ТРЕТЬЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание. Решение трансцендентных уравнений

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

1. **Графическое решение.** Приближенное значение корней уравнения

$$f(x) = 0 \tag{3,1}$$

можно получить, если тщательно вычертить на миллиметровке кривую $y = f(x)$ и определить абсциссы точек пересечения этой кривой с осью Ox. Для уточнения корней, найденных графически, можно воспользоваться способом Ньютона или способом хорд, которые описаны в первом практическом занятии, а также указанными там же модификациями этих методов.

Вместо построения кривой $y = f(x)$, которое может быть затруднительным, часто полезно представить уравнение $f(x) = 0$ в виде

$$\varphi(x) - \psi(x) = 0$$

или

$$\varphi(x) = \psi(x), \tag{3,2}$$

после чего построить кривые

$$y = \varphi(x) \text{ и } y = \psi(x), \tag{3,3}$$

причем, если удачно представить функцию $f(x)$ в виде разности $\varphi(x) - \psi(x)$, то построить кривые (3,3) будет значительно легче, чем кривую $y = f(x)$.

Если уравнение $f(x) = 0$ заменено уравнением (3,2), то решениями исходного уравнения будут абсциссы точек пересечения кривых (3,3). Приведем пример.

Пусть требуется решить уравнение

$$\cos x \cdot e^x - 1 = 0. \tag{A}$$

Представим его в виде

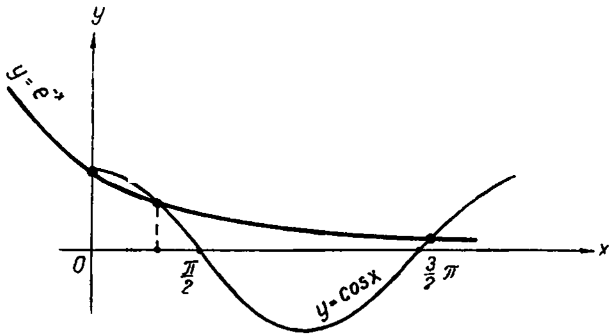
$$\cos x \cdot e^x = 1$$

или

$$\cos x = \frac{1}{e^x}; \quad \cos x = e^{-x}. \tag{B}$$

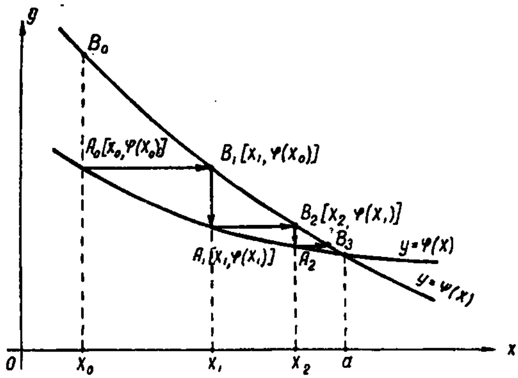
Построим кривые $y = \cos x$ и $y = e^{-x}$.

Абсциссы точек пересечения этих кривых и будут искомыми корнями данного уравнения. Очевидно, что построить кривые (B) значительно проще, чем кривую $y = \cos x \cdot e^x - 1$ (см. фиг. 3,0).



Фиг. 3,0

Кроме метода Ньютона и метода хорд, которые известны из предыдущих занятий, укажем еще один распространенный метод итерации, хотя методы хорд и касательных также являются частным случаем итерационных методов.



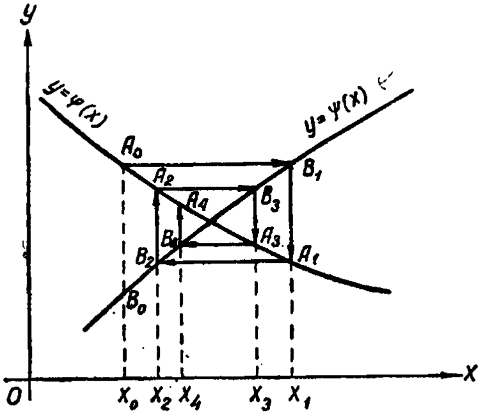
Фиг. 3,1

2. **Метод итерации.** После того, как уравнение $f(x) = 0$ переписано в виде $\varphi(x) = \psi(x)$, как уже было указано, даже грубое изображение этих кривых позволит найти приближенное значение корней уравнения $f(x) = 0$. Пусть таким приближенным значением одного корня будет $x = x_0$. Проведем прямую $x = x_0$. Она встретит рассматриваемые кривые в двух точках: фиг. 3,1 или фиг. 3,2.

Из этих двух точек следует выбрать ту, для которой угловой коэффициент касательной к кривой в точке x_0 имеет меньшую абсолютную величину. Положим, например, что

$$|\varphi'(x_0)| < |\psi'(x_0)|.$$

На фиг. 3,1 и 3,2 такой является точка A_0 на кривой $y=\varphi(x)$. В этой точке $|\varphi'(x_0)| < |\psi'(x_0)|$. По найденному значению $x = x_0$ определяем ординату $y_0 = \varphi(x_0)$ точки пересечения прямой $x = x_0$ с кривой $y=\varphi(x)$. Через точку $A_0[x_0, \varphi(x_0)]$ проводим прямую,



Фиг. 3,2

параллельную оси Ox, до пересечения в точке B_1 с кривой $y = \psi(x)$. Ордината точки B_1 такая же, как и ордината точки A_0. Подставляя в уравнение $y=\psi(x)$ вместо y значение $y_0 = \varphi(x_0)$ и решая уравнение

$$\psi(x) = \varphi(x_0),$$

находим значение x_1 — второе приближение корня. Найденное x_1 является абсциссой точки B_1 и, следовательно, абсциссой точки A_1. По известной абсциссе точки A_1 находим ее ординату y_1, которая равна значению функции $\varphi(x)$ при $x = x_1$, т. е. $y_1 = \varphi(x_1)$.

Из точки A_1 проводим прямую, параллельную оси Ox, до пересечения в точке B_2 с кривой $y=\psi(x)$. Ордината точки B_2 такая же, как и ордината точки A_1. Подставляя в уравнение $y=\psi(x)$ вместо y значение $y_1 = \varphi(x_1)$ и решая уравнение

$$\psi(x) = \varphi(x_1),$$

находим x_2 — третье приближение корня, которое является одновременно абсциссой точек B_2 и A_2.

Дальше поступаем так же. Зная абсциссу точки A_2 из уравнения $y = \varphi(x)$, заменяя в нем x на x_2, находим $y_2 = \varphi(x_2)$ — ординату точки A_2. Из точки A_2 проводим прямую, параллельную оси Ox, до пересечения ее в точке B_3 с кривой $y = \psi(x)$. Точка B_3 имеет такую же ординату, как и точка A_2. Зная ординату точки B_3, равную $y_2 = \varphi(x_2)$, и подставляя это значение вместо y в уравнение $y = \psi(x)$, решаем уравнение

$$\psi(x) = \varphi(x_2)$$

и определяем абсциссу x_3 точки B_3. Значение x_3 является четвертым приближением искомого корня.

Следующие приближения находим так же.

Если угловые коэффициенты касательных к кривым $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$ вблизи точки пересечения имеют один и тот же знак, то последовательные приближения x_0, x_1, x_2, ... стремятся к корню с одной стороны (фиг. 3,1), а если эти угловые коэффициенты имеют противоположные знаки, то приближения x_0, x_1, x_2 стремятся к корню, принимая попеременно значения, то меньшие, то большие корня (фиг. 3,2).

Но предложенный метод, который будем называть первым, не является единственным. Все выкладки значительно упрощаются, если заданное уравнение $f(x) = 0$ представить в виде

$$x = \varphi(x), \tag{3,4}$$

а этого можно достигнуть всегда.

Действительно, если $f(x) = 0$, то и $\lambda f(x) = 0$, где λ — величина постоянная. Прибавляем x к обеим частям последнего уравнения:

$$x + \lambda f(x) = x.$$

Обозначая теперь

$$x + \lambda f(x) = \varphi(x), \tag{3,5}$$

получаем уравнение (3,4).

Таким образом, показано, что уравнение $f(x) = 0$ можно преобразовать к виду $x = \varphi(x)$, но параметр λ остался свободным. О выборе его будет сказано ниже (см. стр 66). После того как заданное уравнение $f(x) = 0$ представлено в виде (3,4)

$$x = \varphi(x),$$

поступают так: графически или методом проб находят первое приближение корня $x = x_0$. Для получения следующего приближения в правую часть уравнения (3,4) подставляют x_0 и тогда вторым приближением корня будет

$$x_1 = \varphi(x_0).$$

Подставляя в правую часть уравнения (3,4) x_1 вместо x, находим третье приближение x_2 корня

$$x_2 = \varphi(x_1).$$

Таким образом, последовательные приближения получаются по следующей схеме:

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi(x_0); \\ x_2 &= \varphi(x_1); \\ x_3 &= \varphi(x_2); \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_n &= \varphi(x_{n-1}). \end{aligned} \tag{3,6}$$

Определение последовательных приближений по этой схеме будем называть вторым итерационным методом.

Могут встретиться два случая:

1) последовательность $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ сходится, т. е. имеет предел, и тогда этот предел будет корнем уравнения $f(x) = 0$;

2) последовательность $x_0, x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$ расходится, предела не имеет.

Укажем теорему, выражающую условие, при котором итерационный процесс сходится.

Теорема. *Пусть на отрезке* $[a, b]$ *имеется единственный корень уравнения* $x = \varphi(x)$ *и во всех точках этого отрезка производная* $\varphi'(x)$ *удовлетворяет неравенству*

$$|\varphi'(x)| \leqslant M < 1. \tag{3,7}$$

Если при этом выполняется и условие

$$a \leqslant \varphi(x) \leqslant b, \tag{3,8}$$

то итерационный процесс сходится, а за нулевое приближение x_0 *можно взять любое число из отрезка* $[a, b]$.

Условие (3,8) означает, что все приближения $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, вычисленные по схеме (3,6), находятся тоже на отрезке $[a, b]$. Сходимость итерационного процесса будет тем лучше, чем меньше $|\varphi'(x)|$.

Чтобы закончить пояснения, относящиеся к теории итерационного метода, укажем, как определить точность вычисленных значений корня. Если a — точное значение корня уравнения $x = \varphi(x)$, а число M определяется из соотношения (3,7), то справедливо следующее соотношение:

$$\left| a - x_n \right| \leqslant \frac{M}{1-M} \left| x_n - x_{n-1} \right|. \tag{3,9}$$

Из этого неравенства следует, что если поставлено условие, чтобы приближение корня x_n отличалось от его точного значения меньше на заданное число ε, то приближения x_0, x_1, x_2, ... надо вычислять до тех пор, пока правая часть неравенства (3,9) не станет меньше этого числа ε или равной ему, т. е.

$$\frac{M}{1-M}|x_n - x_{n-1}| \leqslant \varepsilon \tag{3,10}$$

или

$$|x_n - x_{n-1}| \leqslant \frac{\varepsilon(1-M)}{M}. \tag{3,11}$$

(Об условиях сходимости итерационных процессов и доказательство относящихся сюда теорем см.: Б. П. Демидович и И. А. Марон. Основы вычислительной математики, гл. IV. Физматгиз, 1960).

Заметим, что уравнение $f(x) = 0$ можно различными способами привести к виду $x = \varphi(x)$. Из этих видов нужно выбрать тот, в котором выполняется условие (3,7) указанной теоремы.

Что касается числа λ в формуле (3,5), то его следует подобрать так, чтобы значение производной в левой части этой формулы было по абсолютной величине меньше единицы, т. е. чтобы

$$|\varphi'(x)| = |1 + \lambda f'(x)| < 1.$$

Из неравенства

$$|1 + \lambda f'(x)| < 1$$

следует, что λ должно удовлетворять неравенству

$$0 < \lambda f'(x) < 2.$$

Такой выбор λ гарантирует сходимость итерационного процесса При решении задач этого практического занятия рекомендуется пользоваться такими таблицами:

1. Б. И. Сегал и К. А. Семендяев. Пятизначные математические таблицы.
2. Л. Дж. Комри. Шестизначные математические таблицы Чемберса.

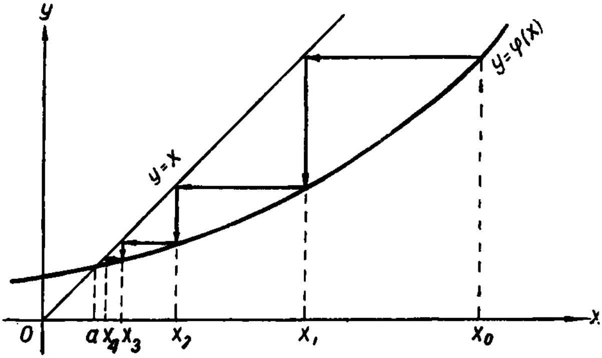
Вычисления следует вести при помощи настольной клавишной машины или арифмометра, а также в нужных случаях пользоваться логарифмической линейкой.

Геометрическая интерпретация итерационного процесса, применяемого к уравнению $x = \varphi(x)$ с учетом использования указанной теоремы, выглядит так, как показано на фиг. 3,3, где изображен сходящийся итерационный процесс. Здесь кривая пересекает биссектрису в точке с абсциссой a и при $x > a$ лежит под биссектрисой, а $\varphi'(x)$ удовлетворяет условию $0 < \varphi'(x) < 1$. Итерационный процесс сходится, а последовательные приближения монотонно убывают.

На фиг. 3,4 производная $\varphi'(x) < 0$, но по абсолютной величине меньше единицы: $|\varphi'(x)| < 1$. Итерационный процесс сходится, но приближения *колеблются* около точного значения корня.

На фиг. 3,5 показан расходящийся итерационный процесс. Здесь $\varphi'(x) > 1$. Кривая пересекает биссектрису $y = x$ в точке a и при $x > a$ лежит над биссектрисой.

На фиг. 3,6 также изображен расходящийся процесс: $|\varphi'(x)| > 1$. На чертеже видно, как последовательные «приближения» удаляются от точного значения корня.



Фиг. 3,3

Теперь приступим к решению задач.

Задача 3,1. Решить уравнение

$$f(x) = e^x - x^2 = 0.$$

Решение. Перепишем уравнение в виде (3,2)

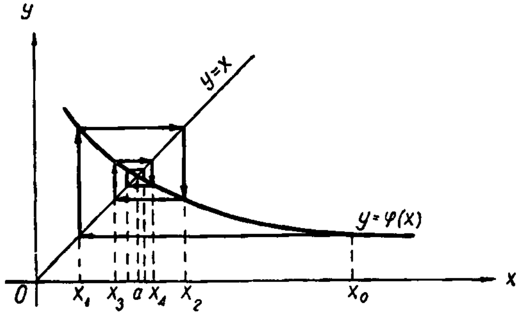
$$e^x = x^2$$

и определим графически приближенное значение отрицательного корня (положительного корня уравнение не имеет, так как при $x \geqslant 0$ $e^x > x^2$). Приближенное значение отрицательного корня примем

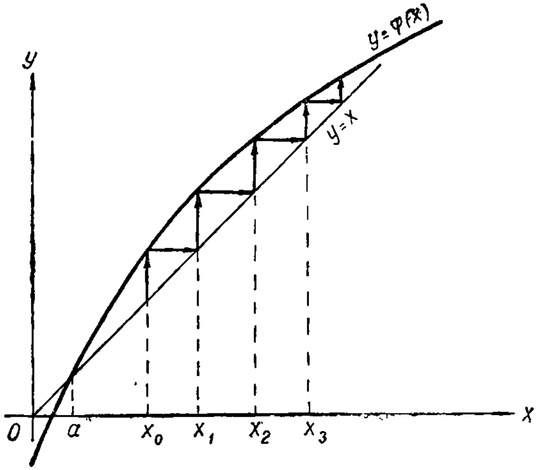
$$x_0 = -\frac{1}{2}.$$

Решим задачу сначала тем итерационным методом, который мы назвали первым, а потом — вторым.

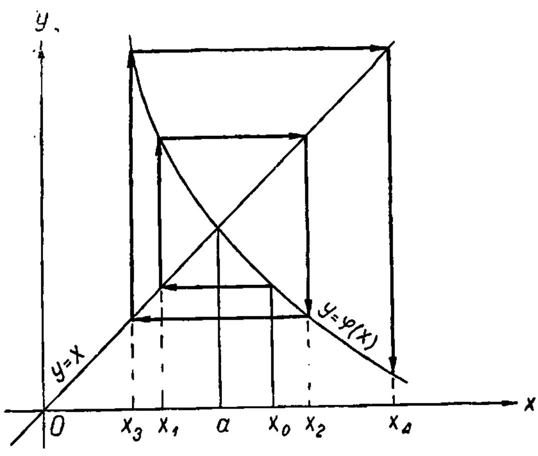
Решение первым методом. Прямая $x = -0{,}5$ пересекает кривые $\psi(x) = x^2$ и $\varphi(x) = e^x$ в двух точках. Нам следует выбрать ту из них, в которой угловой коэффициент касательной меньший



Фиг. 3,4



Фиг. 3,5



Фиг. 3,6

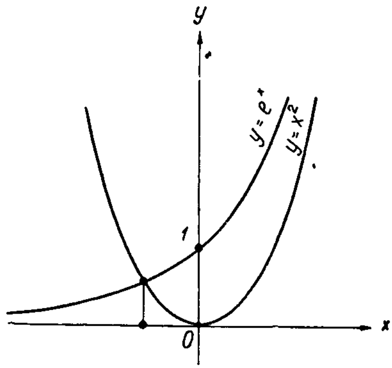
по абсолютной величине, т. е. точку, в которой абсолютное значение производной при $x = -0,5$ является меньшим. У нас

$$\psi(x) = x^2;\ \psi'(x) = 2x;\ \psi'(-0,5) = 2 \cdot (-0,5) = -1;$$
$$|\psi'(x)| = |\psi'(0,5)| = 1;$$
$$\varphi(x) = e^x;\ \varphi'(x) = e^x;\ \varphi'(-0,5) = e^{-0,5} = 0,60653;$$
$$|\varphi'(0,5)| = 0,60653.$$

Значит,

$$|\varphi'(x_0)| < |\psi'(x_0)|,$$

и *точку следует выбрать на кривой* $\varphi(x) = e^x$. Так как угловые коэффициенты касательных, проведенных в точку пересечения кривых $\varphi(x) = e^x$ и $\varphi(x) = x^2$, противоположны по знаку, то надо ожидать, что последовательные приближения будут стремиться к корню, принимая значения то больше его, то меньше.



К задаче 3,1

Чтобы найти второе приближение, необходимо определить x из уравнения

$$\psi(x) = \varphi(x_0),$$

т. е. из уравнения

$$x^2 = e^{x_0} = e^{-0,5} = 0,60653.$$

Отсюда второе приближение

$$x_1 = -\sqrt{0,60653} = -0,77880.$$

(перед радикалом взят знак минус, так как корень уравнения имеет только отрицательное значение).

Чтобы найти третье приближение корня, надо решить уравнение

$$\psi(x) = \varphi(x_1),$$

т. е.

$$x^2 = e^{x_1} = e^{-0,7788} = 0,45895;$$
$$x_2 = -\sqrt{0,45895} = -0,67746.$$

Четвертое приближение корня получим из уравнения

$$\psi(x) = \varphi(x_2),$$

т. е.

$$x^2 = e^{x_2} = e^{-0,67746} = 0,50791;$$
$$x_3 = -\sqrt{0,50791} = -0,71268.$$

Пятое приближение корня вычислим, решив уравнение

$$\psi(x) = \varphi(x_3),$$

т. е. уравнение

$$x^2 = e^{x_3} = e^{-0,71268} = 0,49033;$$

$$x_4 = -\sqrt{0,49033} = -0,70023.$$

Шестое приближение корня ищем из уравнения

$$\psi(x) = \varphi(x_4),$$

т. е. уравнения

$$x^2 = e^{x_4} = e^{-0,70023} = 0,49647;$$

$$x_5 = -\sqrt{0,49647} = -0,70460.$$

Для определения седьмого приближения решаем уравнение

$$\psi(x) = \varphi(x_5),$$

т. е.

$$x^2 = e^{x_5} = e^{-0,70460} = 0,49431;$$

$$x_6 = -\sqrt{0,49431} = -0,70307.$$

Решив уравнение

$$\psi(x) = \varphi(x_6),$$

т. е.

$$x^2 = e^{x_6} = e^{-0,70307} = 0,49506,$$

найдем восьмое приближение корня

$$x_7 = -\sqrt{0,49506} = -0,70365.$$

Для девятого приближения

$$\psi(x) = \varphi(x_7);$$

$$x^2 = e^{x_7} = e^{-0,70365} = 0,49477;$$

$$x_8 = -\sqrt{0,49477} = -0,70339.$$

Десятое приближение получим из уравнения

$$\psi(x) = \varphi(x_8),$$

т. е.

$$x^2 = e^{-0,70339} = 0,49490;$$

$$x_9 = -\sqrt{0,49490} = -0,70349.$$

Одиннадцатое приближение вычислим, решив уравнение

$$\psi(x) = \varphi(x_9),$$

т. е.

$$x^2 = e^{x_9} = e^{-0,70349} = 0,49485;$$
$$x_{10} = -\sqrt{0,49485} = -0,70346.$$

Двенадцатое приближение даст

$$x_{11} = -\sqrt{0,49487} = -0,70347.$$

Таким образом, с точностью до 0,00001 искомый корень

$$x = -0,70346.$$

Из проведенного расчета видно, что итерационный процесс шел очень медленно (сходимость была плохой). Как мы и ожидали, последовательные приближения колебались около корня. Они были то больше, то меньше. Составим таблицу приближений:

№ приближений	Приближенное значение корня	
0	—0,50000	
		—0,28880
1	—0,78880	
		+0,11134
2	—0,67746	
		—0,03522
3	—0,71268	
		+0,01245
4	—0,70023	
		—0,00437
5	—0,70460	
		+0,00153
6	—0,70307	
		—0,00058
7	—0,70365	
		+0,00026
8	—0,70339	
		—0,00010
9	—0,70349	
		+0,00003
10	—0,70346	
		—0,00001
11	—0,70347	

В этой таблице справа от значения приближений корня стоят разности между этими значениями. Знаки разностей чередуются (+, —, +, —, . . .), а сами они по абсолютной величине убывают. Медленная сходимость процесса объясняется тем, что нулевое приближение x_0 было определено слишком грубо. Если бы мы определили интервал, на котором находится корень, и подошли бы более критично к выбору нулевого приближения, то процесс сходимости ускорился бы.

Чтобы убедиться в этом, найдем интервал, на котором находится корень. Для этого нужно определить так называемую «вилку», т. е. найти такие два значения x, при которых $f(x)$ имеет противоположные знаки. Эти два значения x и определят искомый интервал, причем его надо сделать как можно меньшим и следить за тем, чтобы на нем был единственный корень уравнения. В нашем случае имеется единственный отрицательный корень. Методом проб определим «вилку». У нас $f(x) = e^x - x^2$. Начнем со значения $x = -0,6$.

$$f(-0,6) = 0,54881 - 0,36 = 0,18881 > 0;$$
$$f(-0,7) = 0,49659 - 0,49 = 0,00659 > 0;$$
$$f(-0,8) = 0,44933 - 0,64 = -0,19067 < 0.$$

Таким образом, на концах интервала (—0,8; — 0,7) функция $f(x)$ имеет различные знаки, причем, поскольку $|f(-0,7)| < |f(-0,8)|$, то корень находится ближе к —0,7, чем к —0,8.

Попытаемся сузить интервал. Правый его конец оставим без изменения, левый сдвинем направо

$$f(-0,75) = 0,49237 - 0,49 < 0,$$

а поскольку $f(-0,7) > 0$, то корень находится на интервале (—0,75; —0,7).

Попытаемся сузить и этот интервал, сдвигая его левый конец вправо

$$f(-0,725) = 0,48432 - 0,52562 = -0,04130 < 0.$$

Так как $f(-0,725) < 0$, а $f(-0,7) > 0$, то корень находится на интервале (—0,725; —0,7). В качестве нулевого приближения можно взять любой из концов этого интервала, а также любую точку внутри его.

Мы возьмем за x_0 правый конец интервала, т. е. $x_0 = -0,7$. Следующее второе приближение найдем из уравнения

$$\psi(x) = \varphi(x_0).$$

У нас $\psi(x) = x^2$, $\varphi(x) = e^x$. Поэтому надо определить x из уравнения

$$x^2 = e^{x_0} = e^{-0,7} = 0,49659; \quad x_1 = -0,70469.$$

Третье приближение найдем из уравнения

$$\psi(x) = \varphi(x_1),$$

т. е. из уравнения

$$x^2 = e^{x_1} = e^{-0,70469} = 0,49494;$$

$$x_2 = -\sqrt{0,49494} = -0,70352.$$

Четвертое приближение

$$\psi(x) = \varphi(x_2);$$

$$x^2 = e^{-0,70352} = 0,49484;$$

$$x_3 = -\sqrt{0,49484} = -0,70345.$$

Этот корень, найденный в четвертом приближении, отличается от полученного раньше в двенадцатом приближении только на 0,00002.

Пятое приближение

$$\psi(x) = \varphi(x_3);$$

$$x^2 = e^{x_3} = e^{-0,70345} = 0,49488.$$

Таким образом, на *пятом* приближении мы имеем теперь то, что раньше на *двенадцатом*. Отсюда видно, насколько важно выбрать удачно нулевое приближение.

Всю предыдущую работу мы выполнили исключительно в методических целях: 1) на большом числе упражнений читатель освоился с решением уравнения вида $\psi(x) = \varphi(x)$ и 2) было показано, что выбор нулевого приближения не может быть произвольным, а его удачный выбор скорее ведет к цели.

Теперь для решения того же уравнения используем метод, который мы назвали вторым: преобразуем заданное уравнение к виду (3,4)

$$x = \varphi(x)$$

и применим схему (3,6) для его решения.

Из уравнения $e^x - x^2 = 0$ следует, что $x^2 = e^x$, а $x = -\sqrt{e^x}$ (перед радикалом удержан знак минус потому, что корень, как мы знаем, отрицателен).

В виде (3,4) уравнение запишется так:

$$x = -e^{\frac{x}{2}}.$$

Теперь проверим, выполнено ли условие (3,7), т. е. выполняется ли во всех точках интервала (—0,725; —0,7) неравенство

$$|\varphi'(x)| < 1.$$

С этого всегда надо начинать решение уравнения вида (3,4). У нас

$\varphi(x) = -e^{\frac{x}{2}}$; $\varphi'(x) = -\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$;

$$|\varphi'(-0{,}725)| = 0{,}34727; \quad |\varphi'(-0{,}7)| = 0{,}35230,$$

число M в формуле (3,7) возьмем равным 0,36. Так как $|\varphi'(x)| < 1$, то *процесс будет сходиться*. Мы хотим вычислить корень с точностью 0,00001, т. е. $\varepsilon = 0{,}00001$. Надо остановиться на каком-то приближении. Для этого определим по формуле (3,11), какой по абсолютной величине должна быть разность между двумя последовательными приближениями, чтобы считать, что требуемая точность достигнута. Должно выполняться на основании (3,11) неравенство

$$|x_n - x_{n-1}| \leqslant \frac{\varepsilon(1-M)}{M}.$$

Так как $M = 0{,}36$; $\varepsilon = 0{,}00001$, то

$$|x_n - x_{n-1}| \leqslant \frac{0{,}00001 \cdot (1 - 0{,}36)}{0{,}36} = 0{,}0000177.$$

Таким образом, мы будем считать, что требуемая точность достигнута, если абсолютная величина разности двух последовательных приближений не больше 0,00002.

За нулевое приближение принимаем по-прежнему $x_0 = -0{,}7$. Так как у нас $\varphi(x) = -e^{\frac{x}{2}}$, то, применяя схему (3,6) к уравнению

$$x = -e^{\frac{x}{2}}$$

и помещая вычисления в таблицу, получаем

x	$\frac{x}{2}$	$-e^{\frac{x}{2}}$
−0,7	−0,35	−0,70460
−0,70460	−0,35230	−0,70307
−0,70307	−0,35154	−0,70360
−0,70360	−0,35180	−0,70342
−0,70342	−0,35171	−0,70348
−0,70348	−0,35174	−0,70346
−0,70346		

Абсолютная величина разности между x_5 — шестым приближенным и x_6 — седьмым приближенным равна 0,00002. Поэтому на основании сделанного по формуле (3,11) вычисления можно считать, что требуемая точность достигнута и за искомый корень принять любое из этих чисел, т. е.

$$x = -0{,}70346 \text{ или } x = -0{,}70348.$$

От найденного первым методом $x = -0{,}70347$ эти значения отличаются только на 0,00001.

Читатель, по-видимому, заметил, что решение этим методом оказалось проще, поскольку вычисления велись без извлечения корня, как при решении первым методом, и все свелось только к вычислению степеней числа e. Быстрая сходимость здесь объяснялась тем, что число M было ближе к нулю, чем к единице. На этом примере мы подробно разобрали первый и второй методы. Сделаем такое указание. Первый метод следует применять только тогда, когда преобразование уравнения $f(x) = 0$ к виду $x = \varphi(x)$ представляет большие трудности. Во всех других случаях надо стремиться к тому, чтобы заданное уравнение было преобразовано к виду $x = \varphi(x)$. Такое преобразование часто можно осуществить, как уже указывалось, не единственным способом, причем выбрать тот из видов, в котором число M было бы возможно меньшим, так как при этом последовательность приближений будет быстрее сходиться к корню заданного уравнения.

Повторим еще раз, что решение необходимо начинать с проверки выполнения неравенства (3,7)

$$|\varphi'(x)| < 1$$

во всех точках того интервала, на котором находится корень.

Задача 3,2. Решить уравнение

$$f(x) = \cos x - x + 4 = 0$$

с точностью до 0,00001.

Решение. Преобразуем уравнение к виду (3,4) $x = \varphi(x)$. Получится

$$x = \cos x + 4.$$

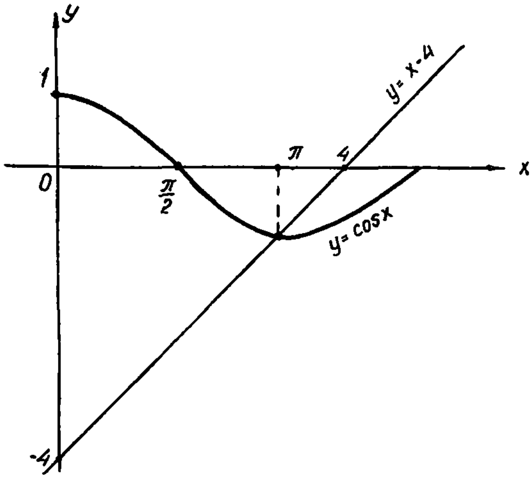
Значит,

$$\varphi(x) = \cos x + 4 \tag{A}$$

Теперь, чтобы легче было графически определить приближенное значение корня (см. рисунок), запишем уравнение в виде: $\cos x = x - 4$. Абсцисса точки пересечения кривых приближенно равна 3. Проверим, что корень находится на интервале $(3, \pi)$:

$$f(3) = \cos 3 - 3 + 4 = -0,98999 + 1 = 0,01001 > 0;$$

$$f(\pi) = \cos\pi - \pi + 4 = -1 - 3,14159 + 4 = -0,14159 < 0.$$



К задаче 3,2

Таким образом, «вилка» найдена. За нулевое приближение корня надо взять число 3 — левый конец интервала, так как на этом конце $|f(3)| < |f(\pi)|$. Теперь установим, будет ли сходиться итерационный процесс, т. е. выполняется ли неравенство (3,7)

$$|\varphi'(x)| < 1$$

во всех точках интервала $(3, \pi)$. Из (A) следует, что

$$\varphi(x) = \cos x + 4; \quad \varphi'(x) = -\sin x;$$

$$|\varphi'(x)| = \sin x; \quad |\varphi'(3)| = \sin 3 = 0,14122;$$

$$|\varphi'(\pi)| = \sin\pi = 0.$$

Во всех точках интервала $(3, \pi)$ $|\varphi'(x)| < 1$ и тем самым неравенство (3,7) выполняется, процесс будет сходящимся, причем в качестве числа M необходимо взять 0,15, так как и $\sin 3$ и $\sin \pi$ меньше, чем 0,15. Итак, $M = 0,15$. Теперь определим, какой должна быть абсолютная величина разности между двумя последовательными приближениями x_n и x_{n-1}, чтобы обеспечить требуемую точность в 0,00001.

У нас $\varepsilon = 0,00001$, $M = 0,15$, а потому по формуле (3,11)

$$|x_n - x_{n-1}| \leqslant \frac{\varepsilon(1-M)}{M} = \frac{0,00001 \cdot (1-0,15)}{0,15} = \frac{0,00001 \cdot 0,85}{0,15} = 0,00006,$$

т. е.

$$|x_n - x_{n-1}| \leqslant 0,00006. \qquad \text{(A)}$$

Таким образом, если между двумя последовательными приближениями разность не будет превышать 0,00006, то итерационный процесс надо остановить и считать, что требуемая точность достигнута.

После этих выкладок приступаем к решению задачи, пользуясь схемой (3,6). У нас нулевое приближение

$$x_0 = 3.$$

Применим схему (3,6);

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi(x_0) = \cos 3 + 4 = -0,98999 + 4 = 3,01001; \\ x_2 &= \varphi(x_1) = \cos 3,01001 + 4 = -0,99135 + 4 = 3,00865; \\ x_3 &= \varphi(x_2) = \cos 3,00865 + 4 = -0,99117 + 4 = 3,00883; \\ x_4 &= \varphi(x_3) = \cos 3,00883 + 4 = -0,99120 + 4 = 3,00880. \end{aligned}$$

На этом можно остановиться, так как

$$|x_4 - x_3| < 0,00006,$$

т. е. требование (A) выполнено.

Такая быстрая сходимость обусловлена здесь малостью числа M и удачным выбором нулевого приближения.

Итак, искомый корень

$$x = 3,00880.$$

Задача 3,3. Решить уравнение

$$2x - 3\ln x - 3 = 0$$

с точностью до 0,00001.

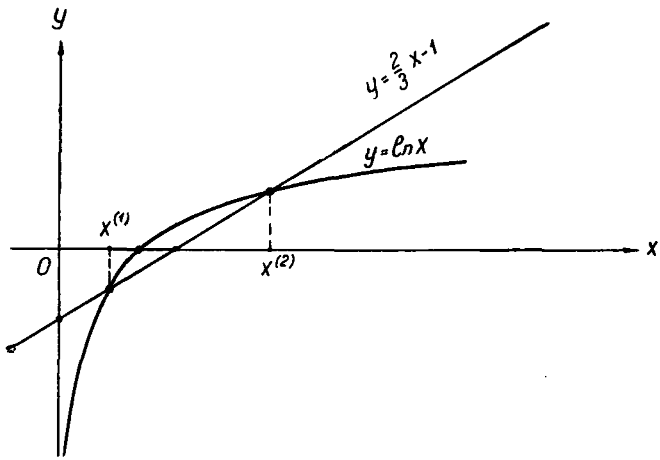
Решение. Преобразуем прежде всего заданное уравнение к такому виду, который позволит легче графически установить приближенное значение корня. Запишем уравнение в виде

$$\ln x = \frac{2x-3}{3}, \quad \text{или} \quad \ln x = \frac{2}{3}x - 1.$$

Построим кривые $y = \ln x$ и $y = \frac{2}{3}x - 1$ (см. рисунок). Из чертежа видно, что имеется два положительных корня. Определим интервалы, в которых они содержатся.

Меньший корень $x^{(1)}$ находится на интервале (0,5; 0,6). Действительно,

$$f(0{,}5) = 2 \cdot 0{,}5 - 3\ln 0{,}5 - 3 = 1 - 3 \cdot (-0{,}69315) - 3 =$$
$$= 0{,}07945 > 0;$$
$$f(0{,}6) = 2 \cdot 0{,}6 - 3\ln 0{,}6 - 3 = 1{,}2 - 3 \cdot (-0{,}51083) - 3 =$$
$$= -0{,}26751 < 0.$$



К задаче 3,3

Таким образом, первый корень находится на интервале (0,5; 0,6), причем ближе к левому его концу, так как $|f(0{,}5)| < |f(0{,}6)|$. Поэтому за нулевое приближение меньшего корня следует принять $x_0^{(1)} = 0{,}5$.

Теперь преобразуем заданное уравнение к виду $x = \varphi(x)$:

$$x = 0{,}5\,(3\ln x + 3). \qquad \text{(A)}$$

Вслед за этим определим, будет ли сходящимся итерационный процесс. Для этого проверим выполнение для $\varphi'(x)$ неравенства (3,7): $|\varphi'|(x)| < 1$ во всех точках интервала (0,5; 0,6). У нас

$$\varphi(x) = 0{,}5\,(3\ln x + 3); \quad \varphi'(x) = \frac{0{,}5 \cdot 3}{x} = \frac{1{,}5}{x}.$$

Очевидно, что на интервале (0,5; 0,6) изоляции корня $\varphi'(x) > 1$

и, значит, условие (3,7) не выполнено. Поэтому представим уравнение в другом виде. Из заданного уравнения

$$2x - 3\ln x - 3 = 0$$

следует, что

$$\ln x = \frac{2}{3}x - 1,$$

а

$$x = e^{\frac{2}{3}x-1}. \tag{B}$$

Теперь уже

$$\varphi(x) = e^{\frac{2}{3}x-1};\quad \varphi'(x) = \frac{2}{3}e^{\frac{2}{3}x-1};$$

$$\varphi'(0,5) = \frac{2}{3}e^{\frac{2}{3}\cdot 0,5-1} = \frac{2}{3}e^{-0,66667} = \frac{2}{3}\cdot 0,51342 = 0,34228;$$

$$\varphi'(0,6) = \frac{2}{3}e^{\frac{2}{3}\cdot 0,6-1} = \frac{2}{3}e^{-0,6} = \frac{2}{3}\cdot 0,54881 = 0,36587.$$

Таким образом, на интервале (0,5; 0,6) условие $|\varphi'(x)| < 1$ выполнено и итерационный процесс будет сходящимся. Возьмем $M = 0,37$. У нас $\varepsilon = 0,00001$. Определим по формуле (3,11), какой должна быть разность между двумя последовательными приближениями, чтобы мы имели право считать, что заданная точность достигнута.

$$|x_n - x_{n-1}| \leqslant \frac{\varepsilon(1-M)}{M} = \frac{0,00001\cdot(1-0,37)}{0,37} =$$

$$= \frac{0,00001\cdot 0,63}{0,37} \approx 0,00002.$$

Если абсолютная величина этой разности будет меньше или равна 0,00002, то процесс итерации следует прекратить и считать, что заданная точность достигнута.

За нулевое приближение меньшего корня возьмем, как мы условились, $x_0^{(1)} = 0,5$. Применим итерационную схему (3,6) к уравнению (B).

Вычисления удобно вести с помощью такой таблицы:

x	$\frac{2}{3}x$	$\frac{2}{3}x-1$	$e^{\frac{2}{3}x-1}$
0,5	0,33333	—0,66667	0,51342
0,51342	0,34228	—0,65772	0,51803
0,51803	0,34536	—0,65464	0,51963
0,51963	0,34642	—0,65358	0,52018
0,52018	0,34679	—0,65321	0,52037
0,52037	0,34692	—0,65308	0,52044
0,52044	0,34696	—0,65304	0,52046
0,52046	0,34698	—0,65302	0,52047

На этом процесс итерации можно остановить и считать, что

$$x^{(1)} = 0{,}52047.$$

Приступим к определению большего положительного корня. Прежде всего, определим интервал, в котором он находится. Из чертежа к этой задаче видно, что второй корень $x^{(2)} \approx 3$.

Рассмотрим интервал (3,2; 3,3). У нас

$$f(x) = 2x - 3\ln x - 3;$$

$$f(3{,}2) = 2 \cdot 3{,}2 - 3\ln 3{,}2 - 3 = 6{,}4 - 3{,}48549 - 3 = -0{,}08549 < 0;$$

$$f(3{,}3) = 2 \cdot 3{,}3 - 3\ln 3{,}3 - 3 = 6{,}6 - 3{,}58177 - 3 = 0{,}01823 > 0.$$

Корень ближе к правому концу интервала его изоляции, так как $|f(3{,}3)| < |f(3{,}2)|$, поэтому за нулевое приближение большего корня $x^{(2)}$ возьмем $x_0^{(2)} = 3{,}3$.

Исследуем теперь, будет ли сходящимся процесс, если пользоваться уравнением (А):

$$x = 0{,}5(3\ln x + 3).$$

Здесь

$$\varphi(x) = 0{,}5(3\ln x + 3); \quad \varphi'(x) = \frac{1{,}5}{x};$$

$$\varphi'(3{,}2) = \frac{1{,}5}{3{,}2} = 0{,}47; \quad \varphi'(3{,}3) = \frac{1{,}5}{3{,}3} = 0{,}45.$$

Возьмем $M = 0{,}48$. Таким образом, итерационный процесс будет сходящимся.

Теперь определим, какой должна быть абсолютная величина разности между двумя последовательными приближениями, чтобы считать достигнутой заданную точность. У нас $M = 0{,}48$; $\varepsilon = 0{,}00001$. По формуле (3,11) должно быть

$$|x_n - x_{n-1}| < \frac{\varepsilon(1-M)}{M} = \frac{0{,}00001 \cdot (1 - 0{,}48)}{0{,}48} =$$

$$= \frac{0{,}00001 \cdot 0{,}52}{0{,}48} \approx 0{,}00001.$$

Как только разность между двумя последовательными приближениями станет не больше 0,00001, мы процесс остановим. Все вычисления поместим в таблицу. Итак, решается уравнение

$$x = 0{,}5(3\ln x + 3),$$

а

$$x_0^{(2)} = 3{,}3.$$

x	$\ln x$	$3\ln x$	$3\ln x+3$	$0{,}5(3\ln x+3)$
3,3	1,19392	3,58176	6,58176	3,29088
3,29088	1,19116	3,57448	6,57448	3,28724
3,28724	1,19005	3,57015	6,57015	3,28508
8,28508	1,18939	3,56817	6,56817	3,28408
3,28408	1,18909	3,56727	6,56727	3,28364
3,28364	1,18895	3,56685	6,56685	3,28342
3,28342	1,18889	3,56670	6,56670	3,28335
3,28335	1,18886	3,56658	6,56658	3,28329
3,28329	1,18884	3,56652	6,56652	3,28326
3,28326	1,18883	3,56649	6,56649	3,28324
3,28324	1,18883	3,56649	6,56649	3,28324
3,28324	1,18883	3,56649	6,56649	3,28324

Больший корень

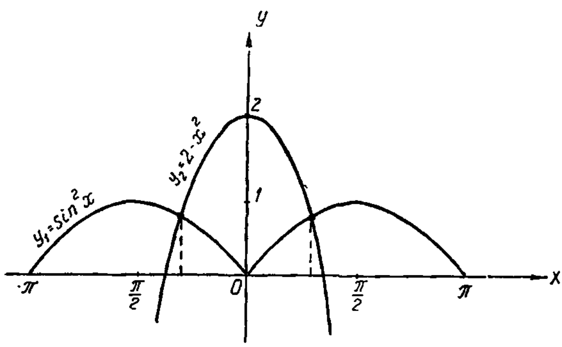
$$x^{(2)} = 3{,}28324.$$

И здесь итерационный процесс шел очень медленно, так как M было достаточно велико.

Задача 3,4. Решить уравнение

$$f(x) = x^2 + \sin^2 x - 2 = 0.$$

Точность 0,0001.



К задаче 3,4

Решение. Из решения предыдущих задач читатель уяснил общую схему, которой мы придерживались. Она состоит в следующем:

1. Заданное уравнение следует привести к виду

$$x = \varphi(x).$$

2. Чтобы графически отделить корень, функцию $f(x)$ надо представить в виде

$$\psi(x) = \varphi(x).$$

Так можно определить приближенное значение корня. Отделить корень следует методом проб.

3. Необходимо проверить, удовлетворяет ли функция $\varphi(x)$ из п. 1 условию (3,7)

$$|\varphi'(x)| < 1$$

во всех точках интервала изоляции корня.

4. Определить число M для использования неравенства (3,11), т. е. для того чтобы узнать, при какой абсолютной величине разности между двумя последовательными приближениями будет достигнута требуемая точность.

5. Решение задачи провести по схеме (3,6).

Придерживаясь этой схемы, решим предложенное уравнение.

1. Перепишем уравнение в виде

$$x^2 = 2 - \sin^2 x = 1 + \cos^2 x,$$

откуда

$$x = \pm\sqrt{1 + \cos^2 x}. \qquad \text{(A)}$$

2. Для того чтобы упростить построение графика функции $y = f(x)$, перепишем уравнение

$$\sin^2 x = 2 - x^2.$$

Из чертежа видно, что корни расположены симметрично относительно начала координат. Отделение корня дает

$$f(1) = 1^2 + \sin^2 1 - 2 = 1 + 0{,}70728 - 2 = -0{,}29272 < 0;$$

$$f(1{,}1) = 1{,}1^2 + \sin^2 1{,}1 - 2 = 1{,}21 + 0{,}79388 - 2 = 0{,}00388 > 0.$$

Значение корня будет ближе к 1,1, чем к 1, так как

$$|f(1{,}1)| < |f(1)|.$$

Таким образом, интервал изоляции корня определен.

3. Проверка условия (3,7). Из (А) следует, что

$$|\varphi(x)| = \sqrt{1 + \cos^2 x};$$

$$|\varphi'(x)| = \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{1 + \cos^2 x}}.$$

Вычислим $|\varphi'(1)|$ и $|\varphi'(1{,}1)|$, причем большая точность при этом не требуется:

$$|\varphi'(1)| = 0{,}40; \ |\varphi'(1{,}1)| = 0{,}38.$$

Процесс будет сходиться, так как

$$|\varphi'(x)| < 1$$

во всех точках интервала изоляции корня.

4. Число M возьмем равным 0,41. Теперь определим по формуле (3,11), какой должна быть абсолютная величина разности между двумя последовательными приближениями, чтобы считать требуемую точность достигнутой.

$$|x_n - x_{n-1}| \leqslant \frac{\varepsilon(1-M)}{M} = \frac{0{,}0001 \cdot (1-0{,}41)}{0{,}41} = \frac{0{,}0001 \cdot 0{,}59}{0{,}41} \approx 0{,}0001.$$

Таким образом, когда разность между двумя последовательными приближениями будет равна 0,0001, итерационный процесс следует остановить.

5. Воспользуемся схемой (3,6) для вычисления корня уравнения. Исходное уравнение имеет вид

$$x = \sqrt{1+\cos^2 x}; \quad x_0 = 1{,}1.$$

Все вычисления поместим в таблицу:

x	$\cos x$	$\cos^2 x$	$1+\cos^2 x$	$\sqrt{1+\cos^2 x}$
1,1	0,45360	0,20575	1,20575	1,09806
1,09806	0,45532	0,20732	1,20732	1,09878
1,00878	0,45468	0,20673	1,20673	1,09851
1,09851	0,45492	0,20695	1,20695	1,09861
1,09861				

Округляя до четырех десятичных знаков, получаем два соседних приближения

$$x_3 = 1{,}0985; \; x_4 = 1{,}0986.$$

Быстрота сходимости объясняется здесь удачным выбором нулевого приближения, сравнительно небольшим значением числа M и небольшой заданной точностью. Итак, уравнение имеет два решения

$$x^{(1)} = -1{,}0985; \; x^{(2)} = 1{,}0985.$$

Задача 3,5. Найти наименьший положительный корень уравнения

$$\operatorname{tg} x - x = 0$$

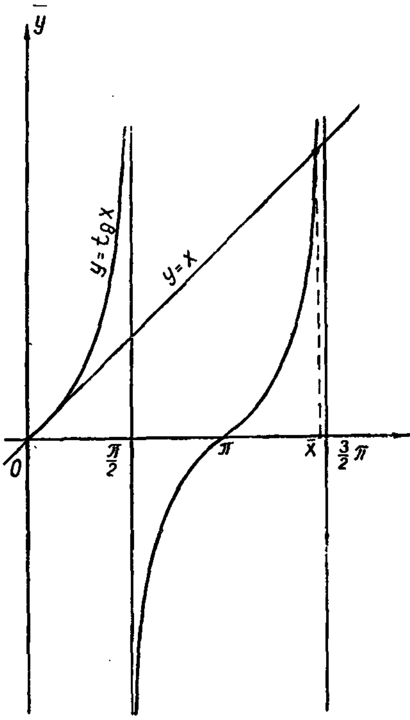
с точностью до 0,0001.

Решение. 1) Представим уравнение в виде

$$x = \varphi(x)$$

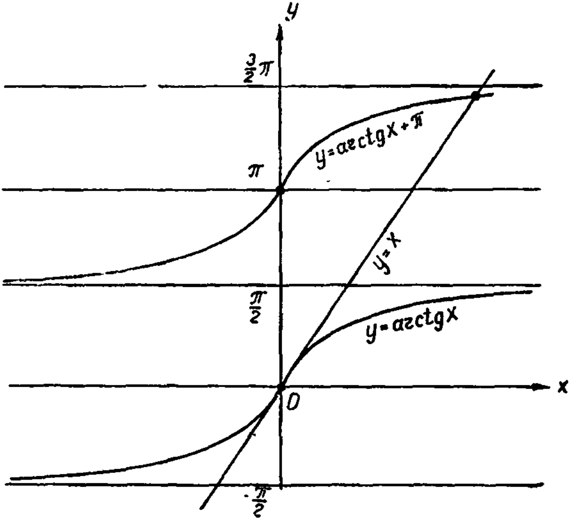
В нашем случае оно будет таким:

$$x = \operatorname{tg} x.$$



y
y = tg x
y = x
0
π/2
π
x̄
3/2 π

$-x$



К задаче 3,5

2) Построим графики функций $y=x$ и $y=\operatorname{tg} x$ (см. чертеж к этой задаче). Легко усмотреть, что за нулевое приближение можно принять $x_0=\frac{3}{2}\pi$. Таким образом корень находится на интервале $\left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$.

3) Проверяем выполнение условия (3,7):

$$\varphi(x)=\operatorname{tg} x; \quad \varphi'(x)=\sec^2 x.$$

Внутри интервала изоляции корня $\left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right) |\varphi'(x)|>1$, поэтому условие (3,7) нарушено. Непосредственно видно, что если бы мы вели решение по уравнению

$$x=\operatorname{tg} x$$

и взяли $x_0=\frac{3}{2}\pi$, то уже второе приближение не могло бы быть найдено. Действительно,

$$x_1=\operatorname{tg} x_0=\operatorname{tg}\frac{3}{2}\pi=\pm\infty.$$

Поэтому уравнение перепишем в другом виде, а именно

$$x=\operatorname{arctg} x+\pi; \quad x_0=\frac{3}{2}\pi=4{,}71237.$$

Вычисления помещаем в таблицу. Следует иметь в виду, что к значениям $\operatorname{arctg} x$, которые находятся из таблиц (например, Чемберса) следует прибавлять число π, так как прямая $y=x$ пересекает ту ветвь кривой $y=\operatorname{arc\,tg} x$, которая удовлетворяет условию

$$\frac{\pi}{2}<\operatorname{arctg} x<\frac{3}{2}\pi,$$

т. е. фактически

$$x=\operatorname{arctg} x+\pi.$$

x	$\operatorname{arctg} x$	π	$\operatorname{arc\,tg} x+\pi$
4,71237	1,36169	3,14159	4,50328
4,50328	1,35227	3,14159	4,48386
4,49386	1,35185	3,14159	4,49344
4,49344	1,35182	3,14159	4,49341
4,49341	1,35182	3,14159	4,49341

Таким образом, искомым корнем с четырьмя верными знаками является

$$x=4{,}49341.$$

Ниже помещены задачи для самостоятельного решения.

Задача 3,6. Методом итерации найти корень уравнения

$$x^7 - 2x^5 - 10x^2 + 1 = 0$$

с пятью верными десятичными знаками.

Указание. Уравнение переписать в виде

$$x = \sqrt{0,1 - 0,2x^5 + 0,1x^7}.$$

Ответ. $x = 0,31529.$

Задача 3,7. Вычислить с четырьмя верными десятичными знаками действительный корень уравнения

$$x^2 + 4\sin x = 0.$$

Ответ. $x = -0,9338.$

Задача 3,8. Определить с шестью верными знаками корень уравнения

$$3x - \cos x - 1 = 0.$$

Ответ. $x = 0,607104.$

Задача 3,9. Найти корень уравнения

$$2x - \log_{10} x = 7$$

с точностью до 0,0001.

Ответ. $x = 3,7893.$