ШЕСТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание. Обращение треугольной матрицы (верхней и нижней). Разложение квадратной матрицы на произведение двух треугольных. Вычисление обратной матрицы при помощи представления ее в виде произведения двух треугольных матриц.

1. ОБРАЩЕНИЕ ВЕРХНЕЙ ТРЕУГОЛЬНОЙ МАТРИЦЫ

Краткие сведения из теории

Сущность метода обращения верхней треугольной матрицы разберем на матрицах четвертого порядка, а формулы для обращения верхней треугольной матрицы любого порядка приведем без вывода. (Заметим еще раз, что обращение матриц имеет исключительно большое значение для решения систем линейных алгебраических уравнений, которыми мы будем заниматься на следующем практическом занятии)

Пусть A — верхняя треугольная матрица четвертого порядка

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix},$$

а искомая обратная ей матрица, элементы которой α_{ij} подлежат определению, запишется в виде

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{bmatrix}.$$

По определению обратной матрицы должно выполняться равенство

$$A^{-1}A = E,$$

т. е.

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Используя правило умножения матриц, перемножим матрицы в левой части равенства

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11}a_{11} & \alpha_{11}a_{12}+\alpha_{12}a_{22} & \alpha_{11}a_{13}+\alpha_{12}a_{23}+\alpha_{13}a_{33} & \alpha_{11}a_{14}+\alpha_{12}a_{24}+\alpha_{13}a_{34}+\alpha_{14}a_{44} \\ \alpha_{21}a_{11} & \alpha_{21}a_{12}+\alpha_{22}a_{22} & \alpha_{21}a_{13}+\alpha_{22}a_{23}+\alpha_{23}a_{33} & \alpha_{21}a_{14}+\alpha_{22}a_{24}+\alpha_{23}a_{34}+\alpha_{24}a_{44} \\ \alpha_{31}a_{11} & \alpha_{31}a_{12}+\alpha_{32}a_{22} & \alpha_{31}a_{13}+\alpha_{32}a_{23}+\alpha_{33}a_{33} & \alpha_{31}a_{14}+\alpha_{32}a_{24}+a_{33}a_{34}+\alpha_{34}a_{44} \\ \alpha_{41}a_{11} & \alpha_{41}a_{12}+\alpha_{42}a_{22} & \alpha_{41}a_{13}+\alpha_{42}a_{23}+\alpha_{43}a_{33} & a_{41}a_{14}+\alpha_{42}a_{24}+a_{43}a_{34}+\alpha_{44}a_{44} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Исходя из определения равенства двух матриц, для отыскания неизвестных величин получаем уравнения, сравнив соответствующие элементы первых строк,

$$\alpha_{11}a_{11} = 1; \tag{1}$$

$$\alpha_{11}a_{12} + \alpha_{12}a_{22} = 0; \tag{2}$$

$$\alpha_{11}a_{13} + \alpha_{12}a_{23} + \alpha_{13}a_{33} = 0; \tag{3}$$

$$\alpha_{11}a_{14} + \alpha_{12}a_{24} + \alpha_{13}a_{34} + \alpha_{14}a_{44} = 0. \tag{4}$$

Из этих уравнений следует:

из (1) $$\alpha_{11} = \frac{1}{a_{11}}; \tag{5}$$

из (2) $$\alpha_{12} = -\frac{\alpha_{11}a_{12}}{a_{22}} = -\frac{1}{a_{22}}\alpha_{11}a_{12}; \tag{6}$$

из (3) $$\alpha_{13} = -\frac{\alpha_{11}a_{13} + \alpha_{12}a_{23}}{a_{33}} = -\frac{1}{a_{33}}\sum_{k=1}^{2}\alpha_{1k}a_{k3}; \tag{7}$$

из (4) $$\alpha_{14} = -\frac{\alpha_{11}a_{14} + \alpha_{12}a_{24} + \alpha_{13}a_{34}}{a_{44}} = -\frac{1}{a_{44}}\sum_{k=1}^{3}\alpha_{1k}a_{k4}. \tag{8}$$

Проделав аналогичную работу для второй, третьей и четвертой строк, получим для второй строки

$$\alpha_{21}a_{11} = 0; \tag{9}$$

$$\alpha_{21}a_{12} + \alpha_{22}a_{22} = 1; \tag{10}$$

$$\alpha_{21}a_{13} + \alpha_{22}a_{23} + \alpha_{23}a_{33} = 0; \tag{11}$$

$$\alpha_{21}a_{14} + \alpha_{22}a_{24} + \alpha_{23}a_{34} + \alpha_{24}a_{44} = 0 \tag{12}$$

из (9) $$\alpha_{21} = 0. \tag{13}$$

С учетом, что $\alpha_{21} = 0$, получаем:

из (10) $\quad \alpha_{22} = \frac{1}{a_{22}}$; $\quad$ (14)

из (11) $\quad \alpha_{23} = -\frac{\alpha_{22}a_{23}}{a_{33}} = -\frac{1}{a_{33}}\alpha_{22}a_{23}$; $\quad$ (15)

из (12) $\quad \alpha_{24} = -\frac{\alpha_{21}a_{14} + \alpha_{22}a_{24} + \alpha_{23}a_{34}}{a_{44}} = -\frac{1}{a_{44}}\sum_{k=1}^{3}\alpha_{2k}a_{k4}.$ $\quad$ (16)

Для третьей строки

$$\alpha_{31}a_{11} = 0; \tag{17}$$
$$\alpha_{31}a_{12} + \alpha_{32}a_{22} = 0; \tag{18}$$
$$\alpha_{31}a_{13} + \alpha_{32}a_{23} + \alpha_{33}a_{33} = 1; \tag{19}$$
$$\alpha_{31}a_{14} + \alpha_{32}a_{24} + \alpha_{33}a_{34} + \alpha_{34}a_{44} = 0. \tag{20}$$

Из этих уравнений следует:
из (17) $\quad \alpha_{31} = 0.$ $\quad$ (21)
Учитывая, что $\alpha_{31} = 0$, из (18) получаем

$$\alpha_{32} = 0, \tag{22}$$

а учитывая, что и $\alpha_{31} = 0$, и $\alpha_{32} = 0$, находим:

из (19) $\quad \alpha_{33} = \frac{1}{a_{33}}$; $\quad$ (23)

из (20) $\quad \alpha_{34} = -\frac{\alpha_{33}a_{34}}{a_{44}} = -\frac{1}{a_{44}}\alpha_{33}a_{34}.$ $\quad$ (24)

И наконец, для четвертой строки имеем

$$\alpha_{41}a_{11} = 0; \tag{25}$$
$$\alpha_{41}a_{12} + \alpha_{42}a_{22} = 0; \tag{26}$$
$$\alpha_{41}a_{13} + \alpha_{42}a_{23} + \alpha_{43}a_{33} = 0; \tag{27}$$
$$\alpha_{41}a_{14} + \alpha_{42}a_{24} + \alpha_{43}a_{34} + \alpha_{44}a_{44} = 1. \tag{28}$$

Из (25), (26) и (27) следует, что

$$\alpha_{41} = 0; \tag{29}$$
$$\alpha_{42} = 0; \tag{30}$$
$$\alpha_{43} = 0, \tag{31}$$

а с учетом этого из (28) получаем

$$\alpha_{44} = \frac{1}{a_{44}}. \tag{32}$$

Равенства (9), (21), (22), (29), (30) и (31) показывают, что равны нулю те элементы обратной матрицы A^{-1}, у которых первый индекс i больше второго индекса j, т. е. если $i > j$, то

$$\alpha_{ij} = 0. \tag{6,1}$$

Из равенств (5), (14), (23) и (32) диагональные элементы обратной матрицы A^{-1}, у которых первый и второй индексы равны ($i = j$), определяются так:

$$\alpha_{11} = \frac{1}{a_{11}}; \quad \alpha_{22} = \frac{1}{a_{22}}; \quad \alpha_{33} = \frac{1}{a_{33}}; \quad \alpha_{44} = \frac{1}{a_{44}},$$

что можно объединить одной записью: если $i = j$, то

$$\alpha_{ii} = \frac{1}{a_{ii}}. \qquad (6,2)$$

По формулам (6), (7), (8), (15), (16), (24) и (32) определяются те элементы обратной матрицы для верхней треугольной, у которых первый индекс i меньше второго индекса j ($i < j$), т.е. элементы, стоящие над главной диагональю. Полученная по этим формулам обращенная матрица будет также верхней треугольной.

Когда верхняя треугольная матрица имеет порядок n, элементы обратной ей матрицы находятся по аналогичным формулам, которые имеют следующий вид:

$$\text{если } i = j, \quad \text{то} \quad \alpha_{ii} = \frac{1}{a_{ii}}; \qquad (6,3)$$

$$\text{если } i > j, \quad \text{то} \quad \alpha_{ij} = 0; \qquad (6,4)$$

$$\text{если } i < j, \text{ то } \alpha_{ij} = -\frac{1}{a_{jj}} \sum_{k=1}^{j-1} \alpha_{ik} a_{kj}. \qquad (6,5)$$

Например, по формуле (6,5) элемент обратной матрицы

$$\alpha_{15} = -\frac{1}{a_{55}} \sum_{k=1}^{4} \alpha_{1k} a_{k5} =$$

$$= -\frac{1}{a_{55}} (\alpha_{11} a_{15} + \alpha_{12} a_{25} + \alpha_{13} a_{35} + \alpha_{14} a_{45}). \qquad (6,6)$$

Замечания. Применяя формулу (6,5), надо иметь в виду, что будут равны нулю те произведения, в которых первый индекс элемента α больше второго индекса. Можно указать простое правило для определения элементов обращенной верхней треугольной матрицы.

1. Определить диагональные элементы обращенной матрицы по формуле (6,3).
2. После этого матрицы подписать одну под другой.
3. На места элементов, стоящих ниже главной, вписать нули.
4. Чтобы определить элемент, стоящий над главной диагональю обратной матрицы, надо составить алгебраическую сумму произведений элементов, стоящих в обращенной матрице A^{-1}, левее определяемого, на соответствующие элементы того столбца матрицы A (т. е. той матрицы, для которой ищется обратная), в ко-

тором стоит определяемый элемент. Эту алгебраическую сумму надо разделить на диагональный элемент матрицы A, стоящий в том же столбце, что и определяемый элемент. Определяемый элемент равен этому частному, взятому с обратным знаком.

По этому правилу выражение в скобках в (6,6) получается так: искомый элемент α_{15} матрицы A^{-1} находится в первой строке и пятом столбце. Перед ним в первой строке обратной матрицы A^{-1} стоят элементы α_{11}, α_{12}, α_{13}, и α_{14}, а в пятом столбце матрицы A — элементы a_{15}, a_{25}, a_{35} и a_{45}. Составляется алгебраическая сумма произведений первого элемента в первой строке матрицы A^{-1} на первый элемент в пятом столбце матрицы A, второго элемента в первой строке матрицы A^{-1} на второй элемент в пятом столбце матрицы A и т. д. Для уяснения этого правила решим несколько задач.

Задача 6,1. Найти обратную матрицу для матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Решение. п. 1. Находим диагональные элементы α_{11}, α_{22}, α_{33} и α_{44} обращенной матрицы по формуле (6,3)

$$\alpha_{11} = \frac{1}{a_{11}} = \frac{1}{3}; \quad \alpha_{22} = \frac{1}{a_{22}} = \frac{1}{8}; \quad \alpha_{33} = \frac{1}{a_{33}} = \frac{1}{6}; \quad \alpha_{44} = \frac{1}{4}.$$

пп. 2 и 3. Подписываем матрицы одну под другой и вписываем нули на места элементов, стоящих под главной диагональю

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix};$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & & \alpha_{ij} & \\ 0 & \frac{1}{8} & & \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

п. 4. Определяем элементы α_{ij}, стоящие над главной диагональю $(i < j)$, по формуле (6,5), пользуясь указанным в п. 4 правилом.

$$
\begin{bmatrix}
\frac{1}{3} & -\frac{\frac{1}{3}\cdot 1}{8} = -\frac{1}{24} & -\frac{\frac{1}{3}\cdot 2 + \left(-\frac{1}{24}\right)\cdot 3}{6} = \frac{-13}{144} & -\frac{\frac{1}{3}\cdot 1 + \left(-\frac{1}{24}\right)\cdot 2 + \left(-\frac{13}{144}\right)\cdot 4}{4} = \frac{1}{36} \\
0 & \frac{1}{8} & -\frac{0\cdot 2 + \frac{1}{8}\cdot 3}{6} = -\frac{1}{16} & -\frac{0\cdot 1 + \frac{1}{8}\cdot 2 + \left(-\frac{1}{16}\right)\cdot 4}{4} = 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{0\cdot 1 + 0\cdot 2 + \frac{1}{6}\cdot 4}{4} = -\frac{1}{6} \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{4}
\end{bmatrix};
$$

$$
A^{-1} = \begin{bmatrix}
\frac{1}{3} & -\frac{1}{24} & -\frac{13}{144} & \frac{1}{36} \\
0 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{16} & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{4}
\end{bmatrix}.
$$

Для проверки перемножьте матрицы A и A^{-1} и убедитесь, что получится единичная матрица

$$
E_4 = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}.
$$

При решении этой задачи все элементы обратной матрицы были представлены в виде простых дробей. Мы так поступили для облегчения контроля. На практике же все вычисления ведутся в десятичных дробях.

Отметим, что вычисление $\sum\limits_{k=1}^{i-1} \alpha_{ik} a_{kj}$ по формуле (6,5) с помощью настольных клавишных счетных машин или на арифмометре не требует никаких промежуточных записей, так как эти машины позволяют производить накопление произведений.

Задача 6,2 (для самостоятельного решения). Найти матрицы, обратные верхним треугольным:

1) $A=\begin{bmatrix}2&5&4&3\\0&3&4&2\\0&0&3&1\\0&0&0&4\end{bmatrix}$; 2) $A=\begin{bmatrix}1&2&-1&3&5\\0&-1&2&1&4\\0&0&5&-2&3\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&-4\end{bmatrix}$;

3) $A=\begin{bmatrix}-3&2&0&5&4&6\\0&2&-4&0&2&-1\\0&0&1&-3&2&7\\0&0&0&3&0&1\\0&0&0&0&4&2\\0&0&0&0&0&3\end{bmatrix}$

и проверить ответ умножением A на A^{-1} (произведение должно быть единичной матрицей).

Ответ. 1)

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{5}{6}&+\frac{4}{9}&-\frac{5}{72}\\0&\frac{1}{3}&-\frac{4}{9}&-\frac{1}{18}\\0&0&+\frac{1}{3}&-\frac{1}{12}\\0&0&0&\frac{1}{4}\end{bmatrix};$$

2)

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}1&+2&-\frac{3}{5}&-\frac{31}{5}&-\frac{3}{10}\\0&-1&\frac{2}{5}&\frac{9}{5}&\frac{1}{5}\\0&0&\frac{1}{5}&\frac{2}{5}&\frac{7}{20}\\0&0&0&1&\frac{1}{2}\\0&0&0&0&-\frac{1}{4}\end{bmatrix};$$

3)

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{3}&+\frac{1}{3}&\frac{4}{3}&\frac{17}{9}&-\frac{1}{2}&-\frac{71}{27}\\0&\frac{1}{2}&2&2&-\frac{5}{4}&-\frac{13}{3}\\0&0&1&1&-\frac{1}{2}&-\frac{7}{3}\\0&0&0&\frac{1}{3}&0&-\frac{1}{9}\\0&0&0&0&\frac{1}{4}&-\frac{1}{6}\\0&0&0&0&0&\frac{1}{3}\end{bmatrix}.$$

II. ОБРАЩЕНИЕ НИЖНЕЙ ТРЕУГОЛЬНОЙ МАТРИЦЫ

Поступая так же, как и для обращения верхней треугольной матрицы, получаем формулы для определения элементов матрицы, которая обратна нижней треугольной матрице

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 & 0 \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & 0 \dots & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & 0 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix};$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & 0 & 0 & 0 \dots & 0 \\ \beta_{21} & \beta_{22} & 0 & 0 \dots & 0 \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} & 0 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \beta_{n3} & \beta_{n4} \dots & \beta_{nn} \end{bmatrix}.$$

При $i < j$ $\qquad \beta_{ij} = 0$ $\qquad$ (6,7)

(т. е. все элементы, находящиеся над главной диагональю, равны нулю).

При $i = j$ $\qquad \beta_{ii} = \frac{1}{b_{ii}}$. $\qquad$ (6,8)

По этой формуле находятся диагональные элементы.

При $i > j$ $\qquad \beta_{ij} = -\frac{1}{b_{ii}} \sum_{k=1}^{i-1} \beta_{kj} b_{ik}$. $\qquad$ (6,9)

По этой формуле определяются элементы, находящиеся ниже главной диагонали. Из приведенных формул видно, что обратная матрица для нижней треугольной является также нижней треугольной.

Пример применения формулы (6,9). Пусть требуется определить β_{53} ($i = 5$; $j = 3$; $i > j$).

$$\beta_{53} = -\frac{1}{b_{55}} \sum_{k=1}^{4} \beta_{k3} b_{5k};$$

$$\beta_{53} = -\frac{1}{b_{55}} (\beta_{13} b_{51} + \beta_{23} b_{52} + \beta_{33} b_{53} + \beta_{43} b_{54}).$$

В скобки заключена алгебраическая сумма произведений элементов, начиная с первого, того столбца, в котором находится определяемый элемент, на соответствующие элементы той строки матрицы B (той матрицы, для которой ищется обратная), в которой стоит определяемый элемент. Среди произведений, стоящих в скобке, могут быть и равные нулю. Это будут те произведения, у которых множитель β имеет первый индекс меньше второго.

Задача 6,3. Найти матрицу, обратную нижней треугольной матрице

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Решение. *Прежде* всего по формуле (6,8) определяем диагональные элементы: $\beta_{11} = \frac{1}{b_{11}} = \frac{1}{1} = 1$; $\beta_{22} = \frac{1}{b_{22}} = \frac{1}{2}$; $\beta_{33} = \frac{1}{b_{33}} = \frac{1}{4}$; $\beta_{44} = \frac{1}{b_{44}} = \frac{1}{3}$.

Вписываем эти элементы в главную диагональ и вписываем нули на места над ней. Теперь следует определить элементы β_{21}; β_{31}; β_{32}; β_{41}; β_{42}; β_{43}.

Эти элементы вычислим по формуле (6,9). Для удобства помещаем матрицу B^{-1} под матрицей B.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix};$$

$$B^{-1} = \left[\begin{matrix} 1 \\ -\frac{1}{2}\cdot(1\cdot 0) = 0 \\ -\frac{1}{4}\left[1\cdot 2 + 0\cdot(-3)\right] = -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3}\left[1\cdot 3 + 0\cdot 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-1)\right] = -\frac{7}{61} \end{matrix}\right. \quad \text{I столбец}$$

$$\begin{matrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4}\left[0\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot(-3)\right] = \frac{3}{8} \\ -\frac{1}{3}\left[0\cdot 3 + \frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{3}{8}\cdot(-1)\right] = -\frac{5}{24} \end{matrix} \quad \text{II столбец}$$

$$\left.\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{3}\left[0\cdot 3 + 0\cdot 2 + \frac{1}{4}\cdot(-1)\right] = \frac{1}{12} & \frac{1}{3} \end{matrix}\right]; \quad \text{III и IV столбцы}$$

$$B^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{7}{6} & -\frac{5}{24} & \frac{1}{12} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Задача 6,4 (для самостоятельного решения). Найти обратные следующим:

$$1)\quad B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix};\qquad 2)\quad B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 5 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix};$$

$$3)\quad B=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 4 & 0 \\ -3 & -2 & -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

и вычисления проверить умножением B на B^{-1}.

Ответ.

$$1)\quad B^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{7}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{4} \end{bmatrix};$$

$$2)\quad B^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ +2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix};$$

$$3)\quad B^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{48} & -\frac{13}{24} & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{7}{40} & \frac{7}{20} & 0 & -\frac{1}{10} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

III. РАЗЛОЖЕНИЕ КВАДРАТНОЙ МАТРИЦЫ НА ПРОИЗВЕДЕНИЕ ДВУХ ТРЕУГОЛЬНЫХ

Основные сведения из теории

Многие методы решения системы линейных алгебраических уравнений основаны на представлении квадратной матрицы (не треугольной) в виде произведения двух треугольных матриц, из которых одна нижняя, а другая верхняя. Для любой квадратной матрицы

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{bmatrix}$$

такое представление является возможным и единственным при соблюдении следующих условий:

1) диагональные элементы одной из треугольных матриц отличны от нуля;

2) главные диагональные миноры отличны от нуля (так называются миноры определителя матрицы, у которых на главных диагоналях стоят диагональные элементы матрицы).

Такими минорами, например, будут:

$$a_{11}; \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

а также и сам определитель матрицы $|A|$.

Рассмотрим такое представление на примере квадратной матрицы четвертого порядка ($n = 4$). Пусть требуется матрицу

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

представить как произведение двух треугольных матриц (нижней и верхней)

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix} \text{ и } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ 0 & 0 & b_{33} & b_{34} \\ 0 & 0 & 0 & b_{44} \end{bmatrix},$$

т. е. предполагается, что имеет место равенство

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ 0 & 0 & b_{33} & b_{34} \\ 0 & 0 & 0 & b_{44} \end{bmatrix}. \tag{6,10}$$

Задача заключается в определении элементов c_{ij} $(i \geqslant j)$ и b_{ij} $(i \leqslant j)$. Таких неизвестных элементов у нас 20, так как $n^2 + n = 16 + 4 = 20$. Это следует из формулы для суммы членов арифметической прогрессии.

Перемножим матрицы в правой части равенства (6,10) по правилу умножения матриц и, пользуясь равенством

$$A = CB,$$

приравняем элементы матрицы CB соответствующим элементам матрицы A.

Получим такие равенства:

$$\left.\begin{aligned}
c_{11}b_{11} &= a_{11}; && (1)\\
c_{11}b_{12} &= a_{12}; && (2)\\
c_{11}b_{13} &= a_{13}; && (3)\\
c_{11}b_{14} &= a_{14}; && (4)\\
c_{21}b_{11} &= a_{21}; && (5)\\
c_{21}b_{12} + c_{22}b_{22} &= a_{22}; && (6)\\
c_{21}b_{13} + c_{22}b_{23} &= a_{23}; && (7)\\
c_{21}b_{14} + c_{22}b_{24} &= a_{24}; && (8)\\
c_{31}b_{11} &= a_{31}; && (9)\\
c_{31}b_{12} + c_{32}b_{22} &= a_{32}; && (10)\\
c_{31}b_{13} + c_{32}b_{23} + c_{33}b_{33} &= a_{33}; && (11)\\
c_{31}b_{14} + c_{32}b_{24} + c_{33}b_{34} &= a_{34}; && (12)\\
c_{41}b_{11} &= a_{41}; && (13)\\
c_{41}b_{12} + c_{42}b_{22} &= a_{42}; && (14)\\
c_{41}b_{13} + c_{42}b_{23} + c_{43}b_{33} &= a_{43}; && (15)\\
c_{41}b_{14} + c_{42}b_{24} + c_{43}b_{34} + c_{44}b_{44} &= a_{44}; && (16)
\end{aligned}\right\} \tag{6,11}$$

Мы получили 16 уравнений для определения 20 неизвестных. Поэтому четырем неизвестным можно приписать любые значения, причем для этого имеется бесконечное множество возможностей.

Пользуясь произвольностью выбора значений четырех неизвестных, положим, что каждый из четырех диагональных элементов в первой матрице правой части (6,10) равен единице:

$$c_{11} = 1; \; c_{22} = 1; \; c_{33} = 1; \; c_{44} = 1.$$

Тогда первые четыре уравнения в (6,11) позволят определить неизвестные элементы b_{11}, b_{12}, b_{13}, b_{14}, и окажется, что

$$b_{11}=a_{11};\ b_{12}=a_{12};\ b_{13}=a_{13};\ b_{14}=a_{14}. \tag{6,12}$$

Из уравнений (5), (9) и (13) с учетом, что $b_{11}=a_{11}$, получаем:

$$c_{21}=\frac{a_{21}}{a_{11}};\quad c_{31}=\frac{a_{31}}{a_{11}};\quad c_{41}=\frac{a_{41}}{a_{11}}. \tag{6,13}$$

Зная, что $c_{22}=1$, из уравнений (6), (7) и (8) находим

$$\begin{aligned} b_{22}&=a_{22}-c_{21}b_{12}=a_{22}-\sum_{k=1}^{1}c_{2k}b_{k2};\\ b_{23}&=a_{23}-c_{21}b_{13}=a_{23}-\sum_{k=1}^{1}c_{2k}b_{k3};\\ b_{24}&=a_{24}-c_{21}b_{14}=a_{24}-\sum_{k=1}^{1}c_{2k}b_{k4}. \end{aligned} \tag{6,14}$$

Здесь символ суммирования $\sum\limits_{k=1}^{1}$, собственно, ничего нового не дает. Мы его ввели для последующих обобщений — см. формулы (6,19) и (6,20).

Замечание. Как покажут дальнейшие вычисления, суммирование производится по индексу k, который изменяется от 1 до $i-1$, где i — первый индекс у определяемого элемента. В данном случае у определяемых элементов b_{22}, b_{23} и b_{24} первый индекс $i=2$.

Из уравнений (10) и (14) находим c_{32} и c_{42}:

$$\left.\begin{aligned} c_{32}&=\frac{a_{32}-c_{31}b_{12}}{b_{22}}=\frac{a_{32}-\sum\limits_{k=1}^{1}c_{3k}b_{k2}}{b_{22}};\\ c_{42}&=\frac{a_{42}-c_{41}b_{12}}{b_{22}}=\frac{a_{42}-\sum\limits_{k=1}^{1}c_{4k}b_{k2}}{b_{22}}. \end{aligned}\right\} \tag{6,15}$$

В символе $\sum\limits_{k=1}^{1}$ индекс суммирования k изменяется от 1 до 1, т. е. фактически принимает только одно значение, равное 1, причем 1, стоящая сверху, есть $2-1$, т. е. $j-1$, где j — второй индекс у определяемых элементов c_{32} и c_{42}. Как уже было замечено выше, введение такого символа в этом месте ничего нового не дает, но необходимо для ссылок при последующем обобщении этих формул.

Из уравнений (11) и (12) определим элементы b_{34} и b_{33} (учитывая, что $c_{33} = 1$):

$$\left.\begin{aligned} b_{33} &= a_{33} - c_{31}b_{13} - c_{32}b_{23} = a_{33} = \sum_{k=1}^{2} c_{3k}b_{k3}; \\ b_{34} &= a_{34} - c_{31}b_{14} - c_{32}b_{24} = a_{34} - \sum_{k=1}^{2} c_{3k}c_{k4}; \end{aligned}\right\} \qquad (6,16)$$

В этих формулах индекс суммирования k в символе $\sum\limits_{k=1}^{2}$ изменяется от 1 до 2, а стоящее сверху этого символа число $2 = 3 - 1$, т. е. $i - 1$, где i — первый индекс у определяемых элементов b_{33} и b_{34}.

Теперь из уравнения (15) найдем

$$c_{43} = \frac{a_{43} - c_{41}b_{13} - c_{42}b_{23}}{b_{33}} = \frac{a_{43} - \sum\limits_{k=1}^{2} c_{4k}b_{k3}}{b_{33}}. \qquad (6,17)$$

В символе $\sum\limits_{k=1}^{2}$ индекс суммирования k изменяется от 1 до 2, причем число 2, стоящее сверху, есть $j - 1$, где j — второй индекс у определяемого элемента c_{43}.

Наконец, из уравнения (16), учитывая, что $c_{44} = 1$, получаем

$$b_{44} = a_{44} - c_{41}b_{14} - c_{42}b_{24} - c_{43}b_{34} = a_{44} - \sum_{k=1}^{3} a_{4k}b_{k4}. \qquad (6,18)$$

Обратим опять внимание на то, что в символе $\sum\limits_{k=1}^{3}$ индекс суммирования k изменяется от 1 до 3, причем число 3, стоящее сверху, есть $4 - 1$, т. е. $i - 1$, где i — первый индекс у определяемого элемента b_{44}.

Заметим, что определение элементов b_{ij} и c_{ij} чередуется: по формулам (6,12) определяются элементы b_{1j} ($j = 1, 2, 3, 4$) затем по формулам (6,13) — элементы c_{i1} ($i = 2, 3, 4$). После этого опять определяются элементы b_{2j} ($j = 2, 3, 4$) по формулам (6,14), а вслед за этим по формулам (6,15) — элементы c_{i2} ($i = 3, 4$), потом — опять элементы b_{3j} ($j = 3, 4$) по формулам (6,16), а за ними — элементы c_{43} по формуле (6,17) и, наконец, определяется элемент b_{44} по формуле (6,18).

Если объединить формулы (6,14), (6,16) и (6,18) в одну, то окажется, что

$$b_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} c_{ik}b_{kj}; \quad (i \leqslant j) \qquad (6,19)$$

$$(i = 2, 3, 4; \ j = 2, 3, 4),$$

а объединение формул (6,15) и (6,17) дает

$$c_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} c_{ik} b_{kj}}{b_{jj}}; \quad (i > j) \tag{6,20}$$

$$(i = 3,\ 4;\ j = 2,\ 3).$$

Формулы (6,19) и (6,20) остаются верными для представления квадратных матриц любого порядка n в виде произведения двух треугольных матриц.

Легко показать схематически последовательность, в которой определяются элементы b_{ij} и c_{ij}: сначала заполняются строки, а потом — столбцы (см. табл. 1)

Таблица 1

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & 1 & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & 1 & 0 \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ 0 & 0 & b_{33} & b_{34} \\ 0 & 0 & 0 & b_{44} \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{lllll} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & \text{— первый шаг} \\ c_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & \text{— второй шаг} \\ c_{31} & c_{32} & b_{33} & b_{34} & \text{— третий шаг} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & b_{44} & \text{— четвертый шаг} \end{array}$$

$$b_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} c_{ik} b_{kj}; \quad (i \leqslant j)$$

$$c_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} c_{ik} b_{kj}}{b_{jj}}; \quad (i > j)$$

Представление квадратной матрицы в виде произведения нижней и верхней треугольных матриц производится так: для удобства вычислений записывается данная матрица A, а под ней — матрицы C и B, как указано в табл. 2, на стр. 156, причем вместо диагональных элементов матрицы C вписываются единицы.

Первая строка матрицы B и первый столбец матрицы C заполняются так, как указано в табл. 2:

1. На основании формул (6,12) в первую строку вписываются соответствующие элементы матрицы A, а элементы первого столбца матрицы C равны соответствующим элементам первого столбца матрицы A, разделенным на его первый элемент — формулы (6,13).

2. Элементы, стоящие *над ступенчатой линией*, находятся по формуле (6,19) так: берется соответствующий элемент матрицы A и из него вычитаются произведения элементов, стоящих в той же строке левее и в том же столбце выше, что и вычисляемый элемент, причем первый элемент строки умножается на первый элемент столбца, второй элемент строки — на второй элемент столбца и т. д.

Таблица 2

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}

$c_{11} = 1$	$b_{11} = a_{11}$	$b_{12} = a_{12}$	$b_{13} = a_{13}$	$b_{14} = a_{14}$
$c_{21} = \dfrac{a_{21}}{a_{11}}$	$c_{22} = 1$	b_{22}	b_{23}	b_{24}
$c_{31} = \dfrac{a_{31}}{a_{11}}$	c_{32}	$c_{33} = 1$	b_{33}	b_{34}
$c_{41} = \dfrac{a_{41}}{a_{11}}$	c_{42}	c_{43}	$c_{44} = 1$	b_{44}

3. При вычислении же элементов, расположенных *под ступенчатой линией*, поступают так же, как в п. 2, но полученный результат делят на диагональный элемент b_{jj} ($j = 2, 3$), стоящий в том же столбце (формула (6,20), что и определяемый элемент. При вычислениях с помощью арифмометра или настольных клавишных машин никаких записей вне таблицы производить не придется.

Этот алгоритм вычисления элементов двух треугольных матриц — нижней и верхней, на которые разлагается матрица A, легко распространяется на квадратные матрицы любого порядка, что будет показано на ряде примеров, помещенных ниже.

Задача 6,5.

Матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 4 & -3 \\ 2 & 4 & 5 & -2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

представить в виде произведения нижней и верхней треугольных матриц.

Решение. Используем только что указанный порядок действий и расположим действия, как в табл. 2, причем приведем подробно все выкладки в каждой клетке и будем придерживаться порядка заполнения клеток, указанного в табл. 1:

1	2	3	4
—1	2	4	—3
2	4	5	—2
4	3	2	1

1	1	2	3		4
$-\frac{1}{1}=-1$	1	$2-(-1)\times 2=4$	$4-(-1)\cdot 3=7$		$-3-(-1)\cdot 4=1$
$\frac{2}{1}=2$	$\frac{4-2\cdot 2}{4}=0$	1	$5-2\cdot 3-0\times 7=-1$		$-2-2\cdot 4-0\cdot 1=-10$
$\frac{4}{1}=4$	$\frac{3-4\cdot 2}{4}=-\frac{5}{4}$	$\frac{2-4\cdot 3-\left(-\frac{5}{4}\right)\cdot 7}{-1}=\frac{5}{4}$	1		$1-4\cdot 4-\left(-\frac{5}{4}\right)-\frac{5}{4}\cdot(-10)=-\frac{5}{4}$

Итак, нижняя треугольная матрица

$$C=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -\frac{5}{4} & \frac{5}{4} & 1 \end{bmatrix},$$

а верхняя треугольная матрица

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{4} \end{bmatrix}.$$

Легко проверить, что

$$CB=A.$$

Сделайте это.

	2	-3	4	5	-1
	1	3	-2	2	4
	5	2	-1	3	2
	-4	2	0	-5	0
	3	-1	1	2	4
1	2	-3	4	5	-1
$\frac{1}{2}$	1	$3-\frac{1}{2}\cdot(-3)=$ $=\frac{9}{2}$	$-2-\frac{1}{2}\cdot 4=-4$	$2-\frac{1}{2}\cdot 5=-\frac{1}{2}$	$4-\frac{1}{2}\cdot(-1)=\frac{9}{2}$
$\frac{5}{2}$	$\frac{2-\frac{5}{2}\cdot(-3)}{\frac{9}{2}}=\frac{19}{9}$	1	$-1-\frac{5}{2}\cdot 4-$ $-\frac{19}{9}(-4)=$ $=-\frac{23}{9}$	$3-\frac{5}{2}\cdot 5-\frac{19}{9}\times$ $\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{76}{9}$	$2-\frac{5}{2}\cdot(-1)-$ $-\frac{19}{9}\cdot\frac{9}{2}=-5$
-2	$\frac{2-(-2)\cdot(-3)}{\frac{9}{2}}=$ $=-\frac{8}{9}$	$\frac{0-(-2)\cdot 4-\left(-\frac{8}{9}\right)(-4)}{-\frac{23}{9}}=$ $=-\frac{40}{23}$	1	$-5-(-2)\times$ $\times 5-\left(-\frac{8}{9}\right)\times$ $\times\left(-\frac{1}{2}\right)-$ $-\left(-\frac{40}{23}\right)\times$ $\times\left(-\frac{76}{9}\right)=$ $=-\frac{233}{23}$	$0-(-2)\cdot(-1)-$ $-\left(-\frac{8}{9}\right)\cdot\left(\frac{9}{2}\right)-$ $-\left(-\frac{40}{23}\right)\cdot(-5)=$ $=-\frac{154}{23}$
$\frac{3}{2}$	$\frac{-1-\frac{3}{2}\cdot(-3)}{\frac{9}{2}}=$ $=\frac{7}{9}$	$\frac{1-\frac{3}{2}\cdot 4-\frac{7}{9}\cdot(-4)}{-\frac{23}{9}}=$ $=\frac{17}{23}$	$\left[2-\frac{3}{2}\cdot 5-\frac{7}{9}\times\right.$ $\times\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{17}{23}\times$ $\left.\times\left(-\frac{76}{9}\right)\right]:$ $:\left(-\frac{233}{23}\right)=-\frac{26}{233}$	1	$4-\frac{3}{2}\cdot(-1)-$ $-\frac{7}{9}\cdot\frac{9}{2}-\frac{17}{23}\times$ $\times(-5)-\left(\frac{26}{233}\right)\times$ $\times\left(-\frac{154}{23}\right)=\frac{1153}{233}$

Решение было проведено в простых, а не десятичных дробях, как это обыкновенно делается на практике, для облегчения последующей проверки.

Проведем вторично подробное решение еще одной аналогичной задачи для матрицы пятого порядка.

Задача 6,6.

Матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & 2 & 4 \\ 5 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & 0 & -5 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

представить в виде произведения нижней и верхней треугольных матриц.

Решение. Поступаем так же, как и в предыдущей задаче: искомые матрицы подпишем под матрицей A, неизвестные элементы определяем в порядке, указанном в табл. 1, а их числовые значения — по приведенному алгоритму (см. пояснения, данные к табл. 2). Решение проведено на стр. 158.

Таким образом, данная матрица равна произведению двух треугольных матриц:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{5}{2} & \frac{19}{9} & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -\frac{8}{9} & -\frac{40}{23} & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{7}{9} & \frac{17}{23} & -\frac{26}{233} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 & 5 & -1 \\ 0 & \frac{9}{2} & -4 & -\frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{23}{9} & -\frac{76}{9} & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{233}{23} & -\frac{154}{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1153}{233} \end{bmatrix}.$$

Задача 6,7 (для самостоятельного решения). Представить матрицы

$$1) \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -7 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}; \quad 2) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 5 & -1 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & 5 & 2 \\ -4 & 1 & 3 & -2 \end{bmatrix};$$

$$3) \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & 4 & -2 \\ 5 & -1 & 0 & -7 & 2 \\ 4 & -5 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

в виде произведения нижней и верхней треугольных матриц. Полученные ответы проверить умножением.

Ответ.

$$1)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2,5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0,1818 & 1 & 0 \\ 0,5 & -0,0909 & -0,6964 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & 0,5 & -7 \\ 0 & 0 & -5,0909 & -2,7274 \\ 0 & 0 & 0 & -0,5357 \end{bmatrix};$$

$$2)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -0,7272 & 1 & 0 \\ -4 & -0,8182 & 0,7183 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -11 & 2 & -17 \\ 0 & 0 & 6,4544 & 5,6376 \\ 0 & 0 & 0 & -3,9589 \end{bmatrix};$$

$$3)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1,25 & 0,5 & 1 & 0 & 0 \\ 1,0 & 2,5 & 0,8182 & 1 & 0 \\ 0,5 & -1,5 & 0,4545 & -7,1542 & 1 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 5 & -3,5 \\ 0 & 0 & -5,5 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1,7726 & -4,7500 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 31,2324 \end{bmatrix}.$$

Задача 6,8. При определении неизвестных элементов c_{ij} и b_{ij} мы приняли, что $c_{ii} = 1$ $(i = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$. Показать, что если взять $b_{ii} = 1$ $(i = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$, то неизвестные элементы b_{ij} и c_{ij} матриц, стоящих в правой части формулы (6,10), определятся по следующим формулам:

$$\left.\begin{aligned} & b_{11} = b_{22} = b_{33} = b_{44} = 1 \\ & c_{11} = a_{11};\ c_{21} = a_{21};\ c_{31} = a_{31},\ \ldots \\ & b_{12} = \frac{a_{12}}{a_{11}};\quad b_{13} = \frac{a_{13}}{a_{11}};\quad b_{14} = \frac{a_{14}}{a_{11}}; \\ & b_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} c_{ik} b_{kj}}{c_{ii}},\ \text{если } i < j \\ & c_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} c_{ik} b_{kj},\ \text{если } i \geqslant j \end{aligned}\right\}. \qquad (6,21)$$

Указание. В этом случае матрица A представляется в виде произведения таких двух треугольных матриц (нижней и верхней):

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 & \dots & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 & b_{12} & & \dots & b_{1n} \\ 0 & 1 & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & b_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Последовательность определения элементов c_{ij} $(i \geqslant j)$ и b_{ij} $(i<j)$ указывается такой схемой:

$$\begin{array}{l|l|l|l}
c_{11}=a_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14}\ \dots \\
 & \mathrm{II}\longrightarrow & & \\
\mathrm{I} & & & \\
c_{21}=a_{21} & c_{22} & b_{23} & b_{24}\ \dots \\
 & \mathrm{III} & \mathrm{IV}\longrightarrow & \\
c_{31}=a_{31} & c_{32} & c_{33} & b_{34}\ \dots \\
 & & \mathrm{V} & \mathrm{VI}\longrightarrow \\
c_{41}=41\ \downarrow & c_{42}\downarrow & c_{43}\downarrow & \text{и т. д.}
\end{array}$$

(Римские цифры над стрелками указывают последовательность, в которой должны определяться элементы).

Задача 6,9. Пользуясь формулами (6,21), представить матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

в виде произведения двух треугольных матриц нижней и верхней.

Решение. Поступим так же, как и в предыдущем случае. Напишем матрицу A, а под ней матрицы C и B — см. формулу (6,10), причем вместо диагональных элементов матрицы B впишем 1. В нижней таблице подробно выполнены все вычисления по формулам (6,21).

2	4	6	2
4	2	2	1
1	2	1	1
-3	1	1	2
2 | 1	2	3	1
4	$2-4\cdot 2= =-6$ | 1	$\frac{2-4\cdot 3}{-6}=\frac{5}{3}$	$\frac{1-4\cdot 1}{-6}=\frac{1}{2}$
1	$2-1\cdot 2=0$	$1-1\cdot 3=-3$ | 1	$\frac{1-1\cdot 1-0\cdot\frac{1}{2}}{-2}=0$
-3	$1-(-3)\cdot 2= =7$	$1-(-3)\cdot 3-7\times \times\frac{5}{3}=-\frac{5}{3}$	$2-(-3\cdot 1)-7\times \times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ | 1

Таким образом, матрица A представлена в виде произведения

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ -3 & 7 & -\frac{5}{3} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

На стр. 156 было указано правило преобразования матрицы в произведение двух треугольных для случая, когда $c_{ii}=1$. Выведите аналогичное правило для рассматриваемого случая, когда в матрице B диагональные элементы $b_{ii}=1$.

Задача 6,10. Полагая, что в формуле (6,10) элементы $b_{ii}=1$, представить указанные матрицы в виде произведения двух треугольных матриц:

$$1)\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 7 \\ 0 & 5 & 1 & -2 \\ 3 & -4 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix};\quad 2)\begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 & -3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ответ:

$$1)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & -16 & -\frac{34}{5} & 0 \\ 1 & -4 & -\frac{16}{5} & \frac{99}{17} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{66}{17} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$2)\ \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -7 & 0 \\ 1 & -1 & 5 & -\frac{1}{7} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Замечание. Во всех предыдущих вычислениях мы представляли матрицу в виде произведения двух треугольных: первый сомножитель был нижней, а второй — верхней треугольной матрицей. Однако такой порядок сомножителей не является обязательным и матрицу можно разложить на произведение двух треугольных матриц так, чтобы первый сомножитель был верхней, а второй — нижней треугольной матрицей. Относящиеся к этому случаю формулы мы указывать не будем.

IV. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ ПРИ ПОМОЩИ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЕЕ В ВИДЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ДВУХ ТРЕУГОЛЬНЫХ МАТРИЦ

Задача 6,11. Доказать, что если матрица A представлена в виде произведения двух матриц C и B, т. е.

$$A = CB, \tag{1}$$

то матрица A^{-1}, обратная матрице A, определяется по формуле

$$A^{-1} = B^{-1}C^{-1}.$$

Доказательство. Обе части равенства (1) умножим слева на матрицу C^{-1}, обратную матрице C

$$C^{-1}A = C^{-1}CB, \tag{2}$$

но произведение $C^{-1}C$ есть единичная матрица E, т. е. $C^{-1}C = E$, а потому равенство (2) перепишется так:

$$C^{-1}A = EB = B, \tag{3}$$

так как произведение матрицы на единичную матрицу в любом порядке оставляет эту матрицу без изменения. Теперь обе части равенства (3) умножим слева на матрицу B^{-1}, обратную матрице B, и получим

$$B^{-1}C^{-1}A = B^{-1}B = E.$$

Таким образом, произведение матриц

$$B^{-1}C^{-1}A = E. \tag{4}$$

Перепишем (4) в виде

$$(B^{-1}C^{-1})A = E.$$

Усматривая, что произведение матриц $(B^{-1}C^{-1})$ и A есть единичная матрица E, заключаем, что матрица $B^{-1}C^{-1}$ является обратной для матрицы A, т. е. матрица $B^{-1}C^{-1}$ есть A^{-1}. Итак,

$$A^{-1} = B^{-1}C^{-1}, \tag{6,22}$$

что и требовалось доказать.

Заключение. Матрица, обратная произведению двух матриц, равна произведению обратных матриц сомножителей, взятых в обратном порядке.

Можно доказать, что и вообще, если матрица A равна произведению n матриц

$$A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \ \ldots \ A_n,$$

то

$$A^{-1} = A_n^{-1} \ \ldots \ A_3^{-1}A_2^{-1}A_1^{-1}$$

(доказательство проведите самостоятельно).

Читателю уже известно, что любая матрица A, удовлетворяющая условиям, указанным на стр. 151, может быть представлена в виде произведения двух треугольных матриц C и B, а обращение треугольной матрицы, как видно из предыдущего, не представляет больших затруднений (задачи 6,1—6,4).

Таким образом, для обращения матрицы A надо: 1) представить ее в виде произведения двух треугольных матриц C и B (нижней и верхней, или верхней и нижней), 2) определить матрицы, обратные этим треугольным, и 3) полученные в п. 2 матрицы перемножить в обратном порядке, т. е. если

$$A = CB,$$

то

$$A^{-1} = B^{-1}C^{-1}. \tag{6,22}$$

Формула (6,22) дает еще один способ получения обратной матрицы.

Итак, задачу определения обратной матрицы при помощи использования двух треугольных можно считать решенной. Однако можно найти матрицу, обратную данной, минуя определение матриц, обратных полученным треугольным.

V. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ ДЛЯ ДАННОЙ БЕЗ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МАТРИЦ, ОБРАТНЫХ ТРЕУГОЛЬНЫМ

Покажем, что обращение матрицы можно произвести и без использования формулы (6,22), т. е. минуя определение матриц B^{-1} и C^{-1}, обратных тем треугольным, на которые разложена матрица A.

Из формулы (6,22) умножением ее обеих частей сначала слева на матрицу B, а потом справа на матрицу C получаем

$$BA^{-1} = BB^{-1}C^{-1}.$$

Но произведение BB^{-1} матрицы B на обратную ей матрицу B^{-1} есть единичная матрица E, потому

$$BA^{-1} = EC^{-1}, \qquad (6,23)$$

а произведение EC^{-1} единичной матрицы E на матрицу C^{-1} оставляет эту последнюю без изменений: $EC^{-1} = C^{-1}$. Поэтому (6,23) перепишется так:

$$BA^{-1} = C^{-1}. \qquad (6.24)$$

Аналогично легко показать, что

$$A^{-1}C = B^{-1}. \qquad (6,25)$$

Введем такие обозначения:

1) элементы матрицы A будем обозначать через a_{ij}, а элементы ей обратной матрицы — через α_{ij};

2) элементы треугольных матриц B и C обозначим через b_{ij} и c_{ij} соответственно, а элементы им обратных матриц — через β_{ij} и γ_{ij}.

В развернутом виде формула (6,24) запишется так, причем мы рассмотрим только тот случай, когда диагональные элементы матрицы B равны 1 (см. задачу 6,8 и указание к ней);

$$BA^{-1} = C^{-1}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} & & \dots & b_{1n} \\ 0 & 1 & b_{23} & & \dots & b_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & b_{34} & \dots & b_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}}_{|B|} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \dots & \alpha_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}}_{|A^{-1}|} =$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} \gamma_{11} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \gamma_{n3} & & \dots & \gamma_{nn} \end{bmatrix}}_{|C^{-1}|}$$

Из этой формулы легко определятся те элементы α_{ij}, которые стоят в треугольнике над главной диагональю (для них первый индекс i меньше второго индекса $j: i < j$). Для этого надо использовать правило умножения матриц и условие равенства двух матриц. Например, умножая элементы первой строки матрицы B на соответствующие элементы второго столбца матрицы A^{-1}и приравнивая сумму произведений нулю — элементу γ_{12} в матрице C^{-1}, получим

$$\alpha_{12} + b_{12}\alpha_{22} + b_{13}\alpha_{32} + b_{14}\alpha_{42} + \ldots + b_{1n}\alpha_{n2} = 0$$

или

$$\alpha_{12} + \sum_{k=2}^{n} b_{1k}\alpha_{k2} = 0,$$

откуда

$$\alpha_{12} = -\sum_{k=2}^{n} b_{1k}\alpha_{k2}.$$

Здесь нижний индекс суммирования $k = 2$ есть первый индекс 1 определяемого элемента α_{12}, сложенный с 1, т. е. $2 = 1 + 1$. Легко установить и общую формулу для определения элементов α_{ij} при $i < j$

$$\alpha_{ij} = -\sum_{k=i+1}^{n} b_{ik}\alpha_{kj}. \quad (i < j). \tag{6,26}$$

Для определения диагональных элементов α_{ii} и элементов α_{ij}, стоящих под главной диагональю ($i > j$), воспользуемся формулой (6,25)

$$A^{-1}C = B^{-1}.$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \ldots & \alpha_{1n} \\ & & \alpha_{23} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{11} & & \alpha_{33} & \ldots & \alpha_{3n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & & \ldots & \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \ldots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}}_{|A^{-1}|} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \ldots & c_{nn} \end{bmatrix}}_{|C|} =$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \beta_{12} & \beta_{13} & \ldots & \beta_{1n} \\ 0 & 1 & \beta_{23} & \ldots & \beta_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & \beta_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}}_{|B^{-1}|}.$$

Определяемые из этой формулы элементы стоят в треугольнике первого сомножителя. Напомним, что если диагональные элементы треугольной матрицы равны 1, то в обратной для нее матрице диагональные элементы также равны 1 — см. формулу (6,8).

Например, элемент α_{nn} определится из произведения элементов последней строки первого сомножителя на соответствующие элементы последнего столбца второго, если сумму этих произведений приравнять на основании условия равенства двух матриц элементу β_{nn} матрицы B^{-1}:

$$\alpha_{n1}\cdot 0+\alpha_{n2}\cdot 0+\cdots+\alpha_{nn}\cdot c_{nn}=\beta_{nn}=1;$$

$$\alpha_{nn}=\frac{\beta_{nn}}{c_{nn}}=\frac{1}{c_{nn}}.$$

Рассмотрим вычисление какого-либо другого диагонального элемента, например α_{33};

$$\alpha_{31}\cdot 0+\alpha_{32}\cdot 0+\alpha_{33}\cdot c_{33}+\alpha_{34}\cdot c_{43}+\alpha_{35}c_{53}+\cdots+\alpha_{3n}c_{n3}=1;$$

$$\alpha_{33}=\frac{1}{c_{33}}\,[1-(\alpha_{34}c_{43}+\alpha_{35}c_{53}+\cdots+\alpha_{3n}c_{n3})];$$

$$\alpha_{33}=\frac{1}{c_{33}}\left[1-\sum_{k=4}^{n}\alpha_{3k}\cdot c_{k3}\right].$$

(здесь нижний индекс суммирования $4=3+1$, т. е. он равен индексу i определяемого элемента плюс 1) и вообще

$$\alpha_{ii}=\frac{1}{c_{ii}}\left[1-\sum_{k=i+1}^{n}\alpha_{ik}c_{ki}\right], \tag{6,27}$$

а элемент α_{ij}, стоящий под главной диагональю ($i>j$), находят, как легко проверить, по формуле

$$\alpha_{ij}=-\frac{\sum\limits_{k=j+1}^{n}\alpha_{ik}c_{kj}}{c_{jj}}\cdot(i>j) \tag{6,28}$$

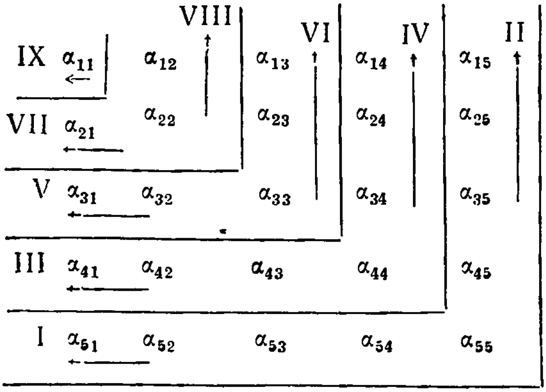
Из формул (6,26) и (6,27) видно, что элементы α_{ij} обратной матрицы A^{-1} выражаются через элементы b_{ij} и c_{ij} тех треугольных матриц, в виде произведения которых представлена данная матрица A, а элементы матриц, обратных треугольным, определять нет надобности. Для удобства выпишем формулы (6,26), (6,27) и (6,28), по которым определяются элементы обратной матрицы:

$$\alpha_{ij}=-\sum_{k=i+1}^{n}b_{ik}\alpha_{kj};\ (i<j)$$

$$\alpha_{ii}=\frac{1}{c_{ii}}\left[1-\sum_{k=i+1}^{n}\alpha_{ik}c_{ki}\right];\ (i=j)$$

$$\alpha_{ij}=-\frac{\sum\limits_{k=j+1}^{n}\alpha_{ik}c_{kj}}{c_{jj}};\ (i>j).$$

В заключение укажем последовательность, в которой следует вести вычисление элементов α_{ij}, так как между ними существует зависимость, определяемая формулами (6,26) — (6,27), причем эту последовательность укажем применительно к матрице пятого порядка



Из этой схемы видно, что сначала следует определить элементы последней строки, начиная с последнего α_{55}, а затем элементы последнего столбца, начиная тоже с последнего, затем — элементы предпоследней строки и предпоследнего столбца, опять-таки начиная с последнего и т. д. Стрелки и римские цифры, проставленные на этой схеме, указывают необходимую последовательность.

На практике обратную матрицу получают, пользуясь такой схемой:

1. Выписывают данную матрицу.

2. Под ней образуют две треугольные матрицы, произведение которых равно данной (см. предыдущие задачи).

3. Под этими матрицами по формулам (6,26) — (6,28) получают обратную матрицу данной, соблюдая последовательность определения элементов по указанной схеме.

Этот способ обращения матриц достаточно компактен и при использовании клавишных вычислительных машин не требует промежуточных записей вне таблиц, так как эти машины позволяют вести «умножение с накоплением». Ниже эта схема применяется при решении ряда примеров.

Задача 6,12. Обратить матрицу

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 6 & 8 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Решение

	2	7	1	4	
	5	2	0	-1	
	3	4	2	1	$[a_{ij}]$
	6	8	4	3	
	2 ; 1	$\frac{7}{2}$	$\frac{1}{2}$	2	
	5	$-\frac{31}{2}$; 1	$\frac{5}{31}$	$\frac{22}{31}$	$[b_{ij}]$
$[c_{ij}]$	3	$-\frac{13}{2}$	$\frac{48}{31}$; 1	$-\frac{1}{4}$	
	6	-13	$\frac{96}{31}$	1 ; 1	
	$-\frac{1}{12}$	$\frac{5}{24}$	$-\frac{23}{24}$	$\frac{1}{2}$	
	$\frac{5}{24}$	$-\frac{1}{48}$	$\frac{67}{48}$	$-\frac{3}{4}$	$[\alpha_{ij}]$
	$-\frac{7}{24}$	$-\frac{13}{48}$	$\frac{7}{48}$	$\frac{1}{4}$	
	0	0	-2	1	

Ниже приведены подробные вычисления элементов α_{ij} обратной матрицы.

$$\alpha_{44} = \frac{1}{c_{44}} = \frac{1}{1} = 1;$$

$$\alpha_{43} = -\frac{\alpha_{44}c_{43}}{c_{33}} = -\frac{1 \cdot \frac{96}{31}}{\frac{48}{31}} = -2;$$

$$\alpha_{42} = -\frac{\sum\limits_{k=3}^{4} \alpha_{4k} \cdot c_{k2}}{c_{22}} = -\frac{\alpha_{43}c_{32} + \alpha_{44}c_{42}}{c_{22}} =$$

$$= -\frac{-2\left(-\frac{13}{2}\right) + 1\,(-13)}{\frac{31}{2}} = -\frac{13-13}{\frac{31}{2}} = 0;$$

$$\alpha_{41} = -\frac{\sum\limits_{k=2}^{4} \alpha_{4k} c_{k1}}{c_{11}} = -\frac{\alpha_{42}c_{21} + \alpha_{43}c_{31} + \alpha_{44}c_{41}}{c_{11}} =$$

$$= \frac{0 \cdot 5 + (-2) \cdot 3 + 1 \cdot 6}{2} = 0;$$

$$\alpha_{34} = -b_{34} \cdot \alpha_{44} = -\left(-\frac{1}{4}\right) \cdot 1 = \frac{1}{4};$$

$$\alpha_{24} = -\sum_{k=3}^{4} b_{2k}\alpha_{k4} = -(b_{23}\alpha_{34} + b_{24}\alpha_{44}) =$$

$$= -\left(\frac{5}{31} \cdot \frac{1}{4} + \frac{22}{31} \cdot 1\right) = -\frac{93}{124} = -\frac{3}{4};$$

$$\alpha_{14} = -\sum_{k=2}^{4} b_{1k}\alpha_{k4} = -(b_{12}\alpha_{24} + b_{13}\alpha_{34} + b_{14}\alpha_{44}) =$$

$$= -\left[\frac{7}{2} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot 1\right] = \frac{1}{2};$$

$$\alpha_{33} = \frac{1}{c_{33}}\left[1 - \sum_{k=4}^{4} \alpha_{34}c_{43}\right] = \frac{1}{\frac{48}{31}} \cdot \left(1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{96}{31}\right) = \frac{7}{48};$$

$$\alpha_{32} = -\frac{\sum\limits_{k=3}^{4} \alpha_{3k} \cdot c_{k2}}{c_{22}} = -\frac{\alpha_{33}c_{32} + \alpha_{34}c_{42}}{c_{22}} =$$

$$= -\frac{\frac{7}{48}\left(-\frac{13}{2}\right) + \frac{1}{4}(-13)}{-\frac{31}{2}} = -\frac{13}{48};$$

$$\alpha_{31} = -\frac{\sum\limits_{k=?}^{4} \alpha_{3k} c_{k1}}{c_{11}} = -\frac{\alpha_{32}c_{21} + \alpha_{33}c_{31} + \alpha_{34}c_{41}}{c_{11}} =$$

$$= -\frac{-\frac{13}{48} \cdot 5 + \frac{7}{48} \cdot 3 + \frac{1}{4} \cdot 6}{2} = -\frac{7}{24};$$

$$\alpha_{23} = -\sum_{k=3}^{4} b_{2k}\alpha_{k3} = -(b_{23}\alpha_{33} + b_{24}\alpha_{43}) =$$

$$= -\left[\frac{5}{31} \cdot \frac{7}{48} + \frac{22}{31}(-2)\right] = \frac{67}{48};$$

$$\alpha_{13} = -\sum_{k=2}^{4} b_{1k}\alpha_{k3} = -(b_{12}\alpha_{23} + b_{13}\alpha_{33} + b_{14}\alpha_{43}) =$$

$$= -\left(\frac{7}{2} \cdot \frac{67}{48} + \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{48} + 2\,(-2)\right) = -\frac{23}{24};$$

$$\alpha_{22} = \frac{1}{c_{22}}\left[1 - \sum_{k=3}^{4} \alpha_{2k} c_{k2}\right] = \frac{1}{c_{22}}(1 - \alpha_{23}c_{32} - \alpha_{24}c_{42}) =$$

$$= -\frac{1}{\frac{31}{2}}\left[1 - \frac{67}{48}\cdot\left(-\frac{13}{2}\right) - \left(-\frac{3}{4}\right)(-13)\right] = -\frac{1}{48};$$

$$\alpha_{21} = \frac{-\sum\limits_{k=2}^{4} \alpha_{2k} c_{k1}}{c_{11}} = -\frac{\alpha_{22}c_{21} + \alpha_{23}c_{31} + \alpha_{24}c_{41}}{c_{11}} =$$

$$= -\frac{-\frac{1}{48}\cdot 5 + \frac{67}{48}\cdot 3 + \left(-\frac{3}{4}\right)6}{2} = \frac{5}{24};$$

$$\alpha_{12} = -\sum_{k=2}^{4} b_{1k}\alpha_{k2} = -(b_{12}\alpha_{22} + b_{13}\alpha_{32} + b_{14}\alpha_{42}) =$$

$$= -\left[\frac{7}{2}\left(-\frac{1}{48}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{13}{48}\right) + 2\cdot 0\right] = \frac{5}{24};$$

$$\alpha_{11} = \frac{1}{c_{11}}\left[1 - \sum_{k=2}^{4} \alpha_{1k} c_{k1}\right] = \frac{1}{c_{11}}[1 - \alpha_{12}c_{21} - \alpha_{13}c_{31} - \alpha_{14}c_{41}] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 - \frac{5}{24}\cdot 5 - \left(-\frac{23}{24}\right)\cdot 3 - \frac{1}{2}\cdot 6\right] = -\frac{1}{12}.$$

Итак, обратная матрица

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{12} & \frac{5}{24} & -\frac{23}{24} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{24} & -\frac{1}{48} & \frac{67}{48} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{7}{24} & -\frac{13}{48} & \frac{7}{48} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{48}\begin{bmatrix} -4 & 10 & -46 & 24 \\ 10 & -1 & 67 & -36 \\ -14 & -13 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & -96 & 48 \end{bmatrix}.$$

Проверка. Должно быть $A^{-1}\cdot A = E$. Действительно,

$$\frac{1}{48}\begin{bmatrix} -4 & 10 & -46 & 24 \\ 10 & -1 & 67 & -36 \\ -14 & -13 & 7 & 12 \\ 0 & 9 & -96 & 48 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 6 & 8 & 4 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{48}\begin{bmatrix} 48 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 48 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 48 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 48 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E.$$

Повторяем, что все вычисления были выполнены в простых дробях для более простой проверки произведенных действий. На практике вычисления обыкновенно ведутся в десятичных дробях, но вносимые округления влекут за собой неизбежные погрешности.

Задача 6,13 (для самостоятельного решения). Пользуясь формулами (6,26) — (6,28) и указанной схемой получения обратной матрицы, обратить следующие матрицы:

$$1)\ A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 4 & -2\\ 1 & 0 & 5 & -3\\ 4 & 2 & 1 & 1\\ 3 & 4 & -2 & 5\end{bmatrix};\quad 2)\ A=\begin{bmatrix}0,888 & 1,059 & 0,667\\ 1,059 & 1,512 & 1,031\\ 0,667 & 1,031 & 0,837\end{bmatrix}.$$

Вычисления производить в десятичных дробях с помощью арифмометра или клавишной вычислительной машины. Полученные результаты проверить: произведение $A^{-1}\cdot A$ должно быть равно единичной матрице

$$A^{-1}\cdot A=E.$$

Ответ. 1) Для контроля

$$C=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -1,5 & 0 & 0\\ 4 & -4 & -15 & 0\\ 3 & -0,5 & -9 & 2,4667\end{bmatrix};$$

$$B=\begin{bmatrix}1 & 1,5 & 2 & -1\\ 0 & 1 & -2 & 1,3333\\ 0 & 0 & 1 & -0,6889\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix};$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}-0,0538 & -0,1168 & +0,4414 & -0,1804\\ +0,4052 & -0,2884 & -0,1441 & 0,0181\\ -0,2163 & +0,5314 & -0,2342 & 0,2793\\ -0,3784 & +0,5134 & -0,2432 & 0,4054\end{bmatrix};$$

2)
$$A^{-1}=\begin{bmatrix}8,08977 & -7,93495 & 3,32745\\ -7,93495 & 11,91472 & -8,35304\\ 3,32745 & -8,35304 & 8,83220\end{bmatrix}.$$