ПЯТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание. Умножения матриц. Формулы для проверки Умножение матриц. Обратная матрица и способы ее получения.

А. ЗАДАЧИ НА ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Задача 5,1. Найти произведение вектора-строки

$$A = [a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n]$$

на вектор-столбец

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Прежде чем умножать матрицы, надо убедиться, что такое умножение имеет смысл.

Решение. В данном случае получить произведение возможно, так как размер матрицы A равен $1 \times n$, а матрицы B — $n \times 1$, т. е. число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B (формула (4,35), стр. 100). В произведении будем иметь матрицу размером $(1 \times n) \cdot (n \times 1) = 1 \times 1$, т. е. некоторое число.

Действительно, на основании формулы (4,34)

$$[a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \ \ldots\ + a_nb_n.$$

Сумма этих произведений есть число. Еще раз подчеркнем, что *произведение вектора-строки (первый сомножитель) на вектор-столбец (второй сомножитель) есть число* (можно сказать, что такое произведение является скаляром).

Задача 5,2. Найти произведение векторов

$$A = [2,\ 4,\ 5,\ 7] \text{ и } B = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Решение. $AB = 2 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) + 5 \cdot (-1) + 7 \cdot 4 =$
$= 4 - 12 - 5 + 28 = 15.$

Задача 5,3. Если a — вектор-строка, b — вектор-столбец с одним и тем же числом элементов, а α — число, то доказать, что

$$\alpha (a \cdot b) = (\alpha a) \cdot b = a \cdot (\alpha b).$$

Доказательство. 1) Пусть

$$a = [a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n];\ b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Тогда по формуле умножения матриц

$$a \cdot b = [a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n] \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} =$$

$$= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \ldots + a_nb_n;$$

$$\alpha (a \cdot b) = \alpha a_1b_1 + \alpha a_2b_2 + \alpha a_3b_3 + \ldots + \alpha\, a_nb_n) \qquad \text{(A)}$$

2) $\alpha a = \alpha [a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n] = [\alpha a_1,\ \alpha a_2,\ \alpha a_3,\ \ldots,\ \alpha a_n]$

по формуле (4,25) умножения матриц (см. также предыдущую задачу)

$$(\alpha a) \cdot b = [\alpha a_1,\ \alpha a_2,\ \alpha a_3,\ \ldots,\ \alpha a_n] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} =$$

$$\alpha a_1b_1 + \alpha a_2b_2 + \alpha a_3b_3 + \ldots + \alpha a_nb_n). \qquad \text{(B)}$$

Сравнивая выражения (A) и (B), приходим к выводу, что

$$\alpha (a \cdot b) = (\alpha \cdot a)\, b.$$

Самостоятельно докажите, что каждое из этих выражений равно $a \cdot (\alpha b)$.

Задача 5,4 (для самостоятельного решения). Доказать, что если a — трехмерный вектор-строка, b и c — трехмерные векторы-столбцы и α — некоторое число, то имеют место равенства

$$a \cdot (\alpha b) = \alpha (a \cdot b);$$
$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Задача 5,5. Пусть $A = [x,\ y]$ и векторы-столбцы a и b равны соответственно

$$a = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Определить x, и y, если известно, что $A \cdot a = x$, а $A \cdot B = y$.

Решение. По условию $A \cdot a = x$, а $A \cdot b = y$, т. е.

$$[x,\ y] \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = x; \quad [x,\ y] \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} = y.$$

Отсюда для определения x и y получится система уравнений

$$\left.\begin{aligned} 3x + 5y &= x; \\ 6x + 8y &= y \end{aligned}\right\}$$

или

$$\left.\begin{aligned} 2x + 5y &= 0; \\ 6x + 7y &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Так как определитель этой системы

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 14 - 30 = -16 \neq 0,$$

то она допускает только нулевое решение: $x = y = 0$.

Задача 5,6 (для самостоятельного решения). Пусть $x = [x_1,\ x_2]$, а векторы a и b равны соответственно

$$a = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Определить x_1 и x_2, если $x \cdot a = 4$; $x \cdot b = -1$.

Ответ: $x_1 = \frac{1}{3}$; $x_2 = \frac{1}{3}$.

Задача 5,7. Найти произведение $a \cdot b$, если

$$a = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}; \ b = [2,\ 3,\ -1].$$

Решение. По формуле (4, 33) получаем

$$a \cdot b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix} \cdot [2,\ 3,\ -1] =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 & 1 \cdot 3 & 1 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 2 & 2 \cdot 3 & 2 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot 3 & 3 \cdot (-1) \\ -5 \cdot 2 & -5 \cdot 3 & -5 \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & -2 \\ 6 & 9 & -3 \\ -10 & -15 & 5 \end{bmatrix}.$$

Обратим внимание на то, что произведение вектора-столбца *справа* на вектор-строку представляет собой матрицу, а не число, как в том случае, когда вектор-столбец умножался *слева* на вектор-строку.

Размер полученной матрицы определяется по известной формуле (4,35), которая в нашем случае запишется так:

$$(4 \times 1) \cdot (1 \times 3) = (4 \times 3).$$

Действительно, получилась матрица с четырьмя строками и тремя столбцами. Таким образом, произведение вектора-столбца справа на вектор-строку есть матрица, у которой элементы любой ее строки (столбца) пропорциональны соответствующим элементам другой ее строки (столбца).

Задача 5,8 (для самостоятельного решения). Найти произведения

$$1) \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot [1,\ 2,\ -2,\ 3,\ 4]; \quad 2) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \cdot [4,\ 5].$$

Ответ.

$$1) \begin{bmatrix} 5 & 10 & -10 & 15 & 20 \\ 7 & 14 & -14 & 21 & 28 \\ -3 & -6 & 6 & -9 & -12 \\ 2 & 4 & -4 & 6 & 8 \end{bmatrix} \quad 2) \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 10 \\ -12 & -15 \end{bmatrix}.$$

В. ЗАДАЧИ НА ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ И МАТРИЦ

Задача 5,9. Найти произведение AB вектора $A = [5,\ 7,\ -2]$ на матрицу

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Решение. Убедимся прежде всего в том, что умножение имеет смысл: число столбцов матрицы A равно трем, а в матрице B столько же строк. Поэтому произвести умножение можно:

$$AB = [5,\ 7,\ -2] \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= [5 \cdot 2 + 7 \cdot 1 + (-2) \cdot (-2);\ 5 \cdot 3 + 7 \cdot 4 + (-2) \cdot 3;$$

$5 \cdot 1 + 7 \cdot 2 + (-2) \cdot (-1)] = [21,\ 37,\ 21]$. Получился вектор-строка с тремя элементами, как и должно быть по правилу (4,35):

$$(1 \times 3) \cdot (3 \times 3) = (1 \times 3).$$

Задача 5,10 (для самостоятельного решения). Найти произведение AB, если

$$A=[1,\ 0,\ -1];\quad B=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & 3\\ 2 & 8\end{bmatrix}.$$

Ответ. $(1,\ -7)$.

Задача 5,11. Найти произведение AB, если

$$A=\begin{bmatrix}5 & 7 & -4\\ 2 & 5 & 1\end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix}3\\ 2\\ -1\end{bmatrix}.$$

Решение. Умножение возможно, так как число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B.

По правилу (4,34) умножения матриц получаем

$$AB=\begin{bmatrix}5 & 7 & -4\\ 2 & 5 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3\\ 2\\ -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\cdot 3+7\cdot 2+(-4)\cdot(-1)\\ 2\cdot 3+5\cdot 2+1\cdot(-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}33\\ 15\end{bmatrix}.$$

Размер этой матрицы (2×1), как и должно быть по правилу (4,35):

$$(2\times 3)\cdot(3\times 1)=(2\times 1).$$

Задача 5,12. (для самостоятельного решения). Найти произведение AB матриц A и B, если

1) $$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & -3 & 0 & 4\\ 7 & 2 & 5 & 5 & 2\\ 3 & 4 & 1 & -7 & -1\end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 2\\ 3\\ 0\end{bmatrix};$$

2) $$A=\begin{bmatrix}3 & 7 & 2\\ 3 & 1 & 3\\ 1 & 4 & 2\\ 2 & 0 & 5\end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix};$$

3) $$A=[5,\ 7,\ -2,\ -3];\quad B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\\ 5 & -4\\ 7 & 2\end{bmatrix}.$$

Ответ. 1) $\begin{bmatrix}-9\\ 20\\ -18\end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix}23\\ 14\\ 15\\ 17\end{bmatrix}$; 3) $[0,21]$.

Задача 5,13. Подрядчик-строитель заключил договор на возведение таких строений: 3 жилых домов, 5 детских садов и 9 домов отдыха. Материалами для строительства являются сталь, лес, стекло, краска. Количество сырья, а также рабочей силы на каждый вид строения выражено в некоторых условных единицах и дается такой матрицей

$$\begin{array}{l} \\ \text{Жилой дом} \\ \text{Детский сад} \\ \text{Дом отдыха} \end{array} \begin{array}{c} \\ A = \left[\begin{array}{ccccc} \text{Сталь} & \text{Лес} & \text{Стекло} & \text{Краска} & \text{Рабочая сила} \\ 10 & 17 & 8 & 5 & 11 \\ 7 & 12 & 4 & 3 & 8 \\ 5 & 15 & 10 & 4 & 9 \end{array} \right]. \end{array}$$

Единица стали стоит 12 рублей, единица леса — 7 рублей, единица стекла — 5 рублей, единица краски — 4 рубля, единица рабочей силы — 10 рублей.

Определить: 1) общее количество потребных материалов и рабочей силы; 2) стоимость материалов и рабочей силы для каждого вида строений; 3) общую стоимость материалов и рабочей силы. (Все цифры, входящие в задачу, условны и не соответствуют действительным данным).

Решение. Договор, заключенный подрядчиком на возведение строений, представим вектором-строкой $B = [3, 5, 9]$. Чтобы узнать количество необходимых материалов, надо перемножить матрицы B и A и найти произведение BA в указанном порядке, т. е. матрицу B умножить справа на матрицу A. Это произведение имеет смысл, так как в матрице B трн столбца, а в матрице A столько же строк. В результате получится матрица, размер которой по формуле (4,35) равен (1×5), так как

$$(1 \times 3) \cdot (3 \times 5) = (1 \times 5),$$

т. е. получится вектор-строка с пятью элементами. Итак, общее количество материалов, необходимых на все строения, в очень компактной записи равно

$$BA = [3,5,9] \cdot \begin{bmatrix} 10 & 17 & 8 & 5 & 11 \\ 7 & 12 & 4 & 3 & 8 \\ 5 & 15 & 10 & 4 & 9 \end{bmatrix} =$$

$= [3 \cdot 10+5 \cdot 7+9 \cdot 5;\ \ 3 \cdot 17+5 \cdot 12+9 \cdot 15;\ \ 3 \cdot 8+5 \cdot 4+9 \cdot 10;\ \ 3 \cdot 5+5 \cdot 3+9 \cdot 4;\ \ 3 \cdot 11+5 \cdot 8+9 \cdot 9] = [110, 246, 134, 66, 154]$ (применено правило (4,34) умножения матриц).

Таким образом, подрядчик должен приобрести: стали 110 единиц, леса 246 единиц, стекла 134 единицы, краски 66 единиц и 154 единицы рабочей силы.

Чтобы узнать стоимость материалов и рабочей силы для каждого вида строений, поступим так: расположим цены материалов в вектор-столбец и получим $C = \begin{bmatrix} 12 \\ 7 \\ 5 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix}$. Умножим теперь справа матрицу A на вектор-столбец C по правилу (4,34) умножения матриц и получим вектор-столбец с тремя элементами, так как размер матрицы AC равен

$$(3 \times 5) \cdot (5 \times 1) = (3 \times 1).$$

$$AC = \begin{bmatrix} 10 & 17 & 8 & 5 & 11 \\ 7 & 12 & 4 & 3 & 8 \\ 5 & 15 & 10 & 4 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 12 \\ 7 \\ 5 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 10 \cdot 12 + 17 \cdot 7 + 8 \cdot 5 + 5 \cdot 4 + 11 \cdot 10 \\ 7 \cdot 12 + 12 \cdot 7 + 4 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 8 \cdot 10 \\ 5 \cdot 12 + 15 \cdot 7 + 10 \cdot 5 + 4 \cdot 4 + 9 \cdot 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 409 \\ 280 \\ 321 \end{bmatrix}.$$

(Умножение этих матриц в другом порядке CA не имеет смысла. Почему?)

Итак, стоимость материалов и рабочей силы для жилого дома — 409 рублей, для детского сада — 280 рублей, для дома отдыха — 321 рубль. Чтобы ответить на третий вопрос задачи, составим произведение матриц

$$BAC = (BA) \cdot C = [110,\ 246,\ 134,\ 66,\ 154] \cdot \begin{bmatrix} 12 \\ 7 \\ 5 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix} = 5516.$$

Это же число можно получить и иначе:

$$BAC = B \cdot (AC) = [3,\ 5,\ 9] \cdot \begin{bmatrix} 409 \\ 280 \\ 321 \end{bmatrix} = 5516.$$

Итак, общая стоимость всех строений 5516 рублей (условных, конечно).

Задача 5,14 (для самостоятельного решения). Произвести указанные действия:

1) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$; 2) $[2,\ -4] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$;

3) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$; 4) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$;

5) $[2,\ 0,\ -4]\cdot\begin{bmatrix}1 & 2 & 5 & -2 & 4 & 7\\ 2 & 1 & 2 & 1 & -3 & 5\\ 0 & 5 & 2 & 4 & 7 & 3\end{bmatrix}$; 6) $[x,\quad y]\cdot\begin{bmatrix}u & v\\ w & t\end{bmatrix}$

7) $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}$; 8) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$;

9) $[u_1\quad u_2\quad u_3]\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

Ответ. 1) $\begin{bmatrix}-1\\ 8\end{bmatrix}$; 2) $[-18,\quad 14]$; 3) $\begin{bmatrix}4\\ 11\\ 3\\ -2\\ -5\\ 3\end{bmatrix}$;

4) $\begin{bmatrix}2\\ -2\end{bmatrix}$; 5) $[2,\quad -16,\quad 2,\quad -20,\quad -20,\quad 2]$;

6) $[xu+yw,\quad xv+yt]$; 7) $\begin{bmatrix}au_1+bu_2\\ cu_1+du_2\end{bmatrix}$;

8) $\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$; 9) $[u_1\quad u_2\quad u_3]$.

Задача 5,15 (для самостоятельного решения). Найти x и y из уравнения

$$[x,\quad y]\cdot\begin{bmatrix}5 & -3\\ 2 & 4\end{bmatrix}=[5,\quad 3].$$

Указание. Использовать определение равенства двух матриц (стр. 100).

Ответ. $x=\frac{7}{13}$; $y=\frac{15}{13}$.

Задача 5,16 (для самостоятельного решения). Из произведения

$$[-3,\quad 2]\cdot\begin{bmatrix}a & c\\ c & a\end{bmatrix}=[3,\quad -7]$$

найти матрицу

$$\begin{bmatrix}a & c\\ c & a\end{bmatrix}.$$

Указание. Использовать определение равенства матриц.

Ответ. $\begin{bmatrix}1 & 3\\ 3 & 1\end{bmatrix}$.

Задача 5,17. Найти вектор a из уравнения

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Решение. Система

$$\left.\begin{aligned} a_1 \quad -a_2 &= \ \ 13 \\ -a_1 \quad +a_2 &= -4 \end{aligned}\right\}$$

противоречива. Величины a_1 и a_2 определить невозможно.

Задача 5,18. Найти вектор u из уравнения

$$\begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 10 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -14 \end{bmatrix}.$$

Решение. Произведя умножение в левой части равенства, получим

$$\begin{bmatrix} -5u_1 + 3u_2 \\ 10u_1 - 6u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -14 \end{bmatrix},$$

откуда, пользуясь определением равенства двух матриц, находим систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} -5u_1 + 3u_2 &= \ \ 7 \\ 10u_1 - 6u_2 &= -14 \end{aligned}\right\}.$$

Легко усмотреть, что второе уравнение является следствием первого. Оно получается из первого умножением обеих его частей на -2. Поэтому фактически мы имеем одно уравнение с двумя неизвестными

$$-5u_1 + 3u_2 = 7,$$

откуда

$$5u_1 = 3u_2 - 7.$$

Обозначим u_2 через k. Тогда

$$u_1 = \frac{3}{5}k - \frac{7}{5};$$

$$u_2 = k,$$

а искомый вектор

$$u = \begin{bmatrix} \frac{3}{5}k - \frac{7}{5} \\ k \end{bmatrix},$$

где k — любое число.

Таким образом, предложенное уравнение имеет бесконечное множество решений.

Задача 5,19. Найти вектор u, если

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = 11 \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

Решение. Выполнив в левой части равенства умножение матриц, а в правой умножение числа на матрицу, получим

$$\begin{bmatrix} 2u_1 + 3u_2 \\ 6u_1 + 2u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \quad u_1 \\ 11 \quad u_2 \end{bmatrix}.$$

Но если две матрицы равны, то их соответствующие элементы равны, потому получаем систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} 2u_1 + 3u_2 &= 11u_1 \\ 6u_1 + 9u_2 &= 11u_2 \end{aligned}\right\}$$

или

$$\left.\begin{aligned} -9u_1 + 3u_2 &= 0 \\ 6u_1 - 2u_2 &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Получилась система из двух линейных однородных уравнений с двумя неизвестными. Так как определитель этой системы

$$\begin{vmatrix} -9 & 3 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

то система допускает решения, отличные от нулевого. Легко усмотреть, что второе уравнение есть следствие первого. Оно получается из первого умножением его на $-\frac{2}{3}$. Таким образом, мы имеем одно уравнение с двумя неизвестными, и решений будет бесконечное множество. Из второго уравнения следует, что

$$u_2 = 3u_1.$$

Если обозначить $u_1 = k$, то $u_2 = 3k$ и вектор

$$u = \begin{bmatrix} k \\ 3k \end{bmatrix},$$

где k — любое число.

Задача 5,20 (для самостоятельного решения). Найти x и y из уравнений:

1) $\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 8 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 5 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 14 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Ответ. 1) $x = 3k$; $y = 2k$; 2) $x = 4k$; $y = 5k$, где k — любое число.

Задача 5,21. Даны матрицы

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}; \quad B=\begin{bmatrix} 5 & 7 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix};$$

$$C=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}; \quad D=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 5 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Найти: 1) компоненту матрицы AB, стоящую во второй строке и третьем столбце;

2) компоненту, стоящую в третьей строке и втором столбце матрицы BD;

3) компоненту, стоящую в последней строке и последнем столбце матрицы AD;

4) компоненту, стоящую в третьей строке и первом столбце матрицы CD.

Решение. Искомую компоненту будем обозначать во всех четырех случаях через c_{ij}, причем первый индекс i означает номер строки, а второй индекс j — номер столбца, в которых находится эта компонента.

1) Умножим вторую строку матрицы A на третий столбец матрицы B:

$$c_{23}=[-1,\ 2,\ 0,\ -3]\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}=[-1\cdot 1+2\cdot 0+0\cdot 1+(-3)\cdot 2]=$$

$$=-7.$$

2) Умножим третью строку матрицы B на второй столбец матрицы D:

$$c_{32}=[-3,\ 0,\ 1,\ 1]\cdot\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}=$$

$$=-3\cdot(-1)+0\cdot 0+1\cdot(-2)+1\cdot(-3)=-2.$$

3) Матрица AD по правилу (4,35) имеет размер

$$(2\times 4)\cdot(4\times 2)=(2\times 2).$$

Поэтому в ней две строки и два столбца. Значит, ее последней строкой является вторая и последним столбцом — второй. Искомая компонента

$$c_{22} = [-1,\ 2,\ 0,\ -3] \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix} = -1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 + 0 \cdot (-2) + $$
$$+ (-3) \cdot (-3) = 10.$$

4) $$c_{31} = [4,\ 1,\ 1,\ 1] \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = 4 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 5 + 1 \cdot 1 = 17.$$

Задача 5,22. В условии предыдущей задачи определить размеры матрицы: 1) AC; 2) DA; 3) AD; 4) BC; 5) CB; 6) DAC; 7) $BCDA$.

Решение. 1) Размер матрицы AC $(2 \times 4) \cdot (4 \times 4) = (2 \times 4)$. Она имеет две строки и четыре столбца.

2) Размер матрицы DA определится из формулы

$$(4 \times 2) \cdot (2 \times 4) = (4 \times 4).$$

Значит, матрица DA — квадратная с четырьмя строками и четырьмя столбцами.

3) Размер матрицы AD $(2 \times 4) \cdot (4 \times 2) = (2 \times 2)$. Это тоже квадратная матрица с двумя строками и двумя столбцами.

4) Размер матрицы BC $(4 \times 4) \cdot (4 \times 4) = (4 \times 4)$.

5) Размер матрицы CB (4×4).

6) Матрицы DAC можно получить в таком порядке: а) DA, б) $(DA)C$ или составить сначала произведение AC, а потом умножить его слева на $D : D \cdot (AC)$. Размер DA определен в пункте 2. Он равен (4×4). Если матрицу A размером 4×4 умножить на матрицу C размером 4×4, то получим матрицу DAC размером

$$(4 \times 4) \cdot (4 \times 4) = (4 \times 4).$$

Если же взять $DAC = D \cdot (AC)$, то, зная, что размер AC равен (2×4), и учитывая, что размер D равен (4×2), а также, что матрица AC умножается на матрицу D слева, находим

$$(4 \times 2) \times (2 \times 4) = (4 \times 4).$$

7) Размер произведения четырех матриц $BCDA$ можно определить так, если учесть сочетательное свойство произведения:

а) $BCDA = (BC) \cdot (DA)$;

б) $BCDA = B \cdot (CDA)$;

в) $BCDA = (BCD) \cdot A$.

Для упражнения определим размер матрицы $BCDA$ во всех этих трех случаях:

а) Размер матрицы BC равен (4×4) (см. пункт 4). Размер матрицы DA тоже равен (4×4). Поэтому размер матрицы $BCDA$ равен $(4 \times 4) \cdot (4 \times 4) = (4 \times 4)$.

б) Определим сначала размер матрицы CDA. Матрица $CDA = C \cdot (DA)$. Но размер матрицы C равен (4×4), а размер матрицы DA уже определен в п. 2 и тоже равен (4×4). Поэтому матрица CDA имеет размер $(4 \times 4) \cdot (4 \times 4) = (4 \times 4)$. Умножая эту матрицу слева на матрицу B, размер которой равен (4×4), найдем, что матрица $BCDA$ имеет размер

$$(4 \times 4) \cdot (4 \times 4) = (4 \times 4).$$

Как и следовало ожидать, мы получили тот же результат.

в) Вычисления надо выполнить самостоятельно. Результат, конечно, должен получиться тот же самый. Правило умножения матриц дается формулой (4,34). На первый взгляд, оно может показаться громоздким и сложным. Однако те, кому приходится часто и много работать с матрицами, очень быстро привыкают безошибочно это правило применять и оно представляется им исключительно простым; палец левой руки должен скользить слева направо вдоль строк первой матрицы, а палец правой руки должен при этом скользить по столбцам второй матрицы сверху вниз. Проделав несколько упражнений, правило умножения матриц можно легко освоить.

Здесь мы приведем три способа проверки правильности проделанного умножения. Эти способы указаны Л. К. Нарадом и мы покажем их на примерах.

I способ проверки. Пусть

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 2 \\ 6 & -3 & 5 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}; \tag{1}$$

$$C = AB = \begin{bmatrix} 27 & 20 \\ 17 & 40 \end{bmatrix}.$$

Для проверки умножения составляем две матрицы-столбца D и F: в первой матрице D элементы равны сумме элементов в соответствующей строке матрицы B

$$D = \begin{bmatrix} 1+2 \\ 3+(-1) \\ 4+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix}, \tag{2}$$

а во второй матрице F элементы равны сумме элементов в соответствующей строке матрицы произведения C

$$F = \begin{bmatrix} 27+20 \\ 17+40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 47 \\ 57 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Произведение матрицы A и D должно равняться матрице F ($AD = F$)

$$AD = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 2 \\ 6 & -3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 9 \\ 6 \cdot 3 - 3 \cdot 2 + 5 \cdot 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 47 \\ 57 \end{bmatrix} = F. \quad (4)$$

II способ проверки. Составляем две матрицы-строки G и H: в первой матрице G элементами являются суммы элементов в каждом столбце в первом сомножителе (матрица A)

$$G = [7+6, \quad 4-3, \quad 2+5] = [13, \ 1, \ 7], \quad (5)$$

а во второй матрице H элементами являются суммы элементов в каждом столбце матрицы произведения C

$$H = [27+17, \quad 20+40] = [44, \ 60]. \quad (6)$$

Произведение матриц G и B должно равняться матрице H ($GB = H$).

$$GB = [13, \ 1, \ 7] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = [13 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 7 \cdot 4;$$
$$13 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 7 \cdot 5] = [44, \ 60] = H. \quad (7)$$

III способ проверки. Составляем матрицу-строку G, элементы которой равны сумме элементов в соответствующих столбцах первого сомножителя $G = [13, \ 1, \ 7]$. Составляем матрицу-столбец D так, что ее элементы равны сумме элементов в соответствующих строках второго сомножителя

$$D = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Произведение GD должно быть равно сумме всех элементов матрицы C

$$GD = [13, \ 1, \ 7] \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix} = 13 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 7 \cdot 9 = 104 =$$
$$= 27 + 17 + 20 + 40.$$

Задача 5,23. Перемножить матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 5 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 4 & -5 \\ -2 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Решение (столбцы I, II отделены пунктирной линией)

$$AB = \begin{bmatrix} 2\cdot 2+3\cdot 1+(-1)\cdot 4+2\cdot(-2)+4\cdot(-1) \\ 1\cdot 2+0\cdot 1+5\cdot 4+(-1)\cdot(-2)+2\cdot(-1) \\ 3\cdot 2+2\cdot 1+0\cdot 4+1\cdot(-2)+(-4)\cdot(-1) \\ \hdashline 2\cdot 3+3\cdot 2+(-1)\cdot(-5)+2\cdot(-3)+2\cdot 4 \\ 1\cdot 3+0\cdot 2+5\cdot(-5)+(-1)\cdot(-3)\cdot\ +4\cdot 4 \\ 3\cdot 3+2\cdot 2+0\cdot(-5)+1\cdot(-3)+(-4)\cdot 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -5 & 27 \\ 22 & -11 \\ 10 & -6 \end{bmatrix}.$$

Получилась матрица размером 3×2, как и должно быть:

$$(3\times 5)\cdot(5\times 2) = (3\times 2).$$

Правильность выполненного умножения установите первым способом проверки.

Задача 5,24. Найти произведение матриц

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 & 8 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & -1 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & 2 & 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Решение (столбцы I—IV отделены пунктирными линиями)

$$AB = \left[\begin{array}{l:l} 2\cdot(-2)+3\cdot 1+1\cdot(-3) & 2\cdot 4+3\cdot 2+1\cdot 1 \\ 4\cdot(-2)+3\cdot 1+(-2)\cdot(-3) & 4\cdot 4+3\cdot 2+(-2)\cdot 1 \\ 2\cdot(-2)+4\cdot 1+1\cdot(-3) & 2\cdot 4+4\cdot 2+1\cdot 1 \\ \hdashline 2\cdot 5+3\cdot 4+1\cdot 2 & 2\cdot 8+3\cdot(-1)+1\cdot 5 \\ 4\cdot 5+3\cdot 4+(-2)\cdot 2 & 4\cdot 8+3\cdot(-1)+(-2)\cdot 5 \\ 2\cdot 5+4\cdot 4+1\cdot 2 & 2\cdot 8+4\cdot(-1)+1\cdot 5 \\ \hdashline 2\cdot 1+3\cdot 0+1\cdot 4 & 2\cdot 3+3\cdot 4+1\cdot 3 \\ 4\cdot 1+3\cdot 0+(-2)\cdot 4 & 4\cdot 3+3\cdot 4+(-2)\cdot 3 \\ 2\cdot 1+4\cdot 0+1\cdot 4 & 2\cdot 3+4\cdot 4+1\cdot 3 \end{array}\right] =$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & 15 & 24 & 18 & 6 & 21 \\ 1 & 20 & 28 & 19 & -4 & 18 \\ -3 & 17 & 28 & 17 & 6 & 25 \end{bmatrix}.$$

Получилась матрица размером 3×6, как и должно быть по правилу (4,35), так как размер матрицы A равен (3×3), матрицы B (3×6), а размер матрицы AB (произведения матриц A и B) равен $(3\times 3)\times$ $\times(3\times 6) = (3\times 6)$.

Правильность умножения самостоятельно установите вторым способом проверки.

Задача 5,25 (для самостоятельного решения). Найти произведение матриц:

1) $A=\begin{bmatrix}3 & -1 & -4\\ 2 & 2 & 5\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 0\\ 4 & -2 & 0 & 3\\ -1 & 2 & -1 & 0\end{bmatrix}$;

2) $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}2 & 5 & 7 & 4 & 5\\ 2 & 1 & 0 & 3 & 7\end{bmatrix}$;

3) $A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 4\\ 2 & 5 & 0\\ 1 & 4 & 2\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & -2 & 4\\ 2 & -3 & 0\end{bmatrix}$;

4) $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\\ 7 & 8\\ -4 & -7\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 4 & 7\\ 2 & -5 & 2 & -3\end{bmatrix}$.

Правильность умножения проверьте по одному из указанных способов.

Ответ. 1) $\begin{bmatrix}3 & 0 & 13 & -3\\ 5 & 10 & 1 & 6\end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix}6 & 11 & 14 & 11 & 17\\ 10 & 17 & 21 & 18 & 29\end{bmatrix}$;

3) $\begin{bmatrix}10 & -19 & 15\\ 4 & -12 & 26\\ 6 & -15 & 19\end{bmatrix}$; 4) $\begin{bmatrix}3 & -8 & 8 & 1\\ 7 & -19 & 22 & 6\\ 9 & -26 & 44 & 25\\ -10 & 27 & -30 & -7\end{bmatrix}$.

Задача 5,26. Доказать, что произведение AB матриц

$$A=\begin{bmatrix}a & 0\\ b & 0\end{bmatrix} \text{ и } B=\begin{bmatrix}0 & 0\\ c & d\end{bmatrix}$$

есть нулевая матрица $0=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$.

Доказательство.

$$AB=\begin{bmatrix}a & 0\\ b & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & 0\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=0.$$

Эта задача показывает, что ***произведение двух матриц может быть нулевой матрицей и тогда, когда ни одна из матриц сомножителей не является нулевой.***

Задача 5,27 (для самостоятельного решения). Доказать, что если

$$A=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \text{ то } AB=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

и придумайте пример, когда произведение двух квадратных матриц третьего порядка является нулевой матрицей, а ни одна из перемножаемых матриц не является нулевой.

Задача 5,28. Доказать, что произведение двух диагональных матриц одного и того же порядка есть диагональная матрица того же порядка.

Доказательство. Пусть даны диагональные матрицы A и B:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots a_{nn} \end{bmatrix}; \quad B=\begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots b_{nn} \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$AB=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & a_{22}b_{22} & 0 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots a_{nn}b_{nn} \end{bmatrix},$$

что и доказывает требуемое.

Отметим, что произведение двух диагональных матриц одного и того же порядка коммутативно: для этих матриц $AB = BA$.

Задача 5,29. Доказать, что произведение $AE_n = A$, если A — квадратная матрица порядка n, а E_n — единичная матрица того же порядка. Убедиться, что $AE_n = E_nA$, т. е. матрицы A и E — коммутативны, если они одного и того же порядка.

Доказательство. Пусть

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}; \quad E_n=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

По правилу умножения матриц получаем

$$AE_n=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Этот пример показывает, что *в матричной алгебре единичная матрица играет такую же роль, какую в обычной алгебре играет 1*.

Задача 5,29а (для самостоятельного решения). Убедиться, что матрицы A и B не коммутативны.

$$A=\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}; \quad B=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ответ.

$$AB=\begin{bmatrix}20 & 20 & 4\\ 26 & 36 & 22\\ 15 & 26 & -3\end{bmatrix};\quad BA=\begin{bmatrix}24 & 17 & 21\\ 24 & 6 & 30\\ 16 & 23 & 23\end{bmatrix}.$$

Задача 5,30. Даны матрицы

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 5 & -7\end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ -2 & 3\end{bmatrix};\quad C=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -2 & 4\end{bmatrix}.$$

Убедиться, что выполняются следующие алгебраические законы:

1) $(A+B)\,C=AC+BC$;

2) $A\,(B+C)=AB+BC$;

3) $A\,(BC)=(AB)\cdot C$.

Задача 5,31. Проверить ассоциативный закон умножения матриц на примере матриц

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 3 & 5\\ -4 & 2 & 3\end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix}-1 & 7 & 2\\ 3 & 1 & 4\\ 0 & 5 & 7\end{bmatrix};\quad C=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3 & 0\\ 0 & 5\end{bmatrix}.$$

Задача 5,32 (для самостоятельного решения). На примере квадратной и диагональной матриц третьего порядка убедиться в справедливости таких утверждений:

1) умножение квадратной матрицы слева на диагональную матрицу сводится к умножению на постоянную величину всех элементов каждой строки этой матрицы;

2) умножение квадратной матрицы справа на диагональную матрицу сводится к умножению на постоянную величину всех элементов каждого столбца этой матрицы.

D. СТЕПЕНИ КВАДРАТНОЙ МАТРИЦЫ

Если A — квадратная матрица, то $A^k\cdot A^l=A^{k+l}$; $(A^k)^l=A^{kl}$.

Задача 5,33. Матрица

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}.$$

Найти A^2, A^3, A^4 и A^6.

Решение.

$$A^2=AA=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 6\\ 18 & 19\end{bmatrix};$$

$$A^3=A^2A=\begin{bmatrix}7 & 6\\ 18 & 19\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}32 & 31\\ 93 & 94\end{bmatrix};$$

$$A^4=(A^2)^2=\begin{bmatrix}7 & 6\\ 18 & 19\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}7 & 6\\ 18 & 19\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}157 & 156\\ 468 & 469\end{bmatrix};$$

$$A^6=(A^3)^2=\begin{bmatrix}32 & 31\\ 93 & 94\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}32 & 31\\ 93 & 94\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3907 & 3906\\ 11718 & 11719\end{bmatrix}.$$

Задача 5,34 (для самостоятельного решения). Матрица

$$A=\begin{bmatrix}1,000 & 0,200\\ 0,200 & 1,000\end{bmatrix}.$$

Найти A^3 и A^5.

Ответ.

$$A^3=\begin{bmatrix}1,120 & 0,608\\ 0,608 & 1,120\end{bmatrix}; \quad A^5=\begin{bmatrix}1,408 & 1,080\\ 1,080 & 1,408\end{bmatrix}.$$

Задача 5,35 (для самостоятельного решения). Показать, что все степени матрицы

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix},$$

начиная с пятой, не содержат элементов, равных нулю, а степени меньше пятой этим свойством не обладают.

Задача 5,36 (для самостоятельного решения). Доказать, что любая целая степень n единичной матрицы E есть та же единичная матрица, т. е.

$$E^n = E.$$

Е. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА И СПОСОБЫ ЕЕ ПОЛУЧЕНИЯ

Если две матрицы A и B — квадратные одного и того же порядка, а их произведение AB есть единичная матрица

$$AB = E,$$

то матрица B называется матрицей обратной к A и обозначается символом A^{-1}

$$A\cdot A^{-1} = E. \qquad (5,1)$$

Следует иметь в виду, что квадратная матрица A и ей обратная A^{-1} коммутативны, т. е. $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A = E$.

Для того, чтобы квадратная матрица A имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы определитель $|A|$ матрицы A не был равен нулю, т. е. матрица A не должна быть особенной (вырожденной).

Формула для вычисления обратной матрицы

Если $\tilde{A}$ — союзная матрица для матрицы A (формула (4,13), стр. 93), то обратная матрица для A

$$A^{-1}=\frac{\tilde{A}}{|A|}, \qquad (5,2)$$

т. е., чтобы найти матрицу, обратную матрице A, надо составить для A союзную матрицу $\tilde{A}$, найти определитель $|A|$ матрицы A

и разделить $\tilde{A}$ на $|A|$. Следует иметь в виду, что если порядок матрицы A большой, то получение обратной матрицы по этой формуле требует сложной вычислительной работы. Кроме того, существуют другие способы нахождения обратной матрицы. Мы укажем их после нескольких упражнений на применение формулы (5,2).

Операция определения обратной матрицы A^{-1} имеет исключительно важное значение для решения системы линейных алгебраических уравнений.

Задача 5,37. Доказать, что матрица

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 4 & 0 & -5 \\ -18 & 1 & 24 \\ -3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

является обратной для матрицы

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$A\cdot A^{-1}=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 4 & 0 & -5 \\ -18 & 1 & 24 \\ -3 & 0 & 4 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} 4\cdot 4+0\cdot(-18)+5\cdot(-3) & 4\cdot 0+0\cdot 1+5\cdot 0 & 4\cdot(-5)+0\cdot 24+5\cdot 4 \\ 0\cdot 4+1\cdot(-18)+(-6)\cdot(-3) & 0\cdot 0+1\cdot 1+(-6)\cdot 0 & 0\cdot(-5)+1\cdot 24+(-6)\cdot 4 \\ 3\cdot 4+0\cdot(-18)+4\cdot(-3) & 3\cdot 0+0\cdot 1+4\cdot 0 & 3\cdot(-5)+0\cdot 24+4\cdot 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=E.$$

Легко проверить, что и произведение A на A^{-1} в обратном порядке, т. е. $A^{-1}\cdot A$ тоже есть единичная матрица. Действительно,

$$A^{-1}\cdot A=\begin{bmatrix} 4 & 0 & -5 \\ -18 & 1 & 24 \\ -3 & 0 & 4 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=E.$$

Задача 5,38. Найти союзную матрицу для матрицы

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}. \qquad (1)$$

Решение. Напомним (см. стр. 93), что для составления союзной матрицы $\tilde{A}$ надо найти алгебраические дополнения A_{ij} элементов матрицы A, из этих элементов составить матрицу

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \qquad (2)$$

и транспонировать ее, т. е. поменять местами строки и столбцы, сохраняя их порядок. Полученная матрица $\tilde{A}$ и будет союзной для матрицы A

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}.$$

В нашем случае

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}=11; \quad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}=-17;$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}=-10;$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}=-3; \quad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}=21;$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}=6;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}=5; \quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}=-11;$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}=2$$

составляем матрицу (2)

$$\begin{bmatrix} 11 & -17 & -10 \\ -3 & 21 & 6 \\ 5 & -11 & 2 \end{bmatrix}.$$

Транспонируем ее и получим союзную матрицу

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix} 11 & -3 & 5 \\ -17 & 21 & -11 \\ -10 & 6 & 2 \end{bmatrix}. \qquad (3)$$

Задача 5,39. Найти матрицу A^{-1}, обратную матрице A предыдущей задачи.

Решение. Чтобы воспользоваться формулой (5,2), надо знать союзную матрицу $\tilde{A}$ для матриц A и определитель матрицы A. В предыдущей задаче союзная матрица $\tilde{A}$ найдена. Это матрица (3). Осталось найти $|A|$. Воспользуемся правилом Сарруса

$$|A|=\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}=3\cdot 2\cdot 5+4(-1)\cdot(-2)+1\cdot 1\cdot 3-$$
$$-(-2)\cdot 2\cdot 3-(-1)\cdot 1\cdot 3-4\cdot 1\cdot 5=30+8+3+$$
$$+12+3-20=36.$$

Подставляя значения $\tilde{A}$ и $|A|$ в формулу (5,2), получаем

$$A^{-1}=\frac{\begin{bmatrix} 11 & -3 & 5 \\ -17 & 21 & -11 \\ -10 & 6 & 2 \end{bmatrix}}{36};$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{11}{36} & -\frac{1}{12} & \frac{5}{36} \\ -\frac{17}{36} & \frac{7}{12} & -\frac{11}{36} \\ -\frac{5}{18} & \frac{1}{6} & \frac{1}{18} \end{bmatrix}.$$

Проверка:

$$A\cdot A^{-1}=\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \frac{11}{36} & -\frac{1}{12} & \frac{5}{36} \\ -\frac{17}{36} & \frac{7}{12} & -\frac{11}{36} \\ -\frac{5}{18} & \frac{1}{6} & \frac{1}{18} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Задача 5.40 (для самостоятельного решения). Найти обратную матрицу A^{-1} для матрицы

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

и показать, что $AA^{-1}=A^{-1}A=E$.

О т в е т.

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Задача 5,41 (для самостоятельного решения). Найти матрицу A^{-1}, обратную матрице

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

и проверить, что $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$.

О т в е т.

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Задача 5,42. Матрица

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Найти для нее обратную матрицу A^{-1} и проверить, что $AA^{-1}=$ $=A^{-1}A=E$.

Указание. Определитель A удобно вычислить по формуле (4,14). Применение этой формулы приведет к вычислению определителя

$$\frac{1}{4}\cdot\begin{bmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 3 & -1 & 4 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}=7.$$

Ответ

$$A=\begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{6}{7} & -1 & -\frac{4}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{5}{7} & 1 & \frac{1}{7} \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -\frac{4}{7} & \frac{2}{7} & 0 & \frac{1}{7} \end{bmatrix}.$$

Задача 5,43. Для матриц

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ и } B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

найти обратные.

Ответ.

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \qquad B^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Выше было указано, что процесс определения обратной матрицы очень трудоемкий, когда порядок матрицы n большой. Уже для случая $n=4$ определение обратной матрицы в задаче 5,42 потребовало достаточно много времени. Мы укажем прием для вычисления обратной матрицы, который не вызывает столь значительных трудностей.

Пусть требуется найти матрицу, обратную квадратной матрице A порядка n. Разобьем эту матрицу на блоки и представим ее в виде

$$A=\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}, \tag{5,3}$$

где α_{11} и α_{22} — квадратные матрицы, а матрицы α_{12} и α_{21} могут быть как квадратными, так и прямоугольными. Пусть

$$\beta = \alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{11}^{-1}\alpha_{12}. \tag{5,4}$$

Тогда A^{-1}, обратная матрица для матрицы A, находится по формуле

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_{11}^{-1} + \alpha_{11}^{-1}\alpha_{12}\beta^{-1}\alpha_{21}\alpha_{11}^{-1} & -\alpha_{11}^{-1}\alpha_{12}\beta^{-1} \\ -\beta^{-1}\alpha_{21}\alpha_{11}^{-1} & \beta^{-1} \end{bmatrix}. \tag{5,5}$$

Непосредственным умножением A на A^{-1} легко усмотреть, что $AA^{-1} = E$.

Будем обозначать через A_2, A_3, A_4, ... квадратные матрицы порядков, соответственно равных 2, 3, 4, ... (т. е. индекс при названии матрицы указывает ее порядок).

Если обозначить

$$\gamma = \beta^{-1}\alpha_{21}, \tag{5,6}$$

то формула (5,5) примет более простой вид:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_{11}^{-1} + \alpha_{11}^{-1}\alpha_{12}\gamma\alpha_{11}^{-1} & -\alpha_{11}^{-1}\alpha_{12}\beta^{-1} \\ -\gamma\alpha_{11}^{-1} & \beta^{-1} \end{bmatrix}. \tag{5,7}$$

Этой формулой мы и будем пользоваться на практике. Она удобна тем, что содержит только две обратные матрицы: α_{11}^{-1} и β^{-1}. Выполним несколько упражнений на применение этой формулы. В дальнейшем операцию нахождения обратной матрицы для данной будем называть обращением матрицы.

Задача 5,44. Для матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

найти обратную.

В задаче 5,42 обратная матрица для заданной была уже найдена самостоятельно. Здесь мы определим обратную матрицу по формуле (5,7).

Решение. Матрицу A разобьем на блоки и представим ее в таком виде:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}.$$

У нас

$$\alpha_{11}=\begin{bmatrix}2 & 1\\3 & 2\end{bmatrix};\quad \alpha_{12}=\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 3\end{bmatrix};\quad \alpha_{21}=\begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 0\end{bmatrix};\quad \alpha_{22}=\begin{bmatrix}0 & 2\\2 & 1\end{bmatrix}.$$

Чтобы найти β, надо знать матрицу α_{11}^{-1}, обратную матрице α_{11}. Найти α_{11}^{-1} очень просто по формуле (5,2), которую мы здесь перепишем в виде

$$\alpha_{11}^{-1}=\frac{\tilde{\alpha}_{11}}{|\alpha_{11}|}.$$

Для матрицы α_{11} союзная матрица

$$\tilde{\alpha}_{11}=\begin{bmatrix}2 & -1\\-3 & 2\end{bmatrix},$$

а определитель матрицы α_{11} равен

$$|\alpha_{11}|=\begin{bmatrix}2 & 1\\3 & 2\end{bmatrix}=4-3=1.$$

Поэтому по предыдущей формуле

$$\alpha_{11}^{-1}=\begin{bmatrix}2 & -1\\-3 & 2\end{bmatrix}.$$

Определяем β по формуле (5,4). Для этого вычислим произведение трех матриц

$$\alpha_{21}\alpha_{11}^{-1}\alpha_{12}=\begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\-3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 3\\4 & -2\end{bmatrix}\times$$

$$\times\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 9\\2 & -6\end{bmatrix};$$

$$\beta=\alpha_{22}-\alpha_{21}\alpha_{11}^{-1}\alpha_{12}=\begin{bmatrix}0 & 2\\2 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1 & 9\\2 & -6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -7\\0 & 7\end{bmatrix}.$$

Чтобы использовать формулу (5,7), надо вычислить матрицу β^{-1}, обратную матрице β. Для этого применим формулу (5,2). Союзная для β матрица

$$\tilde{\beta}=\begin{bmatrix}7 & 7\\0 & 1\end{bmatrix},$$

а $|\beta|=7$. Поэтому

$$\beta^{-1}=\frac{1}{7}\cdot\begin{bmatrix}7 & 7\\0 & 1\end{bmatrix}.$$

Теперь переходим к вычислению элементов матрицы (5,7). Начнем с ее элемента $\alpha_{11}^{-1}+\alpha_{11}^{-1}\alpha_{12}\gamma\alpha_{11}^{-1}$. Прежде всего определим γ по формуле (5,6):

$$\gamma=\beta^{-1}\alpha_{21}=\frac{1}{7}\cdot\begin{bmatrix}7 & 7\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 0\end{bmatrix}=\frac{1}{7}\cdot\begin{bmatrix}21 & 14\\ 2 & 0\end{bmatrix};$$

$$\alpha_{11}^{-1}\alpha_{12}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -3\\ -1 & 6\end{bmatrix};$$

$$\alpha_{11}^{-1}\alpha_{12}\gamma=\begin{bmatrix}1 & -3\\ -1 & 6\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{7}\begin{bmatrix}21 & 14\\ 2 & 0\end{bmatrix}=\frac{1}{7}\cdot\begin{bmatrix}15 & 14\\ -9 & -14\end{bmatrix};$$

$$\alpha_{11}^{-1}\alpha_{12}\gamma\alpha_{11}^{-1}=\frac{1}{7}\cdot\begin{bmatrix}15 & 14\\ -9 & -14\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\end{bmatrix}=\frac{1}{7}\cdot\begin{bmatrix}-12 & 13\\ 24 & -19\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}-\frac{12}{7} & \frac{13}{7}\\ \frac{24}{7} & -\frac{19}{7}\end{bmatrix}.$$

Первый элемент первой строки в матрице (5,7) равен

$$\alpha_{11}^{-1}+\alpha_{11}^{-1}\alpha_{12}\gamma\alpha_{11}^{-1}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\frac{12}{7} & \frac{13}{7}\\ \frac{24}{7} & -\frac{19}{7}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{7} & \frac{6}{7}\\ \frac{3}{7} & -\frac{5}{7}\end{bmatrix}.$$

Второй элемент первой строки

$$-\alpha_{11}^{-1}\alpha_{12}\beta^{-1}=-\begin{bmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 3\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{7}\cdot\begin{bmatrix}7 & 7\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -\frac{4}{7}\\ 1 & -\frac{1}{7}\end{bmatrix}.$$

Первый элемент второй строки в формуле (5,7)

$$-\gamma\alpha_{11}^{-1}=-\frac{1}{7}\cdot\begin{bmatrix}21 & 14\\ 2 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ -\frac{4}{7} & \frac{2}{7}\end{bmatrix}.$$

Второй элемент второй строки

$$\beta^{-1}=\frac{1}{7}\cdot\begin{bmatrix}7 & 7\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & \frac{1}{7}\end{bmatrix}.$$

Подставляя найденные элементы матрицы (5,7), получаем окончательно

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{2}{7} & \frac{6}{7} & -1 & -\frac{4}{7}\\ \frac{3}{7} & -\frac{5}{7} & 1 & -\frac{1}{7}\\ 0 & -1 & 1 & 1\\ -\frac{4}{7} & \frac{2}{7} & 0 & \frac{1}{7}\end{bmatrix}.$$

К решению задачи можно подойти и иначе. Разобьем матрицу A на блоки так:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ \hline 2 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right].$$

Теперь уже

$$\alpha_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}; \quad \alpha_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix};$$

$$\alpha_{21} = [2 \quad 0 \quad 2]; \quad \alpha_{22} = 1.$$

Для применения формулы (5,7) надо найти матрицу α_{11}^{-1}, обратную матрице α_{11}. Это можно сделать так: рассмотреть матрицу

$$A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

и найти ей обратную по той же формуле, разбив ее на блоки следующим образом:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 0 \end{array}\right].$$

Здесь

$$\alpha_{11} = A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}; \quad \alpha_{12} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \alpha_{21} = [1, \ 2]; \quad \alpha_{22} = 0.$$

Матрицу, обратную $A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, надо найти непосредственно по формуле (5,2).

Если провести все вычисления, то окажется, что

$$A_3^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Остальные вычисления следует провести самостоятельно.

Задача 5,45. Найти обратную матрицу для матрицы

$$A_4 = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 10 & 8 & 7 \\ 6 & 8 & 10 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 10 \end{bmatrix},$$

Решение. Разобьем матрицу A на блоки

$$A=\left[\begin{array}{ccc|c}5&7&6&5\\7&10&8&7\\6&8&10&9\\\hline 5&7&9&10\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc|c}&&&5\\&A_3&&7\\&&&9\\\hline 5&7&9&10\end{array}\right].$$

Здесь

$$\alpha_{11}=A_3=\begin{bmatrix}5&7&6\\7&10&8\\6&8&10\end{bmatrix};\quad \alpha_{12}=\begin{bmatrix}5\\7\\9\end{bmatrix};$$

$$\alpha_{21}=[5,\ 7,\ 9];\ \alpha_{22}=10.$$

Для применения формулы (5,7) надо найти матрицу α_{11}^{-1}, обратную матрице $\alpha_{11}=A_3$, т. е. найти сначала A_3^{-1}. Сделаем это также по формуле (5,7).

Представим A_3 в виде блочной матрицы

$$A_3=\left[\begin{array}{cc|c}5&7&6\\7&10&8\\\hline 6&8&10\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc|c}&A_2&6\\&&8\\\hline 6&8&10\end{array}\right].$$

Полагаем, что здесь

$$\alpha_{11}=A_2=\begin{bmatrix}5&7\\7&10\end{bmatrix};\quad \alpha_{12}=\begin{bmatrix}6\\8\end{bmatrix};\ \alpha_{21}=[6,\ 8];\ \alpha_{22}=10.$$

Чтобы использовать формулу (5,7) для вычисления A_3^{-1}, надо найти $\alpha_{11}^{-1}=A_2^{-1}$. Это следует сделать непосредственно по формуле (5,2). Окажется, что

$$\alpha_{11}^{-1}=A_2^{-1}=\begin{bmatrix}10&-7\\-7&5\end{bmatrix}.$$

При вычислении A_3^{-1} получим $\beta=2$,

$$A_3^{-1}=\begin{bmatrix}18&-11&-2\\-11&7&1\\-2&1&\frac{1}{2}\end{bmatrix}.$$

При вычислении A_4^{-1} найдем, что $\beta = \frac{1}{2}$,

$$\alpha_{11}^{-1}\alpha_{12}\gamma\alpha_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} 50 & -30 & -15 \\ -30 & 18 & 9 \\ -15 & 9 & 4{,}5 \end{bmatrix};$$

$$\alpha_{11}^{-1} + \alpha_{11}^{-1}\alpha_{12}\gamma\alpha_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} 68 & -41 & -17 \\ -41 & 25 & 10 \\ -17 & 10 & 5 \end{bmatrix};$$

$$-\alpha_{11}^{-1}\alpha_{12}\beta^{-1} = \begin{bmatrix} 10 \\ -6 \\ -3 \end{bmatrix};$$

$$-\gamma\alpha_{11}^{-1} = [10,\ -6,\ -3].$$

Окончательно

$$A_4^{-1} = \begin{bmatrix} 68 & -41 & -17 & 10 \\ -41 & 25 & 10 & -6 \\ -17 & 10 & 5 & -3 \\ 10 & -6 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Задача 5,46 (для самостоятельного решения) Найти матрицы, обратные данным:

$$1)\ A_8 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}; \qquad 2)\ A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 8 & 9 \end{bmatrix};$$

$$3)\ A_4 = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ответ.

$$1)\ A_3^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}; \qquad 2)\ A_8^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{8}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{22}{15} & -\frac{4}{15} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix};$$

$$3)\ A_4^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -6 & -10 \end{bmatrix}.$$

Обращение матрицы является весьма существенным при решении систем линейных алгебраических уравнений.

На этом занятии мы выполнили упражнения, которые знакомят с принципиальной стороной этого вопроса, с основной формулой для получения обратной матрицы [формула (5,2)] и ее применением, а также упражнения по формуле (5,7), которая не требует столь громоздких вычислений, как формула (5,2).

С другими численными методами получения обратной матрицы читатель может познакомиться по книге Р. Фрезер, В. Дункан и А. Коллар. «Теория матриц и ее приложения к дифференциальным уравнениям и динамике» (Изд-во «Иностранная литература», Москва, 1950).