3,74	8,18	—3,48
2,3871		2,3871	0,9240	—6,7221	3,4801
	1	0,3871	—2,8160	1,4579	0,0001 = $f(2{,}3871)$ (остаток от деления)

Частное от деления равно

$$\varphi(x) = x^3 + 0{,}3871x^2 - 2{,}8160x + 1{,}4579. \qquad (B)$$

Округлим его коэффициенты до двух десятичных знаков, приравняем нулю и решим уравнение

$$f_1(x) = x^3 + 0{,}39x^2 - 2{,}82x^2 + 1{,}46 = 0.$$

Находим приближенное значение наименьшего по абсолютной величине корня этого уравнения. Решаем уравнение вида (1,8). У нас $a_{n-1} = -2{,}82$; $a_n = 1{,}46$, и это уравнение принимает вид

$$-2{,}82x + 1{,}46 = 0,$$

откуда получаем приближенное значение корня $x = 0{,}52$.

Найдем теперь отрезок, на котором находится корень. Разделим левую часть уравнения $f_1(x)$ на $x - 0{,}52$, чтобы определить $f_1(0{,}52)$,

	1	0,39	—2,82	1,46
0,52		0,52	0,47	—1,22
	1	0,91	—2,35	+0,24 = $f_1(0{,}52)$ (остаток от деления)

Предположим, что вторым концом отрезка будет $x = 1$. Остаток от деления $f_1(x)$ на $x - 1$ даст значение $f_1(1)$

	1	0,39	—2,82	1,46
1		1	1,39	—1,43
	1	1,39	—1,43	$+0{,}03 = f_1(1)$ (остаток от деления)

Остаток от деления сохранил знак, но значительно уменьшился.

Возьмем $x = 1,1$. Разделим $f_1(x)$ на $x - 1,1$;

	1	0,39	—2,82	1,46
1,1		1,1	1,64	—1,30
	1	1,49	—1,18	$+0{,}16 = f_1(1{,}1)$

Мы нашли, что $f_1(1,1)$ больше, чем $f_1(1)$, т. е. мы уходим от корня, а не приближаемся к нему. Исследуем $x = 0,9$. Деление по схеме Горнера даст

	1	0,39	—2,82	1,46
0,9		0,9	1,16	—1,49
	1	1,29	—1,66	$-0{,}03 = f_1(0{,}9)$ (остаток от деления)

Таким образом, $f_1(0,52) = 0,24$, а $f_1(0,9) = -0,03$ и корень находится на отрезке $[0,52; 0,90]$, причем, так как $f_1(0,9)$ значительно меньше по абсолютной величине, чем $f(0,52)$, то заключаем, что корень находится ближе к 0,9, чем к 0,52. Кстати, из того, что $f_1(0,9) < 0$, а $f_1(1) = +0,03 > 0$, можно сделать заключение, что на отрезке $[0,9; 1]$ имеется еще один корень уравнения. Все это заставляет прийти к выводу, что есть два близких корня на отрезке $[0,52; 1]$, поэтому следует поступать в соответствии с указаниями, данными на стр. 15.

Решаем уравнение $f_1'(x) = 0$, т. е. уравнение

$$3x^2 + 0,78x - 2,82 = 0,$$

и определяем его корни $x = -1,10$ и $x = 0,84$. Выбираем 0,84, так как это значение лежит на отрезке, на котором находится корень. Полученное значение $x = 0,84$ и есть величина a в формуле (1,22).

Теперь воспользуемся формулами (1,22) и для этого вычислим $f_1(0,84)$ и $\frac{1}{2} f_1''(0,84)$. Величина $\frac{1}{2} f_1''(0,84)$ будет остатком от трехкратного деления $f_1(x)$ на $x - 0,84$:

	1	0,39	—2,82	1,46
0,84		0,84	1,03	—1,50
	1	1,23	—1,79	$-0{,}04 = f_1(0{,}84)$
0,84		0,84	1,74	
	1	2,07	$-0{,}05 = f_1'(0{,}84)$	
0,84		0,84		
	1	$2{,}91 = \frac{1}{2} f''(0{,}84)$		

Итак, $f_1(0{,}84) = -0{,}04$; $\frac{1}{2} f''(0{,}84) = 2{,}91$, и из формулы (1,22) (стр. 15) с учетом, что $a = 0{,}84$, получим

$$x_{1,2} = 0{,}84 \pm \sqrt{-\frac{-0{,}04}{2{,}91}};$$

$$x_{1,2} = 0{,}84 \pm \sqrt{0{,}0137}; \quad x_{1,2} = 0{,}84 \pm 0{,}11;$$

$$x_1 = 0{,}73 \text{ и } x_2 = 0{,}95.$$

Эти два корня попробуем улучшить, чтобы получить их с точностью до 0,0001. Начнем с корня $x_1 = 0{,}73$. Вычислим $f_1(0{,}73)$ и $f_1(0{,}72)$ делением $f_1(x)$ сначала на $x - 0{,}73$, а потом на $x - 0{,}72$

	1	0,39	—2,82	1,46
0,73		0,73	0,81	—1,4673
	1	1,12	—2,01	$-0{,}0073 = f_1(0{,}73) < 0$
	1	0,39	—2,82	1,46
0,72		0,72	0,7992	—1,4550
	1	1,11	—2,0208	$+0{,}0050 = f_1(0{,}72) > 0$

Таким образом, корень находится на отрезке [0,72; 0,73]. Если бы нас удовлетворяла точность в 0,01, мы бы на этом остановились.

Сузим отрезок [0,72; 0,73], взяв в качестве его левого конца среднее арифметическое из значений 0,72 и 0,73, т. е. 0,725. Определим знак функции на этом конце отрезка, но операции будем производить не с многочленом $f_1(x)$, у которого коэффициенты округлены, а с многочленом (B).

Найдем значение многочлена (B), который у нас обозначен через $\varphi(x)$, и его производной при $x = 0{,}725$. Двухкратное деление по схеме Горнера дает

	1	0.3871	−2.8160	1.4579
0.725		0.725	0.8063	−1.4570
	1	0.1121	−2.0097	+0.0009 = φ (0,725)
0.725		0.725	1.3319	
	1	1,8371	−0.6778 = φ' (0,725)	

Таким образом, корень находится на отрезке [0,725; 0,730]. Уточним корень по способу Ньютона. Легко усмотреть, что $\varphi''(x)$ на отрезке [0,725; 0,730] сохраняет положительное значение, поэтому за приближенное значение корня принимаем его значение на левом конце интервала, т. е. 0,725, так как на этом конце интервала и функция положительна: $\varphi(0{,}725) = +0{,}0009$.

Пользуясь формулой (1,3), в которой надо взять $x_1 = 0{,}725$; $f(x_1) = +0{,}0009$; $f'(x_1) = -0{,}6778$, получим

$$x_2 = 0{,}725 - \frac{+0{,}0009}{-0{,}6778}; \quad x_2 = 0{,}725 + 0{,}0013;$$

$$x_2 = 0{,}7263.$$

Для выяснения знака $\varphi(x)$ при $x = 0{,}7263$ разделим $\varphi(x)$ на $x - 0{,}7263$:

	1	0.3871	−2.8160	1.4579	
0.7263		0.7263	0.8087	1.4579	(D)
	1	1.1134	−2.0073	0 = φ (0,7263)	

$x = 0{,}7263$ является корнем уравнения. На этом заканчиваем уточнение корня $x = 0{,}73$.

После того как найдем корень $x = 0{,}7263$, можно разделить $\varphi(x)$ на $x - 0{,}7263$. Мы получили бы $x^2 + 1{,}1134x - 2{,}0073$, а приравняв нулю и решив квадратное уравнение $x^2 + 1{,}1134x - 2{,}0073 = 0$, нашли бы корни $x = -2{,}0789$ и $x = 0{,}9655$. Но для упражнения в применении способа Ньютона уточним полученное значение корня $x = 0{,}95$.

На стр. 46 было выяснено, что корень находится на отрезке $[0{,}9; 1]$. На правом конце этого отрезка $\varphi(1) > 0$; $\varphi''(x)$ на этом отрезке имеет положительное значение, а потому за приближенное значение корня принимаем $x = 1$, так как при $x = 1$ и $\varphi(x)$ и $\varphi''(x)$ совпадают по знаку. Вычислим значение $\varphi(x)$ и $\varphi'(x)$ при $x = 1$ двукратным делением $\varphi(x)$ на $x - 1$.

	1	0.3871	−2.8160	1.4579
1		1	1.3871	−1.4289
	1	1.3871	−1.4289	0.0290 = $\varphi(1)$
1		1	2.3871	
	1	2.3871	0.9582 = $\varphi'(1)$	

и по формуле (1,3) найдем $x_2 = 1 - \frac{0{,}0290}{0{,}9582}$; $x_2 = 1 - 0{,}0303$; $x_2 = 0{,}9697$.

Чтобы получить следующее приближение, определим $\varphi(0{,}9697)$ и $\varphi'(0{,}9697)$ двукратным делением $\varphi(x)$ на $x - 0{,}9697$

	1	0.3871	−2.8160	1.4579
0.9697		0.9697	1.3157	−1.4548
	1	1,3568	−1.5093	0.0031 = $\varphi(0.9697)$
1.9697		0.9697	2,2560	
	1	2,3265	0.7557 = $\varphi'(0.9697)$	

Теперь по формуле (1,3)

$$x_3 = 0{,}9697 - \frac{0.0031}{0.7557};\quad x_3 = 0{,}9697 - 0{,}0041;$$

$$x_3 = 0{,}9656.$$

Вычислим $\varphi(0{,}9656)$:

	1	0,3871	—2,8160	1.4579
0.9656		0.9656	1.3062	1.4579
	1	1.3527	—1.5098	0 = φ (0.9656)

Таким образом, $x = 0{,}9656$ является корнем уравнения. Три корня заданного уравнения найдены: $x_1 = 0{,}7263$; $x_2 = 0{,}9656$; $x_3 = 2{,}3871$.

Деление $f(x)$ на $x - 2{,}3871$ было уже произведено, и частным является многочлен (В). Разделив (В) на $x - 0{,}7263$, а новое частное на $x - 0{,}9656$, получим уравнение для определения последнего, четвертого корня. Деление $\varphi(x)$ на $x - 0{,}7263$ выполнено в таблице (D). Берем найденные в этой таблице коэффициенты частного и делим его на $x - 0{,}9656$:

	1	1,1134	—2.0073
0,9656		0.9656	2.0075
	1	2,0790	+0.0002

Коэффициенты частного будут 1 и 2,0790, а само частное $x + 2{,}0790$.

Решая уравнение $x + 2{,}0790 = 0$, найдем последний корень

$$x_4 = -2{,}0790.$$

Корнями уравнения будут числа $x_1 = 0{,}7263$; $x_2 = 0{,}9656$; $x_3 = 2{,}3871$; $x_4 = -2{,}0790$.

Проверка. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$, как и должно быть, а $x_1 \times x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = -3{,}4804$ (должно быть $-3{,}48$), что указывает на хорошие результаты вычислений.

Это же уравнение можно решить проще, минуя довольно утомительное нахождение двух близких корней уравнения. Применим способ № 4 для отыскания одного корня.

В нашем уравнении

$$x^4 - 2x^3 - 3{,}74x^2 + 8{,}18x - 3{,}48 = 0$$

выделим квадратный трехчлен вида (1,10)

$$-3{,}74x^2 + 8{,}18x - 3{,}48.$$

Его корни действительны, поэтому берем уравнение вида (1,11), т. е. $8{,}18x - 3{,}48 = 0$, откуда получаем первое приближение корня $x = 0{,}4254$.

Делим левую часть уравнения на $x - 0{,}4254$, пользуясь схемой Горнера:

	1	—2	—3,74	8,18	—3,48
0,4254		0,4254	—0,6698	—1,8759	2,6818
	1	—1,5746	—4,4098	$\underbrace{6{,}3041}_{b_{n-1}}$	—0,7982

Решаем уравнение (1,13), в котором $b_{n-1} = 6{,}3041$, а $a_n = -3{,}48$, т. е. уравнение

$$6{,}3041\,x - 3{,}48 = 0,$$

и находим второе приближение

$$x_2 = 0{,}5520.$$

Делим левую часть уравнения на $x - 0{,}5520$:

	1	—2	—3,74	8,18	—3,48
0,5520		0,5520	—0,7993	—2,5057	3,1322
	1	—1,4480	—4,5393	5,6743	—0,3478

Остаток от деления —0,3478 по сравнению с предыдущим —0,7982 уменьшился по абсолютной величине, но все еще остается большим, поэтому для ускорения сходимости применим форфулу (1,20), в которой $x_2 = 0{,}5520$, $x_1 = 0{,}4254$, $r_1 = -0{,}7982$, $r_2 = -0{,}3478$, и найдем третье приближение первого корня

$$x_3 = \frac{0{,}5520\,(-0{,}7982) - 0{,}4254 \cdot (-0{,}3478)}{-0{,}7982 - (-0{,}3478)};$$

$$x_3 = \frac{-0{,}2926}{-0{,}4504};\quad x_3 = 0{,}6496.$$

Делим теперь левую часть уравнения на $x - 0,6496$:

	1	—2	—3,74	8,18	—3,48
0.6496		0,6496	—0.8772	—2,9993	3,3654
	1	—1,3504	—4,6172	5,1807	—0,1146

Снова применяя формулу (1,20) получим

$$x_4 = \frac{0,6496(-0,3478) - 0,5520(-0,1146)}{-0,3478 - (-0,1146)};$$

$$x_4 = \frac{-0,1627}{-0.2332}; \quad x_4 = 0,6977.$$

Делим левую часть уравнения на $x - 0,6977$:

	1	—2	—3,74	8,18	—3,48
0.6977		—0,6977	—0,9086	—3,2433	3,4443
	1	—1,3023	—4,6486	4,9367	—0,0357

Получаем следующее приближение по формуле (1,20):

$$x_5 = \frac{0,6977(-0,1146) - 0,6496(-0.0357)}{-0,1146 - (-0,0357)};$$

$$x_5 = \frac{-0,0568}{-0.0789}; \quad x_5 = 0,7199.$$

Разделим теперь левую часть уравнения на $x - 0,7199$:

	1	—2	—3,74	8,18	—3,48
0,7199		0,7199	—0,9215	—3,3558	3,4729
	1	—1,2801	—4,6615	4,8242	—0,0071

Поступая, как и раньше, найдем следующее приближение:

$$x_6 = \frac{0,7199(-0,0357) - 0,6977 \cdot (-0,0071)}{-0,0357 - (-0,0071)} = \frac{-0.0207}{-0,0286};$$

$$x_6 = 0,7238.$$

Делим теперь левую часть уравнения на $x - 0{,}7238$:

	1	−2	−3,74	8,18	−3,48
0,7238		0,7238	−0,9237	−3,3756	3,4774
	1	−1,2762	−4,6637	4,8044	−0,0026

Следующее приближение находим тем же путем:

$$x_7 = \frac{0{,}7238 \cdot (-0{,}0071) - 0{,}7199\,(-0{,}0026)}{-0{,}0071 - (-0{,}0026)};$$

$$x_7 = 0{,}7260.$$

Разделим левую часть уравнения на $x - 0{,}7260$:

	1	−2	−3,74	8,18	−3,48
0,7260		0,7260	0,9249	−3,3867	3,4799
	1	−1,2740	−4,6649	4,7933	−0,0001

Остаток от деления оказался очень малым, а потому на этом приближении можно остановиться.

Корень 0,7260 отличается от значения 0,7263, найденного раньше, только на 0,0003 (несмотря на то, что для улучшения сходимости была использована формула (1,20), изменение корня происходило медленно, хотя применение этой формулы и ускорило сходимость).

Задача 2,4. Решить уравнение

$$f(x) = x^4 - 10x^3 + 48{,}16x^2 + 108{,}08x + 70{,}76 = 0.$$

Решение (рекомендуется сначала прочесть на стр. 16 «Определение комплексных корней алгебраических уравнений»). Прежде всего замечаем, что последние три члена соответствуют квадратному уравнению с комплексными корнями. В качестве первого приближения выделяемого из $f(x)$ трехчлена берем трехчлен

$$48{,}16x^2 + 108{,}08x + 70{,}76$$

и делением его на коэффициент при x^2 получаем трехчлен

$$x^2 + 2{,}24x + 1{,}47, \qquad \text{(A)}$$

который принимаем за первое приближение выделяемого трехчлена.

Делим левую часть уравнения на трехчлен (A) по схеме деления, указанной на стр. 18, до получения в остатке квадратного трехчлена, который уже не делится на делитель (A).

	1	−10	48,16	108,08	70,76
−2,24	—	−2,24	27,42	—	
1,47	—	—	−1,47	17,99	
	1	−12,24	74,11	126,07	70,76

Остаток от деления равен

$$74{,}11x^2 + 126{,}07x + 70{,}76.$$

Делением на коэффициент при x^2 получаем

$$x^2 + 1{,}70x + 0{,}95.$$

Делим левую часть данного уравнения на трехчлен (B)

	1	−10	48,16	108,08	70,76
−1,70	—	−1,70	19,89	—	
−0,95	—	—	−0,95	+11,12	
	1	−11,70	67,10	119,20	70,76

Остаток от деления равен

$$67{,}10x^2 + 119{,}20x + 70{,}76.$$

Делением его на коэффициент при x^2 получаем

$$x^2 + 1{,}78x + 1{,}05.$$

Если разделить левую часть уравнения на трехчлен (C), чается:

	1	−10	48,16	108,08	70,76
−1,78	—	−1,78	20,96	—	
−1,05	—	—	−1,05	12,37	
	1	−11,78	68,07	120,45	70,76

Коэффициенты остатка от деления подчеркнуты, а остаток от деления будет равен

$$68{,}07x^2 + 120{,}45x + 70{,}76.$$

Деление на коэффициент при x^2 приводит к трехчлену

$$x^2 + 1{,}77x + 1{,}03, \tag{D}$$

который незначительно отличается от трехчлена (C). Процесс очень быстро сходился и можно было ограничиться только тремя делениями. Приравнивая трехчлен (D) нулю, решим квадратное уравнение

$$x^2 + 1{,}77x + 1{,}03 = 0;$$

$$x_{1,2} = -0{,}88 \pm \sqrt{0{,}77 - 1{,}03};$$

$$x_{1,2} = -0{,}88 \pm \sqrt{-0{,}26}$$

и окончательно

$$x_{1,2} = -0{,}88 \pm 0{,}51i.$$

Для определения остальных двух корней надо разделить левую часть данного уравнения на трехчлен (D). Коэффициенты частного уже известны из последней таблицы. Это 1; $-11{,}78$ и 68,07. Таким образом, частное равно $x^2 - 11{,}78x + 68{,}07$. Приравниваем его нулю и решаем квадратное уравнение

$$x^2 - 11{,}78x + 68{,}07 = 0;$$

$$x_{3,4} = 5{,}89 \pm \sqrt{34{,}69 - 68{,}07};$$

$$x_{3,4} = 5{,}89 \pm \sqrt{-33{,}38};$$

$$x_{3,4} = 5{,}89 \pm 5{,}78i.$$

Итак, корнями являются числа $x_{1,2} = -0{,}88 \pm 0{,}51i$, $x_{3,4} = 5{,}89 \pm 5{,}78i$.

Проверка.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10{,}02 \text{ вместо } 10;$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 70{,}14 \text{ вместо } 70{,}76.$$

Задача 2,5. Решить уравнение

$$f(x) = x^4 - 3x^3 + 20x^2 + 44x + 54 = 0.$$

Решение. Применим тот же способ, что и в предыдущей задаче. Последние три члена в уравнении приводят к квадратному уравнению с комплексными корнями — см. уравнение (1,22 а)

$$20x^2 + 44x + 54 = 0.$$

После деления на коэффициент при x^2 получаем первое приближение выделяемого из $f(x)$ трехчлена

$$x^2 + 2{,}2x + 2{,}7. \tag{A}$$

Делим теперь $f(x)$ на трехчлен (A):

	1	—3	20	44	54
—2,2	—	—2,2	11,44	—	—
—2,7	—	—	—2,70	14,04	—
	1	—5,2	28,74	58,04	54

Коэффициенты остатка от деления подчеркнуты, а ток равен

$$28{,}74x^2 + 58{,}04x + 54.$$

После деления на коэффициент при x^2 получаем

$$x^2 + 2{,}02x + 1{,}88$$

и делим левую часть уравнения $f(x)$ на трехчлен (B):

	1	—3	20	44	54
—2,02	—	—2,02	10,14	—	—
—1,88	—	—	—1,88	9,44	—
	1	—5,02	28,26	53,44	54

Подчеркнутые числа являются коэффициентами ос имеет вид

$$28{,}26x^2 + 53{,}44x + 54.$$

После деления на 28,26 этот остаток запишется так:

$$x^2 + 1{,}89x + 1{,}91.$$

Проделаем еще одно приближение:

	1	—3	20	44	54
—1,89	—	—1,89	9,24	—	—
—1,91	—	—	—1,91	9,33	—
	1	—4,89	27,33	53,33	54

Коэффициенты остатка подчеркнуты, а сам остаток равен

$$27{,}33x^2 + 53{,}33x + 54.$$

После деления на коэффициент при x^2 он принимает вид

$$x^2 + 1{,}95x + 1{,}98. \qquad (D)$$

По сравнению с трехчленом (C) мы получили незначительные изменения коэффициентов. Останавливаемся на этом приближении.

Приравниваем трехчлен (D) нулю и решаем квадратное уравнение

$$x^2 + 1{,}95x + 1{,}98 = 0;$$
$$x_{1,2} = -0{,}975 \pm \sqrt{0{,}951 - 1{,}980};$$
$$x_{1,2} = -0{,}975 \pm \sqrt{-1{,}029};$$
$$x_{1,2} = -0{,}975 \pm 1{,}014i.$$

Из последней таблицы уже известны коэффициенты частного от деления левой части данного уравнения на трехчлен (C). Это числа 1; —4,89; 27,33; само же частное имеет вид

$$x^2 - 4{,}89x + 27{,}33.$$

Приравниваем его нулю и решаем уравнение

$$x^2 - 4{,}89x + 27{,}33 = 0.$$
$$x_{3,4} = 2{,}445 \pm \sqrt{5{,}978 - 27{,}33};$$
$$x_{3,4} = 2{,}445 \pm 4{,}620i.$$

Проверка.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2{,}94 \text{ вместо } 3;$$
$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 54{,}1 \text{ вместо } 54.$$

При той небольшой точности, с которой велся расчет, результаты можно считать довольно хорошими.

Задача 2,6. Решить уравнение

$$f(x) = x^4 + 24{,}26x^3 + 274{,}3x^2 + 132{,}8x + 231 = 0.$$

Решение. Решение проведем по итерационному методу Фридмана, сущность которого поясним на примере.

Выделяем трехчлен вида (1,21) для определения комплексных корней с наименьшим модулем. Таким трехчленом будет $274{,}3x^2 + 132{,}8x + 231$, который после деления на коэффициент при x^2 запишется так: $x^2 + 0{,}484x + 0{,}842$.

1-й шаг. Расположим сначала делимое и делитель по убывающим степеням буквы x и проведем деление по схеме деления многочлена на квадратный трехчлен:

	1	24,26	274,3
—0,484	—	—0,484	—11,5
—0,842	—	—	—0,842
	1	23,77	261,9

(остальные столбцы не вычисляем, так как остатком от деления мы не интересуемся).

Итак, частное равно $x^2 + 23,77x + 261,9$. Разделим его на свободный член 261,9 и получим, располагая трехчлен по возрастающим степеням буквы x,

$$1 + 0,09x + 0,004x^2. \qquad (A)$$

2-й шаг. Расположив левую часть данного уравнения по возрастающим степеням буквы x, найдем

$$231 + 132,8x + 274,3x^2 + 24,26x^3 + x^4. \qquad (B)$$

Разделим теперь многочлен (B) на трехчлен (A). Деление выполняем по той же схеме:

	231	132,8	274,3
—0,09	—	—20,79	—10,08
—0,004	—	—	—0,92
	231	112,01	263,30

Таким образом, частное равно $231 + 112,01x + 263,30x^2$. Разделим этот трехчлен на коэффициент при x^2 и получим

$$x^2 + 0,425x + 0,877.$$

Повторим деление сначала так, как указано в 1-м шаге, а потом, как указано во 2-м шаге. Выполняем его по той же схеме на одной таблице:

	1	24,26	274,3	274,3	132,8	231	
—0,425	—	—0,425	—10,13	—10,08	—20,79	—	—0,09
—0,877	—	—	—0,877	—0,924	—	—	—0,004
	1	23,835	*263,293	*263,296	112,01	231	—
После деления на 263,293	0,004	0,9	1				

Частное от первого деления равно

$$x^2 + 23,835x + 263,293. \qquad (C)$$

Коэффициенты этого трехчлена делим на свободный член. Полученные от деления коэффициенты помещены в последнем столбце таблицы, а частное от второго деления (правая часть таблицы) равно

$$263,296x^2 + 112,01x + 231.$$

Близость чисел, отмеченных звездочками, говорит о том, что итерацию можно прекратить и считать, что левая часть уравнения разлагается на множители

$$x^2 + 0,425x + 0,877 \text{ и } x^2 + 23,835x + 263,293,$$

из которых первый был найден раньше, а второй есть трехчлен (С).

Приравнивая каждый из этих множителей нулю, получим два квадратных уравнения:

$$x^2 + 0,425x + 0,877 = 0;$$
$$x^2 + 23,835x + 263,293 = 0,$$

решая которые, найдем корни $x_{1,2} = -0,213 \pm 0,912i$; $x_{3,4} = -11,92 \pm 11,01i$.

Проверка.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 24,266 \text{ вместо } 24,26;$$
$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 230,9 \text{ вместо } 231.$$

Эти результаты можно признать достаточно хорошими.

Задача 2,7 (для самостоятельного решения). Решить уравнение $x^3 - 5x + 1 = 0$ по способу Ньютона с точностью до 0,001, а потом — применяя способ Ньютона в модифицированном виде.

Ответ. $x = 0,202$.

Задача 2,8 (для самостоятельного решения). Решить уравнение $x^4+2x^2-6x+2=0$, применяя способ линейной интерполяции, а потом тот же способ в модифицированном виде. Точность 0,00001.

Ответ. $x=0{,}38687$.

Задача 2,9 (для самостоятельного решения). Решить уравнение $x^5+5x+1=0$ по способу № 4 с точностью до 0,00001.

Ответ. $x=-0{,}19994$.

Задача 2,9а (для самостоятельного решения). Определить с точностью до 10^{-3} все корни уравнения

$$x^6+25{,}00x^5+282{,}3x^4+337{,}5x^3+338{,}4x^2+179{,}9x+7{,}360=0$$

по способу № 4.

Ответ. $x_1=-0{,}046$; $x_2=-0{,}698$; $x_{3,4}=-0{,}213\pm0{,}912i$; $x_{5,6}=-11{,}92\pm11{,}01i$.

Задача 2,10 (для самостоятельного решения). Определить с точностью до 10^{-2} корни уравнения

$$x^3+6{,}32x^2+27{,}5x+31{,}6=0.$$

Ответ. $x=-1{,}57$.