ЧЕТВЕРТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание. Основные определения теории матриц

I. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ МАТРИЦ

1. Матрица и ее элементы

Матрицей называется система элементов (в частном случае чисел), расположенных в определенном порядке и образующих таблицу. Если в этой таблице m строк и n столбцов, а ее элементы обозначены через a_{ij}, где i — номер строки, а j — номер столбца, на пересечении которых находится этот элемент, то матрица записывается в следующем виде:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}. \qquad (4,1)$$

Короче эта матрица может быть записана так:

$$A = [a_{ij}]^*, \ (i = 1, 2, 3, \ldots, m; \ j = 1, 2, 3, \ldots, n) \qquad (4,2)$$

Каждый элемент матрицы называется также ее компонентой. Матрица (4,1) имеет размер $m \times n$.

Если число строк матрицы m не равно числу ее столбцов n, то матрица называется *прямоугольной*.

2. Различные виды матриц

Матрица-столбец. Если в матрице только один столбец, т. е. если $n = 1$, то она называется матрицей-столбцом и имеет такой вид:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}. \qquad (4,3)$$

Матрица-столбец называется также вектором-столбцом.

---

* Матрицы в дальнейшем обозначаются знаком [ ], а определнтели квадратных матриц — знаком | |.

Матрица-строка. Если в матрице только одна строка, то она называется матрицей-строкой и имеет такой вид:

$$A = [a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \cdots a_{1n}]. \tag{4,4}$$

Матрица-строка называется также вектором-строкой.

Примеры.

Матрица

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

есть матрица-столбец. Ее размер 5×1. Иначе, это пятимерный вектор-столбец.

Матрица

$$A = [2 \quad 0 \quad 4 \quad 3 \quad 7 \quad 2]$$

есть матрица-строка. Ее размер 1×6. Иначе, это шестимерный вектор-строка. Когда это не может вызвать недоразумений, вектор-столбец и вектор-строку мы будем называть просто вектором.

Транспонированная матрица. Если в матрице A поменять местами строки и столбцы, то получится новая матрица, которая по сравнению с матрицей A называется транспонированной. Транспонированную матрицу будем обозначать через A'.

Примеры.

1) Если матрица

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix},$$

то транспонированная матрица запишется так:

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} \end{bmatrix}.$$

Матрица A имеет размер 3×4, а транспонированная матрица A' — размер 4×3.

2) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$

Транспонированная матрица

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

Транспонирование матрицы-столбца дает матрицу-строку и наоборот.

Квадратная матрица. Если в матрице столько же строк, сколько и столбцов, т. е. $m = n$, то матрица называется квадратной.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}. \qquad (4,5)$$

Матрица (4,5) имеет размер $n \times n$. Однако в случае квадратной матрицы вместо термина *размер* употребляется термин *порядок*. Матрица (4,5) — матрица n-го порядка. В квадратной матрице об элементах a_{11}, a_{22}, a_{33}, ..., a_{nn} говорят, что они образуют *главную* диагональ, или что они стоят на главной диагонали. Об элементах, стоящих на линиях, параллельных главной диагонали, говорят, что они образуют *побочную* диагональ. В матрице порядка n имеется $n - 1$ побочная диагональ, расположенная выше главной, и $n - 1$ побочная диагональ, расположенная ниже ее.

Пример.

Матрица

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & 5 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ 5 & -7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

— квадратная матрица четвертого порядка. В ней число строк $m = 4$ и число столбцов $n = 4$.

Нулевая матрица. Матрица, все элементы которой равны нулю, называется нулевой и обозначается символом 0.

$$0 = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{n \text{ столбцов}} \left.\vphantom{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}\right\} m \text{ строк} \qquad (4,6)$$

Диагональная матрица. Квадратная матрица, у которой все элементы, расположенные вне главной диагонали, равны нулю, называется диагональной. Эта матрица имеет следующий вид:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}. \tag{4,7}$$

Таким образом, в диагональной матрице все элементы с неравными индексами равны нулю.

Скалярная матрица. Диагональная матрица, все элементы которой, стоящие на главной диагонали, равны между собой, называется скалярной матрицей. Скалярная матрица имеет такой вид:

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{11} \end{bmatrix}. \tag{4,8}$$

Единичная матрица. Диагональная матрица, у которой все элементы, стоящие на главной диагонали, равны 1, называется единичной. Единичная матрица обозначается символом E и имеет такой вид:

$$E_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}. \tag{4,9}$$

Индекс n в символе E показывает порядок единичной матрицы. В матричном исчислении единичная матрица играет роль, в известной мере аналогичную той, которую в арифметике играет единица.

Верхняя треугольная матрица. Квадратная матрица, в которой все элементы, расположенные ниже главной диагонали, равны нулю, называется верхней треугольной матрицей. Она имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}. \tag{4,10}$$

Нижняя треугольная матрица. Квадратная матрица, в которой все элементы, расположенные выше главной диагонали, равны нулю, называется нижней треугольной матрицей. Эта матрица имеет такой вид:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}. \tag{4,11}$$

Симметричная матрица. Симметричной матрицей называется квадратная матрица, в которой все элементы, расположенные симметрично относительно главной диагонали, равны между собой. Для симметричной матрицы имеет место равенство

$$a_{ij}=a_{ji}.$$

Пример квадратной симметричной матрицы:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 6 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix}. \tag{4,12}$$

Блочная матрица. Если в матрице провести горизонтальные и вертикальные «перегородки», то матрица окажется разбитой на прямоугольные или квадратные клетки, или блоки. Такая матрица называется блочной. Вот пример такой матрицы:

$$A=\left[\begin{array}{ccc:ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ \hdashline a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \end{array}\right].$$

Элементы в каждом блоке образуют следующие матрицы:

$$A_{11}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}; \qquad A_{21}=\begin{bmatrix} a_{41} & a_{42} & a_{43} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} \end{bmatrix};$$

$$A_{12}=\begin{bmatrix} a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{34} & a_{35} & a_{36} \end{bmatrix}; \qquad A_{22}=\begin{bmatrix} a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{54} & a_{55} & a_{56} \end{bmatrix}.$$

Матрицу A можно представить в виде матрицы, элементами которой являются матрицы A_{ij}.

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}.$$

3. Определитель матрицы. Ранг матрицы

Определителем квадратной матрицы называется определитель, составленный из элементов матрицы, расположенных так же, как и в матрице. Определитель матрицы A обозначается символом $|A|$ или $D(A)$.

Если определитель $|A|$ матрицы не равен нулю, то матрица называется *неособенной* (иначе, невырожденной). Если же определитель $|A|$ матрицы равен нулю, то матрица называется *особенной* (иначе, вырожденной или сингулярной).

Ранг матрицы. В прямоугольной матрице можно вычеркнуть несколько строк и несколько столбцов так, чтобы элементы, которые остались невычеркнутыми, образовали квадратную матрицу порядка k. Определитель такой матрицы называется минором данной матрицы. Если, например (стр. 92) взять матрицу размером 3×4, то вычеркиванием одного какого-либо столбца можно получить четыре квадратных матрицы третьего порядка, вычеркиванием двух столбцов и одной строки можно получить 18 матриц второго порядка, а вычеркиванием трех столбцов и двух строк можно получить 12 матриц первого порядка.

Число матриц порядка k ($k \leqslant \min(s, r)$), которое можно получить из матрицы размером $s \times r$, подсчитывается по формуле

$$n = C_s^k \cdot C_r^k,$$

где C_s^k и C_r^k есть соответственно число сочетаний из s элементов по k в каждом и из r элементов по k в каждом, причем число сочетаний из n элементов по m вычисляется по формуле

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} \quad (n \geqslant m).$$

Поскольку в указанной выше матрице $s = 3$, $r = 4$, число миноров порядка $k = 3$

$$n = C_3^3 \cdot C_4^3 = \frac{3!}{3!\,(3-3)!} \cdot \frac{4!}{3!\,(4-3)!} = 4$$

(надо учесть, что принимается $0! = 1$).
Число миноров порядка $k = 2$

$$n = C_3^2 \cdot C_4^2 = \frac{3!}{2!\,(3-2)!} \cdot \frac{4!}{2!\,(4-2)!} = 3 \cdot 6 = 18.$$

Число миноров порядка $k = 1$

$$n = C_3^1 \cdot C_4^1 = \frac{3!}{1!\,(3-1)!} \cdot \frac{4!}{1!\,(4-1)!} = 3 \cdot 4 = 12.$$

Рассмотрим определители всех таких квадратных матриц. *Наибольший порядок r минора матрицы, не равного нулю, называется рангом матрицы.* Так, если в матрице размером 3×4 определители всех матриц третьего порядка равны нулю, а хотя бы один из определителей матриц второго порядка в этой таблице не равен нулю, то ранг заданной матрицы r равен двум ($r = 2$).

Таким образом, чтобы определить ранг матрицы, надо из ее элементов составить всевозможные квадратные матрицы вычеркиванием строк и столбцов и найти определители этих матриц. Ранг заданной матрицы равен наивысшему порядку того из этих определителей, который не равен нулю.

Ранг нулевой матрицы равен нулю. Ранг диагональной квадратной матрицы равен ее порядку, конечно, при условии, что ни один из ее диагональных элементов не равен нулю.

Заданная матрица

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}.$$

Матрицы 3-го порядка, полученные из заданной вычеркиванием одного столбца:

Номер вычеркнутого столбца			
1	2	3	4
$\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

Матрицы 2-го порядка, полученные из заданной вычеркиванием двух столбцов и одной строки:

Номер вычеркнутой строки	Номера вычеркнутых столбцов					
	1 и 2	1 и 3	1 и 4	2 и 3	2 и 4	3 и 4
1	$\begin{bmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{32} & a_{34} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a_{21} & a_{24} \\ a_{31} & a_{34} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$
2	$\begin{bmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{32} & a_{34} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{31} & a_{34} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$
3	$\begin{bmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{22} & a_{24} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{21} & a_{24} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

Матрицы 1-го порядка, полученные из заданной матрицы вычеркиванием трех столбцов и двух строк:

Номера вычеркнутых строк	Номера вычеркнутых столбцов			
	2, 3 и 4	3, 4 и 1	4, 1 и 2	1, 2 и 3
2 и 3	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
3 и 1	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}
1 и 2	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}

4. Алгебраическое дополнение элемента матрицы. Союзная матрица

Если из определителя квадратной матрицы порядка n вычеркнуть i-ую строку и j-ый столбец, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}, и составить из оставшихся элементов определитель порядка $n-1$, умножив его на $(-1)^{i+j}$, где $i+j$ — сумма номеров вычеркнутой строки и столбца, то полученное произведение называется алгебраическим дополнением элемента a_{ij} матрицы и обозначается символом A_{ij}.

Союзная матрица. Если из алгебраических дополнений всех элементов матрицы A составить новую матрицу и транспонировать ее, то полученная так матрица называется союзной по отношению к данной. Союзная матрица обозначается символом $\tilde{A}$ и записывается так:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} \ldots & A_{nn} \end{bmatrix}. \qquad (4,13)$$

Союзная матрица $\tilde{A}$ называется также **присоединенной.**

5. Формула для вычисления определителей

С вычислением определителей приходится встречаться во многих случаях. Укажем весьма удобную формулу для вычисления определителя n-го порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{a_{11}^{n-2}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1,n-1} \\ a_{21} & a_{2,n-1} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2n} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1,n-1} \\ a_{31} & a_{3,n-1} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{31} & a_{3n} \end{vmatrix} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{n1} & a_{n2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{n1} & a_{n3} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1,n-1} \\ a_{n1} & a_{n,n-1} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{vmatrix} \end{vmatrix}. \qquad (4,14)$$

Предполагается, что $a_{11} \neq 0$. Если $a_{11} = 0$, то перестановкой строк и столбцов всегда можно из данного определителя получить такой, в котором $a_{11} \neq 0$. Эта формула очень проста в употреблении и позволяет вычисление определителя порядка n свести к вычислению определителя порядка $n-1$.

II. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НАД МАТРИЦАМИ

1. **Равенство матриц.** Две матрицы A и B называются равными, если: 1) обе они имеют один и тот же размер, т. е. если число строк матрицы A равно числу строк матрицы B, а число столбцов матрицы A равно числу столбцов матрицы B, и 2) соответственные элементы этих матриц равны между собой, причем под соответственными элементами понимаются элементы с одними и теми же индексами.

Таким образом, если матрица

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

а матрица

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

и $a_{ij} = b_{ij}$ $(i = 1, 2, \dots, m;\ j = 1, 2, \dots, n)$, то $A = B$.

2. Линейное преобразование. Пусть n величин $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ связаны с m величинами $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_m$ такими зависимостями:

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n \end{array}\right\}. \qquad (4,15)$$

По этим формулам величины $y_1, y_2, \ldots, y_m$ выражаются *линейно* и *однородно* через n других величин $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. Преобразование величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$ при помощи формул (4,15) в величины $y_1, y_2, \ldots, y_m$ называется линейным преобразованием. Формулы (4,15) сокращенно можно записать так:

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, m). \qquad (4,16)$$

Коэффициенты линейного преобразования (4,15) величин x_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) в величины y_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) могут быть записаны в виде матрицы

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

которая называется матрицей линейного преобразования (4,15) величин x_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) в величины y_i ($i = 1, 2, \ldots, m$).

Правила алгебраических преобразований над матрицами становятся наиболее понятными, если пользоваться введенным понятием линейного преобразования одних величин в другие.

3. Сложение и вычитание матриц. Пусть имеется линейное преобразование

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{array}\right\} \qquad (4,17)$$

величин x_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) в величины y_i ($i = 1, 2, \ldots, m$).

Матрица этого преобразования

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}. \qquad (4,18)$$

Пусть имеется другое линейное преобразование величин x_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) в величины z_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) по формулам

$$
\begin{aligned}
z_1 &= b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n;\\
z_2 &= b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \cdots + b_{2n}x_n;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
z_m &= b_{m1}x_1 + b_{m2}x_2 + \cdots + b_{mn}x_n.
\end{aligned}
\qquad (4{,}19)
$$

Матрица этого преобразования

$$
B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{2n} & b_{2n} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mn} \end{bmatrix}. \qquad (4{,}20)
$$

Составим теперь линейное преобразование величин x_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) в величины u_i ($i = 1, 2, \ldots, m$), являющиеся суммой величин y_i и z_i. Для этого сложим линейные преобразования (4,17) и (4,19) и получим

$$
\begin{aligned}
u_1 &= y_1 + z_1 = (a_{11} + b_{11})\,x_1 + (a_{12} + b_{12})\,x_2 + \cdots + (a_{1n} + b_{1n})\,x_n;\\
u_2 &= y_2 + z_2 = (a_{21} + b_{21})\,x_1 + (a_{22} + b_{22})\,x_2 + \cdots + (a_{2n} + a_{2n})\,x_n;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
u_m &= y_m + z_m = (a_{m1} + b_{m1})\,x_1 + (a_{m2} + b_{m2})\,x_2 + \cdots + (a_{mn} + b_{mn})\,x_n.
\end{aligned}
\qquad (4{,}21)
$$

Линейное преобразование (4,21) представляет собой сумму линейных преобразований (4,17) и (4,19).

Матрицу этого преобразования

$$
C = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \ldots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \ldots & a_{2n} + b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \ldots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix} \qquad (4{,}22)
$$

и следует рассматривать как сумму матриц линейных преобразований (4,17) и (4,19), т. е. как сумму матриц (4,18) и (4,19), т. е. как $A + B$. Таким образом,

$$
A + B = C. \qquad (4{,}23)
$$

Итак, *суммой двух прямоугольных матриц A и B равных размеров ($m \times n$) называется матрица C того же размера, элементы которой c_{ij} равны сумме* соответствующих элементов матриц A и B.

$$
A + B = C,
$$

если

$$a_{ij} + b_{ij} = c_{ij} \tag{4,24}$$

$(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$, т. е.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{m1} & b_{m2} \ldots & b_{mn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \ldots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \ldots & a_{2n} + b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} \ldots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{m1} & c_{m2} \ldots & c_{mn} \end{bmatrix}. \tag{4,25}$$

Сумму следует понимать в алгебраическом смысле. Это значит, что разность $A - B$ матриц A и B одного и того же порядка есть матрица D того же порядка, элементы которой равны разности соответствующих элементов матриц A и B, т. е.

$$d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}.$$

Понятие суммы матриц распространяется на любое число матриц. Сумма матриц подчиняется таким законам:

а) переместительному

$$A + B = B + A;$$

б) сочетательному

$$(A + B) + C = A + (B + C).$$

Пример.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2+1 & 3+(-3) & 5+4 & 7+0 \\ 1+2 & 4+1 & 2+3 & 3+(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 9 & 7 \\ 3 & 5 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Умножение матрицы на число. Если умножить обе части каждой из формул линейного преобразования (4,17) на число α, то получим

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = \alpha y_1 \ = a_{11}\alpha x_1 + a_{12}\alpha x_2 + \cdots + a_{1n}\alpha x_n \\ v_2 = \alpha y_2 \ = a_{21}\alpha x_1 + a_{22}\alpha x_2 + \cdots + a_{2n}\alpha x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ v_m = \alpha y_m = a_{m1}\alpha x_1 + a_{m2}\alpha x_2 + \cdots + a_{mn}\alpha x_n \end{array}\right\}. \quad (4,26)$$

Формулы (4,26) определяют линейное преобразование величин $x_j (j = 1, 2, \dots, n)$ в величины $v_i (i = 1, 2, \dots, m)$. Матрица коэффициентов этого преобразования

$$\begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}, \quad (4,27)$$

естественно, может рассматриваться как произведение матрицы A преобразования (4,17) на число α.

Таким образом, возникает правило умножения матрицы на число: *чтобы умножить матрицу A на число α, надо на это число умножить каждый элемент матрицы A.*

Пример.

$$5 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 15 & 20 & 25 \\ 5 & 10 & -15 & 0 \\ 10 & 5 & 5 & 15 \end{bmatrix}.$$

Имеют место следующие равенства:

$$\left.\begin{array}{l} (\alpha + \beta) A = \alpha A + \beta A \\ \alpha (A + B) = \alpha A + \alpha B \end{array}\right\}. \quad (4,28)$$

5. Умножение матриц. Возьмем линейное преобразование величин $x_j (j = 1, 2, \dots, n)$ в величины $y_i (i = 1, 2, \dots, m)$, определяемое формулами

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{array}\right\} \quad (4,29)$$

с матрицей преобразования

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}. \quad (4,30)$$

Рассмотрим еще одно линейное преобразование, которое преобразует величины $y_i (i = 1, 2, \dots, m)$ в величины $z_r (r = 1, 2, \dots \dots, s)$ по формулам

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \cdots + b_{1m}y_m \\ z_2 &= b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \cdots + b_{2m}y_m \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_s &= b_{s1}y_1 + b_{s2}y_2 + \cdots + b_{sm}y_m \end{aligned}\right\} \tag{4,31}$$

с матрицей преобразования

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{s1} & b_{s2} & \dots & b_{sm} \end{bmatrix}. \tag{4,32}$$

Отметим уже в этом месте, что число строк в матрице A первого линейного преобразования равно числу столбцов в матрице B второго преобразования.

Поставим перед собой задачу выразить величины z_r $(r = 1, 2, \dots \dots, s)$ через величины $x_j (j = 1, 2, \dots, n)$. Для этого заменим в формулах (4,31) величины $y_i (i = 1, 2, \dots, m)$ их значениями из формулы (4,29):

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= b_{11}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n) + b_{12}(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \\ &+ \cdots + a_{2n}x_n) + \cdots + b_{1m}(a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n) \\ z_2 &= b_{21}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n) + b_{22}(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \\ &+ \cdots + a_{2n}x_n) + \cdots + b_{2m}(a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_s &= b_{s1}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n) + b_{s2}(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \\ &+ \cdots + a_{2n}x_n) + \cdots + b_{sm}(a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n) \end{aligned}\right\}.$$

Каждую из этих формул преобразуем, собирая члены с общими множителями x_j и вынося эти множители за скобки:

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= (b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + \cdots + b_{1m}a_{m1})x_1 + (b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} + \cdots + \\ &+ b_{1m}a_{m2})x_2 + \cdots + (b_{11}a_{1n} + b_{12}a_{2n} + \cdots + b_{1m}a_{mn})x_n \\ z_2 &= (b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} + \cdots + b_{2m}a_{m1})x_1 + (b_{21}a_{12} + \\ &+ b_{22}a_{22} + \cdots + b_{2m}a_{m2})x_2 + \cdots + (b_{21}a_{1n} + b_{22}a_{2n} + \\ &+ \cdots + b_{2m}a_{mn})x_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_s &= (b_{s1}a_{11} + b_{s2}a_{21} + \cdots + b_{sm}a_{m1})x_1 + (b_{s1}a_{12} + b_{s2}a_{22} + \\ &+ \cdots + b_{sm}a_{m2})x_2 + \cdots + (b_{s1}a_{1n} + b_{s2}a_{2n} + \\ &+ \cdots + b_{sm}a_{mn})x_n. \end{aligned}\right\}.$$

Мы получили формулы линейного преобразования величин $x_j (j = 1, 2, \dots, n)$ в величины $z_r (r = 1, 2, \dots, s)$, минуя промежуточное преобразование (4,31). Матрица этого окончательного линейного преобразования

$$C=\begin{bmatrix} (b_{11}a_{11}+b_{12}a_{21}+\cdots+b_{1m}a_{m1})\ldots(b_{11}a_{1n}+\\ \quad +b_{12}a_{2n}+\cdots+b_{1m}a_{mn})\\ (b_{21}a_{11}+b_{22}a_{21}+\cdots+b_{2m}a_{m1})\ldots(b_{21}a_{1n}+\\ \quad +b_{22}a_{2n}+\cdots+b_{2m}a_{mn})\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ (b_{s1}a_{11}+b_{s2}a_{21}+\cdots+b_{sm}a_{m1})\ldots(b_{s1}a_{1n}+\\ \quad +b_{s2}a_{2n}+\cdots+b_{sm}a_{mn}) \end{bmatrix}. \tag{4,33}$$

Матрица C называется произведением матрицы B на матрицу A. $C=BA$.

Размер ее равен $s\times n$.

$$C=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1m}\\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2m}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ b_{s1} & b_{s2} & \ldots & b_{sm} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Элемент c_{ij} матрицы C, стоящий в i-ой строке и j-ом столбце, равен сумме произведений элементов i-ой строки матрицы B на соответствующие элементы j-го столбца матрицы A, т. е.

$$c_{ij}=b_{i1}a_{1j}+b_{i2}a_{2j}+\cdots+b_{im}a_{mj}=\sum_{k=1}^{m}b_{ik}a_{kj}. \tag{4,34}$$

Например,

$$c_{23}=b_{21}a_{13}+b_{22}a_{23}+\cdots+b_{2m}a_{m3}.$$

Формула (4,33) и определяет произведение матрицы B на матрицу A.

Свойства произведения двух матриц. а) Не всякие две матрицы можно перемножить. *Произведение BA двух матриц в указанном порядке возможно в том и только в том случае, если число столбцов матрицы B равно числу строк матрицы A. Если размер матрицы B равен $s\times m$, а размер матрицы A равен $m\times n$, то матрица BA имеет размер $s\times n$.* Символически это можно записать так:

$$(s\times m)\cdot(m\times n)=s\times n. \tag{4,35}$$

Значит, в матрице, являющейся произведением двух матриц, число строк равно числу строк левого сомножителя, а число столбцов — числу столбцов правого сомножителя.

б) *Произведение двух матриц в общем случае не обладает свойством переместительности* (иначе говорят, что оно не обладает свойством коммутативности), т. е.

$$BA\neq AB.$$

Значит, в общем случае менять местами матрицы-сомножители нельзя, не изменив их произведения. В этом состоит одно из отличий законов алгебры матриц от законов элементарной алгебры.

Если изменить порядок сомножителей, может оказаться, что вообще умножить матрицы невозможно.

В произведении BA двух матриц B и A мы будем говорить, что матрица A умножается слева на матрицу B, или что матрица B умножается справа на матрицу A.

Если размер матрицы A равен $(p \times n)$, а матрицы B — $(n \times p)$, то можно составить как произведение AB, так и произведение BA. При этом размер матрицы AB равен $(p \times p)$, а матрицы BA — $(n \times n)$.

Укажем, что для двух квадратных матриц одного и того же порядка это условие выполняется, но подчеркнем, что и в этом случае, как правило, $BA \neq AB$.

Две матрицы A и B называются *перестановочными* (иначе коммутативными), если имеет место равенство $BA = AB$. Примером перестановочных матриц являются квадратная и единичная матрицы одного и того же порядка.

Ниже дано большое число упражнений на произведение матриц. Здесь же для иллюстрации сделанного вывода выполним подробно только один пример умножения двух матриц и покажем, как применяется формула (4,34) образования элемента матрицы-произведения.

Пример.

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & 3 & -4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 5\cdot 1 + 3\cdot 2 + (-2)\cdot 4 & 5\cdot 2 + 3\cdot 1 + (-2)\cdot 2 & 5\cdot 3 + 3\cdot 3 + (-2)\cdot 3 & 5\cdot 5 + 3\cdot(-2) + (-2)\cdot(-4) \\ 1\cdot 1 + (-1)\cdot 2 + 0\cdot 4 & 1\cdot 2 + (-1)\cdot 1 + 0\cdot 2 & 1\cdot 3 + (-1)\cdot 3 + 0\cdot 3 & 1\cdot 5 + (-1)\cdot(-2) + 0\cdot(-4) \\ 2\cdot 1 + 1\cdot 2 + 3\cdot 4 & 2\cdot 2 + 1\cdot 1 + 3\cdot 2 & 2\cdot 3 + 1\cdot 3 + 3\cdot 3 & 2\cdot 5 + 1\cdot(-2) + 3\cdot(-4) \\ 4\cdot 1 + (-2)\cdot 2 + 2\cdot 4 & 4\cdot 2 + (-2)\cdot 1 + 2\cdot 2 & 4\cdot 3 + (-2)\cdot 3 + 2\cdot 3 & 4\cdot 5 + (-2)\cdot(-2) + 2\cdot(-4) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 9 & 15 & 27 \\ -1 & 1 & 0 & 7 \\ 16 & 11 & 18 & -4 \\ 8 & 10 & 12 & 16 \end{bmatrix}.$$

Здесь умножение было возможно, так как число столбцов в первом сомножителе равно числу строк во втором. Первый сомножитель был размером 4×3, второй 3×4, а матрица-произведение имеет размер 4×4, как это следует из (4,35).

6. Произведение нескольких матриц. Если перемножить две матрицы A и B, то мы получим в общем случае матрицу $C = AB$, которую можно умножить, если умножение допустимо, на матрицу D, т. е. составить произведение трех матриц ABD.

Произведение трех матриц ABD следует понимать так: матрица A умножается справа на матрицу B, а полученная матрица умножается справа на матрицу D. Количество перемножаемых матриц может быть любым, лишь бы можно было перемножить каждые две рядом стоящие матрицы.

7. Законы умножения матриц.

а) Если можно перемножить матрицы A и B и произведение AB этих матриц можно умножить на матрицу C, то допустимо составить и произведения $(AB)C$ и $A(BC)$. В таком случае получается равенство, выражающее ассоциативный (сочетательный) закон произведения матриц.

$$A(BC) = (AB)C. \tag{4,36}$$

Имеют место также:

б) сочетательный закон относительно скалярного сомножителя

$$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B) \tag{4,37}$$

и два дистрибутивных закона:

$$\text{в) } (A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C; \tag{4,38}$$

$$\text{г) } C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B. \tag{4,39}$$

8. Возведение матрицы в степень. Если A — квадратная матрица, а n — целое положительное число, то

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdot A \ldots A}_{n \text{ множителей}}.$$

Матрица A^n называется n-ой степенью матрицы A. При этом

$$A^2 = A \cdot A;$$
$$A^3 = A \cdot A^2 = A^2 \cdot A;$$
$$A^4 = A \cdot A^3 = A^2 \cdot A^2 = A^3 \cdot A$$

и т. д.

Матрица A^2 называется квадратом матрицы A, а матрица A^3 — ее кубом.

Теперь приступим к решению задач.

Задача 4,1. Произведите указанные действия над векторами-столбцами:

$$U = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad V = \begin{bmatrix} -5 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad W = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

1) $3U$; 2) $-V$; 3) $U+4V$; 4) $U+V+W$; 5) $U-V+W$; 6) $3U-2V+4W$; 7) $2U-V+3W$.

Решение.

1) На основании формулы (4,27)

$$3U = 3\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

2) По формуле (4,27)

$$-V = -1\begin{bmatrix} -5 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3) Матрица

$$A = U + 4V = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} -5 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -20 \\ 24 \\ 0 \end{bmatrix}$$

По формуле (4,25), согласно которой для сложения двух матриц равных размеров надо сложить их соответствующие элементы, получаем

$$A = \begin{bmatrix} -17 \\ 25 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

4) Пользуясь формулой (4,25) для сложения двух матриц, а также сочетательным законом сложения, находим

$$U + V + W = (U + V) + W = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

5) Применяя сочетательный закон сложения матриц и правила вычитания и сложения матриц, получаем

$$U - V + W = (U - V) + W = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -5 \\ +6 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 8 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

6) На основании правила умножения матрицы на число, правила сложения и вычитания матриц и сочетательного закона для сложения имеем

$$3U - 2V + 4W = 3\begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}-5\\6\\0\end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix}9\\3\\6\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-10\\12\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}4\\4\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}9-(-10)+4\\3-\quad 12+4\\6-\quad 0+4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}23\\-5\\10\end{bmatrix}.$$

$$7)\ 2U - V + 3W = 2\begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-5\\6\\0\end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix}6\\2\\4\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-5\\6\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3\\3\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6+5+3\\2-6+3\\4-0+3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}14\\-1\\7\end{bmatrix}.$$

Задача 4,2 (для самостоятельного решения). Произведите указанные действия над матрицами-столбцами

$$U = \begin{bmatrix}1\\4\\3\\2\end{bmatrix};\quad V = \begin{bmatrix}0\\0\\1\\2\end{bmatrix};\quad W = \begin{bmatrix}1\\4\\-2\\-1\end{bmatrix};\quad T = \begin{bmatrix}-1\\-2\\-3\\4\end{bmatrix}.$$

1) $U + V + W - T$; 2) $U - V + W - T$; 3) $U + V + W + T$; 4) $2U - 3V + 4W + T$; 5) $3U + 2V + 4W - 5T$.

Ответ.

$$1)\begin{bmatrix}3\\10\\5\\-1\end{bmatrix};\quad 2)\begin{bmatrix}3\\10\\3\\-5\end{bmatrix};\quad 3)\begin{bmatrix}1\\6\\-1\\7\end{bmatrix};\quad 4)\begin{bmatrix}5\\22\\-8\\-2\end{bmatrix};\quad 5)\begin{bmatrix}12\\38\\18\\-18\end{bmatrix}.$$

Задача 4,3. Над векторами-строками $U = [2,\ -1,\ 2]$; $V = [-1,\ 0,\ 5]$; $W = [1,\ 4,\ 3]$ провести указанные действия: 1) $2U$; 2) $-3V$; 3) $U + V - W$; 4) $2U + V - 3W$; 5) $U + 2V + 3W$.

Решение.

1) Пользуясь формулой (4,27) умножения матриц на число, имеем

$$2U = 2[2,\ -1,\ 2] = [4,\ -2,\ 4].$$

2) На основании той же формулы

$$-3V = -3[-1,\ 0,\ 5] = [3,\ 0,\ -15].$$

3) Пользуясь формулой (4,25) сложения матриц и свойством сочетательности сложения, получаем

$$U+V-W=[2,\ -1,\ 2]+[-1,\ 0,\ 5]-[1,\ 4,\ 3]=$$
$$=[2+(-1)-1,\ -1+0-4,\ 2+5-3]=[0,\ -5,\ 4].$$

4) $2U+V-W=2[2,\ -1,\ 2]+[-1,\ 0,\ 5]-[1,\ 4,\ 3]=$
$$=[4,\ -2,\ 4]+[-1,\ 0,\ 5]-[1,\ 4,\ 3]=$$
$$=[4+(-1)-1,\ -2+0-4,\ 4+5-3]=[2,\ -6,\ 6].$$

5) $U+2V+3W=[2,\ -1,\ 2]+2[-1,\ 0,\ 5]+3[1,\ 4,\ 3]=$
$$=[2,\ -1,\ -2]+[-2,\ 0,\ 10]+[3,\ 12,\ 9]=$$
$$=[2+(-2)+3,\ -1+0+12,\ -2+10+9]=[3,\ 11,\ 17].$$

Задача 4,4 (для самостоятельного решения). Докажите, что сумма вектора-столбца

$$U=\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

с нулевым вектором-столбцом

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

того же размера равна U, т. е. что

$$U+0=U. \tag{4,40}$$

Докажите также, что равенство (4,40) остается верным для случая, когда U — вектор-строка, а 0 — нулевой вектор-строка того же размера, что и U.

Задача 4,5 (для самостоятельного решения). Докажите, что нулевой вектор-столбец или нулевой вектор-строка не изменяется от умножения его на любое число.

Задача 4,6 (для самостоятельного решения). Докажите, что если U и V — два вектора (оба векторы-столбцы или оба векторы-строки) с одинаковым числом компонент, то

$$U+0V=U;$$
$$0U+V=V.$$

Задача 4,7. Какое соотношение связывает компоненты векторов U и V, если имеет место равенство

$$3U-2V=0?$$

Решение. Под 0 следует понимать нулевой вектор тех же размеров, что и векторы U и V, размеры которых равны между собой. Элементами вектора $3U-2V$ являются числа $3U_i-2V_i$. Две матрицы равны, если равны их размеры и соответствующие элементы (стр. 94).

Значит, должно выполняться равенство

$$3U_i-2V_i=0,$$

а отсюда следует, что между компонентами матриц существует зависимость

$$U_i=\frac{2V_i}{3}.$$

Задача 4,8 (для самостоятельного решения). Если векторы U, V и 0 имеют один и тот же размер, то какое соотношение связывает компоненты векторов U и V при наличии следующих равенств:

1) $2U+V-5U+4V=0$;
2) $10V-3U+3V+4U=0$;
3) $U+V-2U-2V=0$.

Ответ. 1) $U_i=\frac{5V_i}{3}$; 2) $U_i=-13V_i$; 3) $U_i=-V_i$.

Задача 4,9. Найти указанные суммы, а в случаях, когда это невозможно сделать, объясните причину:

$$1)\ \begin{bmatrix}2\\3\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix};\ 2)\ [5,\ 7,\ -4]+0\cdot[5,\ 4,\ 2];$$

$$3)\ [7,\ 8,\ -1]+7-4+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix};\ 4)\ 2\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}2\\4\\-2\end{bmatrix}+5\begin{bmatrix}7\\2\\1\end{bmatrix}.$$

Задача 4,10. Найдите a_1, a_2 и a_3, если

$$\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\3\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\8\\-3\end{bmatrix}.$$

Решение. Складывая первую и вторую матрицы в левой части равенства и приравнивая сумму правой части, получаем

$$\begin{bmatrix}a_1+2\\a_2+3\\a_3-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\8\\-3\end{bmatrix}.$$

Используем теперь определение равенства двух матриц:

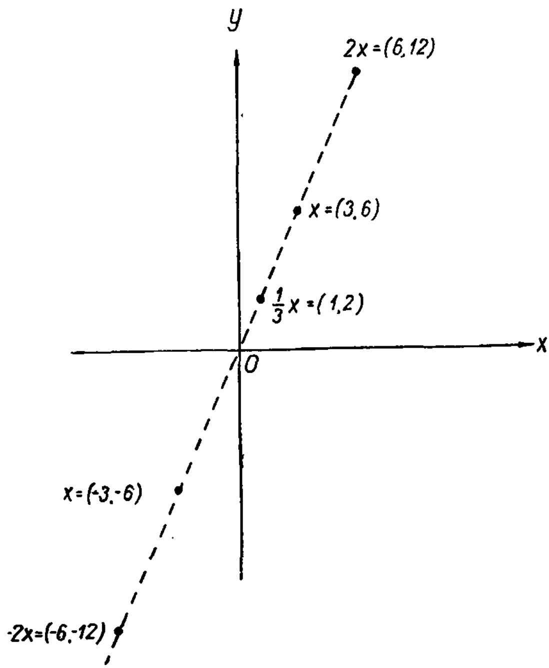
$$a_1 + 2 = 7;\ a_2 + 3 = 8;\ a_3 - 1 = -3,$$

откуда

$$a_1 = 5;\ a_2 = 5;\ a_3 = -2.$$

Задача 4,11 (для самостоятельного решения). Найдите ненты b_1, b_2 и b_3 вектора-столбца b, если

$$5\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}.$$



Фиг. 4,1

Ответ. $b_1 = \frac{3}{5}$; $b_2 = 0$; $b_3 = -\frac{4}{5}$.

Задача 4,12 (для самостоятельного решения). Чему компоненты w_1; w_2; w_3 вектора-столбца w, если

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

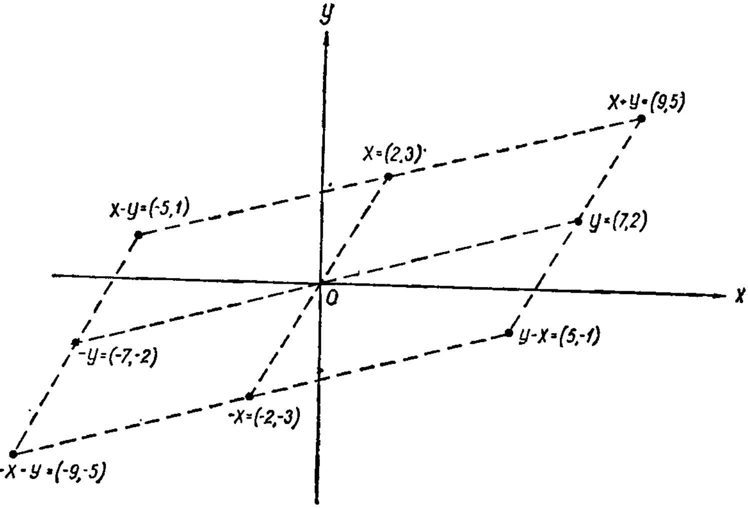
Ответ. $w_1 = w_2 = w_3 = 0$.

Задача 4,13 (для самостоятельного решения). Что можно сказать о компонентах a_1; a_2; a_3 и a_4 вектора a, если

$$0 \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ответ. a_1, a_2, a_3 и a_4 — любые числа.

Умножению вектора на число можно дать геометрическую интерпретацию. Рассмотрим прямоугольную систему координат



Фиг. 4,2

на плоскости. Двумерный вектор-строку $[a, b]$ можно рассматривать как точку этой плоскости, абсцисса которой — a, а ордината b. Точки, определяемые произведением числа C на вектор $[a, b]$, т. е. точки $C \cdot [a, b]$ лежат на одной прямой, проходящей через начало координат и точку $[a, b]$. На фиг. 4,1 показаны точки, соответствующие вектору $x = [3, 6]$ и векторам $2x$, $-x$, $-2x$, $\frac{1}{3}x$.

Сумме и разности векторов-строк можно также дать геометрическое истолкование. Если $x = [a, b]$, $y = [c, d]$. Составим векторы $x + y$, $x - y$, $y - x$ и $-x - y$. Эти векторы будут точками, показанными на фиг. 4,2, для случая, когда $x = [2, 3]$ и $y = [7, 2]$.

Задача 4,14. Построить точки, соответствующие векторам $x = [2, 3]$ и $y = [-3, 8]$.

Найти и построить точки, отвечающие векторам: 1) $\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y$; 2) $x+y$; 3) $2x-3y$; 4) $3x+2y$; 5) $y-2x$.

Задача 4,15. Сложить матрицы

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \\ 0 & 5 & -7 \end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix} -2 & 3 & -5 \\ 0 & 4 & 7 \\ -3 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Решение. По формуле (4,25) для матриц получаем

$$A+B=\begin{bmatrix} 0 & 6 & -4 \\ 4 & 9 & 9 \\ -4 & 7 & -3 \\ 1 & 6 & -5 \end{bmatrix}.$$

Задача 4,16. Вычислить матрицу

$$A=2\cdot\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 7 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}-3\cdot\begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Решение. Используя формулу (4,27) для умножения матрицы на число и формулу (4,25) вычитания матриц находим последовательно

$$A=\begin{bmatrix} 10 & 4 \\ 6 & 14 \\ -8 & 10 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} -12 & 15 \\ 3 & 3 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 22 & -11 \\ 3 & 11 \\ -14 & 10 \end{bmatrix}.$$

Задача 4,17 (для самостоятельного решеиия). Выполнить действия

$$6\cdot\begin{bmatrix} -7 & 2 & 5 & 4 \\ -3 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}-3\cdot\begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 & -3 \\ 5 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ответ.

$$\begin{bmatrix} -48 & 0 & 15 & 33 \\ -33 & 6 & 9 & 27 \end{bmatrix}.$$

Задача 4,18. Матрицу

$$A=\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

представить в виде произведения числа на единичную матрицу.

Решение.

$$A = 5 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 5E_3.$$

Задача 4,19. Сложить матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 4 \\ 0 & 7 & 2 \\ -5 & 2 & 11 \end{bmatrix} \text{ и } B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & -7 \end{bmatrix}.$$

Решение. Матрица A может быть записана в виде блочной матрицы

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} 7 & 0 & 4 \\ 0 & 7 & 2 \\ \hline -5 & 2 & 11 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{7E_2} & 4 \\ & & 2 \\ \hline 5 & 2 & 11 \end{array}\right];$$

$$B = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ \hline 4 & 5 & -7 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{2E_2} & 3 \\ & & -1 \\ \hline 4 & 5 & -7 \end{array}\right].$$

Так как матрицы

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} = 7 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 7E_2; \qquad \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2E_2,$$

то сумма

$$A + B = \left[\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{7E_2} & 4 \\ & & 2 \\ \hline -5 & 2 & 11 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{cc|c} 2 & E_2 & 3 \\ & & -1 \\ \hline 4 & 5 & -7 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 9 & E_2 & 7 \\ & & 1 \\ \hline -1 & 7 & 4 \end{array}\right] =$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 0 & 7 \\ 0 & 9 & 1 \\ -1 & 7 & 4 \end{bmatrix}.$$