СЕДЬМОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание. Матричная запись системы линейных алгебраических уравнений. Численное решение линейных алгебраических уравнений способом исключения.

СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Система n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными имеет такой вид:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = d_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = d_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = d_3; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = d_n. \end{array}\right\} \quad (7,1)$$

Мы будем рассматривать только такие системы линейных алгебраических уравнений, у которых число уравнений равно числу неизвестных. В системе уравнений (7,1) неизвестными являются $x_1, x_2, x_3, \dots x_n$, а коэффициенты a_{ij} ($i, j = 1, 2, 3, \dots n$) при неизвестных и свободные члены d_i ($i = 1, 2, 3, \dots n$) — действительные числа.

Составим матрицу A из коэффициентов a_{ij} при неизвестных

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

матрицу-столбец x из неизвестных

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

и матрицу-столбец d из свободных членов

$$d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}.$$

Учитывая правило умножения матриц и условие равенства двух матриц, систему (7,1) можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \dots a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \dots a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} \tag{7,2}$$

или, учитывая введенные обозначения, всю систему уравнений (7,2) можно записать компактно в виде одного матричного уравнения

$$Ax = d. \tag{7,3}$$

Такая запись большого числа линейных уравнений в виде одного уравнения является одним из достоинств матричных обозначений.

На предыдущем практическом занятии мы уделили большое внимание вычислению обратной матрицы. Покажем теперь применение этой операции для решения системы линейных алгебраических уравнений.

Если матрица A — неособенная, то она имеет обратную матрицу A^{-1}. Умножим слева обе части уравнения (7,3) на A^{-1} и, заметив, что $A^{-1} \cdot A = E$ — единичная матрица, получим столбец неизвестных x из равенства

$$x = A^{-1} d. \tag{7,4}$$

В этой формуле x может быть не только матрицей-столбцом, но и матрицей размера $n \times m$. В этом случае и матрица d составленная из свободных членов, должна тоже иметь размер $n \times m$. Такой случай имеет место, например, в задаче (7,3).

Таким образом, нам стоит только определить элементы α_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$) обратной матрицы A^{-1}, и задачу определения неизвестных систем (7,1) можно считать решенной. Несколько таких упражнений мы выполним в начале этого практического занятия.

Но здесь же следует заметить, что в случае большого числа n неизвестных вычисление элементов обратной матрицы становится громоздким и затруднительным. Поэтому формула (7,4) имеет больше теоретическое значение, чем практическое, так как по сравнению с формулами Крамера для решения системы линейных алгебраических уравнений она никаких преимуществ в вычислениях не дает.

Эта формула оказывается безусловно полезной тогда, когда рассматриваются такие системы уравнений, у которых матрица коэффициентов при неизвестных одна и та же (такие системы уравнений встречаются, например, в строительной механике). Вычисление обратной матрицы в таком случае приносит большую экономию в вычислительной работе (см., например, задачу (7,3).

Это практическое занятие проведем в таком порядке: сначала будем решать системы уравнений с небольшим числом неизвестных (два, три) по формуле (7,4) (задачи 7,1—7,7), а потом укажем удобную компактную схему решения системы (7,1) методом исключения (алгоритм Гаусса), которому дадим матричную трактовку. Теория этого метода, формулы, сюда относящиеся и схема его применения указаны после задачи 7,7.

Задача 7,1. Записать систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 9; \\ 3x_1 - 4x_2 &= 5 \end{aligned}\right\}$$

в виде одного матричного уравнения и решить ее по формуле (7,4).

Решение. Систему представим в виде

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Здесь матрица

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

Найдем обратную ей матрицу по формуле (5,2), которая в развернутом виде выглядит так:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \ldots & A_{n2} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & \ldots & A_{n3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \ldots & A_{nn} \end{bmatrix}, \qquad (7,5)$$

где $|A|$ — определитель матрицы A, а элементы A_{ij} — алгебраические дополнения ее элементов a_{ij}, причем матрица в правой части формулы (7,5) есть союзная матрица $\tilde{A}$ для A. Но здесь еще раз подчеркнем, что когда $n > 3$, то формулой (7,5) для обращения матрицы обыкновенно не пользуются, а применяют методы, рассмотренные на пятом и шестом практических занятиях.

Воспользуемся формулой (5,2) для определения обратной матрицы

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -17;$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot (-4) = -4; \; A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 3 = -3;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 3 = -3; \;\; A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot (2) = 2.$$

Составим матрицу, союзную матрице A

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{21}\\ A_{12} & A_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & -3\\ -3 & 2\end{bmatrix},$$

и поэтому по формуле (5,2)

$$A^{-1}=\frac{1}{-17}\begin{bmatrix}-4 & -3\\ -3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{4}{17} & \frac{3}{17}\\ \frac{3}{17} & -\frac{2}{17}\end{bmatrix}.$$

Теперь по формуле (7,4)

$$x=A^{-1}d.$$

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{4}{17} & \frac{3}{17}\\ \frac{3}{17} & \frac{-2}{17}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}9\\ 5\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{51}{17}\\ \frac{17}{17}\end{bmatrix};$$

$$x_1=\frac{51}{17}=3;\quad x_2=\frac{17}{17}=1.$$

Задача 7,2 (для самостоятельного решения). Записать систему уравнений

$$\left.\begin{aligned}5x_1+x_2&=7;\\ x_1-3x_2&=8\end{aligned}\right\}$$

в виде одного матричного уравнения и решить ее по формуле (7,4)

Указание. Обратная матрица по формуле (5,2)

$$A^{-1}=\frac{1}{16}\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & -5\end{bmatrix}.$$

Ответ. $x_1=\frac{29}{16}$; $x_2=-\frac{33}{16}$.

Задача 7,3. Решить системы уравнений:

$$1)\ \left.\begin{aligned}3x_1-2x_2&=2;\\ 4x_1-x_2&=1;\end{aligned}\right\}\qquad 2)\ \left.\begin{aligned}3x_3-2x_4&=3;\\ 4x_3-x_4&=4;\end{aligned}\right\}$$

$$3)\ \left.\begin{aligned}3x_5-2x_6&=5;\\ 4x_5-x_6&=7.\end{aligned}\right\}$$

Решение. Матрица A коэффициентов при неизвестных во всех трех системах одна и та же:

$$A=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 4 & -1\end{bmatrix}.$$

Это тот случай, когда применение формулы (7,4) является выгодным, т. е. выгодно решить все три системы путем отыскания обратной матрицы A^{-1} для матрицы A. Запищем все три системы в виде одного матричного уравнения

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & x_3 & x_5 \\ x_2 & x_4 & x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

(отметим, что матрица, составленная из неизвестных, должна иметь тот же размер, что и матрица, составленная из свободных членов). Легко видеть, что для матрицы A обратная матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}.$$

а потому по формуле (7,4)

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_3 & x_5 \\ x_2 & x_4 & x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}.$$

Выполняя умножения в правой части равенства, получим

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_3 & x_5 \\ x_2 & x_4 & x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{9}{5} \\ -1 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

откуда

$$x_1 = 0; \quad x_2 = -1.$$
$$x_3 = 1; \quad x_4 = 0.$$
$$x_5 = \frac{9}{5}; \quad x_6 = \frac{1}{5}.$$

Решение этих трех систем уравнений по формуле (7,4) путем отыскания обратной матрицы потребовало значительно меньше труда, чем решение их по известным читателю формулам Крамера.

Задача 7,4 (для самостоятельного решения). Решить системы уравнений:

$$1)\ \left.\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 7; \\ 3x_1 - 2x_2 &= 1; \end{aligned}\right\} \qquad 2)\ \left.\begin{aligned} 2x_3 + 3x_4 &= 1; \\ 3x_3 - 2x_4 &= 0; \end{aligned}\right\}$$

$$3)\ \left.\begin{aligned} 2x_5 + 3x_6 &= 9; \\ 3x_5 - 2x_6 &= 3; \end{aligned}\right\} \qquad 4)\ \left.\begin{aligned} 2x_7 + 3x_8 &= 1; \\ 3x_7 - 2x_8 &= 3. \end{aligned}\right\}$$

Указание. В матричной записи все четыре системы запишутся так (проверьте, используя правило умножения матриц и условие их равенства):

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & x_3 & x_5 & x_7 \\ x_2 & x_4 & x_6 & x_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 9 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Для матрицы

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 3 & -2\end{bmatrix}$$

обратная матрица

$$A^{-1}=-\frac{1}{13}\begin{bmatrix}-2 & -3\\ -3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{13} & \frac{3}{13}\\ \frac{3}{13} & -\frac{2}{13}\end{bmatrix}.$$

Ответ.

$$x_1=\frac{17}{13};\qquad x_2=\frac{19}{13};$$
$$x_3=\frac{2}{13};\qquad x_4=\frac{3}{13};$$
$$x_5=\frac{27}{13};\qquad x_6=\frac{21}{13};$$
$$x_7=\frac{11}{13};\qquad x_8=-\frac{3}{13}.$$

Задача 7,5. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned}2x+y-2z&=5;\\ 3x-2y+3z&=4;\\ 2x-3y+5z&=1,\end{aligned}\right\}$$

пользуясь формулой (7,4).

Решение. Запишем систему в виде одного матричног нения

$$\begin{bmatrix}2 & 1 & -2\\ 3 & -2 & 3\\ 2 & -3 & 5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\ 4\\ 1\end{bmatrix}$$

Здесь матрица коэффициентов

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & -2\\ 3 & -2 & 3\\ 2 & -3 & 5\end{bmatrix},$$

а неизвестные x, y и z найдутся из формулы

$$\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=A^{-1}\begin{bmatrix}5\\ 4\\ 1\end{bmatrix}.$$

Обратим матрицу A, для чего применим формулу (5,7)

$$A=\left[\begin{array}{cc|c}2 & 1 & -2\\ 3 & -2 & 3\\ \hline 2 & -3 & 5\end{array}\right].$$

Здесь

$$\alpha_{11}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & -2\end{bmatrix};\quad \alpha_{12}=\begin{bmatrix}-2\\ 3\end{bmatrix};\quad \alpha_{21}=\begin{bmatrix}2; & 3\end{bmatrix}\quad \alpha_{22}=5.$$

1) $\overset{-1}{\alpha_{11}}$ находим непосредствено

$$\overset{-1}{\alpha_{11}}=-\frac{1}{7}\begin{bmatrix}-2 & -1\\ -3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{7} & \frac{1}{7}\\ \frac{3}{7} & -\frac{2}{7}\end{bmatrix};$$

2) $$\beta=\alpha_{22}-\alpha_{21}\overset{-1}{\alpha_{11}}\alpha_{12}=5-\begin{bmatrix}2; & -3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{2}{7} & \frac{1}{7}\\ \frac{3}{7} & -\frac{2}{7}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-2\\ 3\end{bmatrix}=$$

$$=5-\begin{bmatrix}-\frac{5}{7}; & \frac{8}{7}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-2\\ 3\end{bmatrix}=5-\left(+\frac{34}{7}\right)=\frac{1}{7}.$$

Итак, $\beta=\frac{1}{7};\quad \beta^{-1}=7.$

3) $\gamma=\beta^{-1}\alpha_{21}=7[2;\ -3]=[14;\ -21].$

4) $$\overset{-1}{\alpha_{11}}\alpha_{12}\gamma\overset{-1}{\alpha_{11}}=\begin{bmatrix}\frac{2}{7} & \frac{1}{7}\\ \frac{3}{7} & -\frac{2}{7}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-2\\ 3\end{bmatrix}\cdot[14;\ -21]\cdot\begin{bmatrix}\frac{2}{7} & \frac{1}{7}\\ \frac{3}{7} & -\frac{2}{7}\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}-\frac{1}{7}\\ -\frac{12}{7}\end{bmatrix}\cdot[14;\ -21]\cdot\begin{bmatrix}\frac{2}{7} & \frac{1}{7}\\ \frac{3}{7} & -\frac{2}{7}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 3\\ -24 & 36\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{2}{7} & \frac{1}{7}\\ \frac{3}{7} & -\frac{2}{7}\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{5}{7} & -\frac{8}{7}\\ \frac{60}{7} & -\frac{96}{7}\end{bmatrix};$$

5) $$\overset{-1}{\alpha_{11}}+\overset{-1}{\alpha_{11}}\alpha_{12}\gamma\overset{-1}{\alpha_{11}}=\begin{bmatrix}\frac{2}{7} & \frac{1}{7}\\ \frac{3}{7} & -\frac{2}{7}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{5}{7} & -\frac{8}{7}\\ \frac{60}{7} & -\frac{96}{7}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 9 & -14\end{bmatrix};$$

6) $$-\gamma\overset{-1}{\alpha_{11}}=-[14;\ -21]\cdot\begin{bmatrix}\frac{2}{7} & \frac{1}{7}\\ \frac{3}{7} & -\frac{2}{7}\end{bmatrix}=-[-5;\ 8]=[5;\ -8];$$

7) $$-\alpha_{11}\alpha_{12}\beta^{-1}=-\begin{bmatrix}\frac{2}{7} & \frac{1}{7}\\ \frac{3}{7} & -\frac{2}{7}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-2\\ 3\end{bmatrix}\cdot 7=-\begin{bmatrix}\frac{1}{7}\\ -\frac{12}{7}\end{bmatrix}\cdot 7=\begin{bmatrix}1\\ 12\end{bmatrix}.$$

Теперь все элементы обратной матрицы известны и по формуле (5,7)

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 9 & -14 & 12\\ 5 & -8 & 7\end{bmatrix}.$$

Заметим, что вычисление по формуле (5,2) оказалось бы менее громоздким. Следовало бы вычислить 9 определителей второго, один определитель третьего порядка и образовать союзную матрицу A.

Подставляя матрицу A^{-1} в формулу (а), получим

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 9 & -14 & 12 \\ 5 & -8 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix},$$

откуда

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

т. е. $x = 2$; $y = 1$; $z = 0$.

Задача 7,6. Решить системы уравнений

$$1)\ \left.\begin{aligned} 4x_1 + 5x_3 &= 7; \\ x_2 - 6x_3 &= 11; \\ 3x_1 + 4x_3 &= -2; \end{aligned}\right\} \qquad 2)\ \left.\begin{aligned} 4x_4 + 5x_6 &= 1; \\ x_5 - 6x_6 &= 2; \\ 3x_4 + 4x_6 &= 11; \end{aligned}\right\}$$

$$3)\ \left.\begin{aligned} 4x_7 + 5x_9 &= 0; \\ x_8 - 6x_9 &= 5; \\ 3x_7 + 4x_9 &= 1. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Запишем все три системы в виде одного матричного уравнения

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & x_4 & x_7 \\ x_2 & x_5 & x_8 \\ x_3 & x_6 & x_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 11 & 2 & 5 \\ -2 & 11 & 1 \end{bmatrix}.$$

Из этого следует, что матрица неизвестных

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_4 & x_7 \\ x_2 & x_5 & x_8 \\ x_3 & x_6 & x_9 \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 11 & 2 & 5 \\ -2 & 11 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{(a)}$$

где A^{-1} — обратная матрица для матрицы коэффициентов

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Найдем для этой матрицы обратную. В данном случае, учитывая характер этой матрицы, удобнее воспользоваться общей формулой (5,2) для определения обратной матрицы. Определитель матрицы A

$$|A| = 1.$$

Алгебраические дополнения

$$A_{11}=4; \qquad A_{12}=-18; \qquad A_{13}=-3;$$
$$A_{21}=0; \qquad A_{22}=1; \qquad A_{23}=0;$$
$$A_{31}=-5; \qquad A_{32}=24; \qquad A_{33}=4.$$

Составляем матрицу из алгебраических дополнений

$$\begin{bmatrix} 4 & -18 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 24 & 4 \end{bmatrix},$$

транспонируем ее, чтобы получить союзную матрицу $\tilde{A}$ и делим на $|A|=1$. Учитывая, что на основании формулы (5,2)

$$A^{-1}=\frac{\tilde{A}}{|A|},$$

получаем

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 4 & 0 & -5 \\ -18 & 1 & 24 \\ -3 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Из равенства (а) следует, что

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_4 & x_7 \\ x_2 & x_5 & x_8 \\ x_3 & x_6 & x_9 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 0 & -5 \\ -18 & 1 & 24 \\ -3 & 0 & 4 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 11 & 2 & 5 \\ -2 & 11 & 1 \end{bmatrix}.$$

Отсюда, выполняя умножение матриц в правой части, получаем

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_4 & x_7 \\ x_2 & x_5 & x_8 \\ x_3 & x_6 & x_9 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 38 & -51 & -5 \\ -163 & 248 & 29 \\ -29 & 41 & 4 \end{bmatrix},$$

Учитывая условия равенства матриц, находим

$$x_1=38; \qquad x_2=-163; \qquad x_3=-29;$$
$$x_4=-51; \qquad x_5=248; \qquad x_6=41;$$
$$x_7=-5; \qquad x_8=29; \qquad x_9=4.$$

Отметим безусловную выгоду, которую мы извлекли, применяя в данном случае определение обратной матрицы и используя формулу (7,4). Если бы эти системы решать по формулам Крамера, то пришлось бы вычислять 10 определителей третьего порядка. Однако подчеркнем, что экономия в вычислениях получилась вследствие того, что матрица коэффициентов во всех трех системах была одной и той же.

Задача 7,7 (для самостоятельного решения). Решить системы уравнений, применяя метод, указанный в предыдущей задаче:

$$1)\ \left.\begin{aligned} 2x_1+y_1+z_1&=11;\\ x_1+2z_1&=15;\\ 3x_1+y_1+2z_1&=14;\end{aligned}\right\}\qquad 2)\ \left.\begin{aligned} 2x_2+y_2+z_2&=2;\\ x_2+2z_2&=1;\\ 3x_2+y_2+2z_2&=-4;\end{aligned}\right\}$$

$$3)\ \left.\begin{aligned} 2x_3+y_3+z_3&=-3;\\ x_3+2z_3&=1;\\ 3x_3+y_3+2z_3&=5;\end{aligned}\right\}\qquad 4)\ \left.\begin{aligned} 2x_4+y_4+z_4&=0;\\ x_4+2z_4&=-1;\\ 3x_4+y_4+2z_4&=12.\end{aligned}\right\}$$

Указание. Все четыре системы представить в виде одного матричного уравнения

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4\\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4\\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 11 & 2 & -3 & 0\\ 15 & 1 & 1 & -1\\ 14 & -4 & 5 & 12\end{bmatrix}.$$

Для контроля

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} -2 & -1 & 2\\ 4 & 1 & -3\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}.$$

Ответ.

$$\begin{aligned} &x_1=-9; && y_1=17; && z_1=12;\\ &x_2=-13; && y_2=21; && z_2=7;\\ &x_3=15; && y_3=-26; && z_3=-7;\\ &x_4=25; && y_4=-37; && z_4=-13;. \end{aligned}$$

Задача 7,8 (для самостоятельного решения). Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} 3x_1-2x_2\qquad\quad -x_4&=1;\\ 2x_2+2x_3+x_4&=1;\\ x_1-2x_2-3x_3-2x_4&=1;\\ x_2+2x_3+x_4&=1.\end{aligned}\right\}$$

Указание. Обратная матрица коэффициентов

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -4\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ -1 & -1 & 3 & 6\\ 2 & 1 & -6 & -10\end{bmatrix}.$$

Ответ. $x_1=-4$; $x_2=0$; $x_3=7$; $x_4=-13$.

Теперь приступим ко второй части упражнений этого практического занятия.

Из большого числа известных методов решения систем линейных алгебраических уравнений мы будем пользоваться только одним из наиболее распространенных методов — методом исключения, который обычно называется методом Гаусса (с другими методами читатель может ознакомиться по книге: Д. К. Фаддеев и В. Н. Фаддеева. Вычислительные методы линейной алгебры, Физматгиз, 1960).

Метод Гаусса в матричном виде позволяет указать удобную для практики компактную схему решения, которая сводится к представлению матрицы коэффициентов в виде произведения двух треугольных матриц, а эту задачу мы уже подробно разобрали на предыдущем практическом занятии.

В матричном виде система линейных алгебраических (7,1) записывается так (7,3):

$$Ax = d,$$

где A — матрица коэффициентов системы (7,1).

Представим матрицу A в виде произведения нижней треугольной матрицы C на верхнюю треугольную матрицу B, причем интересующие нас формулы выведем применительно к случаю, когда диагональные элементы матрицы B равны 1.

$$A = CB.$$

Тогда уравнение (7,3) запишется в виде

$$CBx = d. \tag{7,6}$$

Произведение Bx матрицы B на x — матрицу-столбец неизвестных, — будет матрицей-столбцом, который мы обозначим через y

$$Bx = y. \tag{7,7}$$

Уравнение (7,6) перепишется в виде

$$Cy = d. \tag{7,8}$$

После того как из уравнения (7,8) будет определена матрица-столбец y, из уравнения (7,7), в котором, таким образом, правая часть окажется известной, можно определить матрицу-столбец x, чем и закончится решение задачи.

Распишем подробно уравнение (7,8), учитывая, что C — нижняя треугольная матрица:

$$\begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & c_{n4} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}. \tag{7,9}$$

Здесь элементы c_{ij} ($i, j = 1,2, \ldots, n$) известны, так как матрица A коэффициентов при неизвестных считается уже разложенной на произведение двух треугольных матриц C и B.

Перемножив матрицы в левой части (7,9) с учетом условия равенства двух матриц, получаем такие уравнения для определения неизвестных $y_1, y_2, \ldots, y_n$:

$$\left.\begin{array}{r} c_{11}y_1 = d_1; \\ c_{21}y_1 + c_{22}y_2 = d_2; \\ c_{31}y_1 + c_{32}y_2 + c_{33}y_3 = d_3; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{k,1}y_1 + \cdots + c_{k,\,k-2}y_{k-2} + c_{k,\,k-1}y_{k-1} + c_{kk}y_k = d_k; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + c_{n3}y_3 + \cdots + c_{nn}y_n = d_n. \end{array}\right\} \qquad (7,10)$$

Из этой системы уравнений, начиная с первого, получаем значения неизвестных y_i:

из 1-го уравнения $y_1 = \dfrac{d_1}{c_{11}}$;

из 2-го уравнения $y_2 = \dfrac{d_2 - c_{21}y_1}{c_{22}}$;

из 3-го уравнения $y_3 = \dfrac{d_3 - c_{31}y_1 - c_{32}y_2}{c_{33}}$;

из k-го уравнения

$$y_k = \frac{d_k - c_{k1}y_1 - c_{k2}y_2 - c_{k3}y_3 - \cdots - c_{k,\,k-1}y_{k-1}}{c_{kk}}$$

и, наконец, из n-ого уравнения

$$y_n = \frac{d_n - c_{n1}y_1 - c_{n2}y_2 - c_{n3}y_3 - \cdots - c_{n,\,n-1}y_{n-1}}{c_{nn}}.$$

Все эти формулы можно объединить в одну

$$y_i = \frac{d_i - \sum\limits_{k=1}^{i-1} c_{ik}y_k}{c_{ii}}. \qquad (7,11)$$

После того как все y_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) определены по формуле (7,11), их надо подставить в уравнение (7,7), в котором все элементы b_{ij} ($i, j = 1, 2, \ldots, n$) верхней треугольной матрицы B уже известны, так как, повторяем еще раз, что матрица A представлена как произведение двух треугольных матриц.

В развернутом виде уравнение (7,7) запишется так:

$$\begin{bmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 1 & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & b_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \quad b_{n-1,\,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \quad 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix}. \qquad (7,12)$$

Все диагональные элементы матрицы B равны 1. Умножив матрицы в левой части уравнения, получим матрицу-столбец, а учитывая условие равенства двух матриц, будем иметь такую систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + \cdots + b_{1n}x_n &= y_1; \\ x_2 + b_{23}x_3 + \cdots + b_{2n}x_n &= y_2; \\ x_3 + \cdots + b_{3n}x_n &= y_3; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n-1} + b_{n-1,\,n}x_n &= y_{n-1}; \\ x_n &= y_n. \end{aligned}\right\} \qquad (7,13)$$

Начиная решение этой системы уравнений с последнего, получим

$$\begin{aligned} x_n &= y_n \\ x_{n-1} &= y_{n-1} - b_{n-1,\,n}x_n; \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_3 &= y_3 - b_{34}x_4 - b_{35}x_5 - \cdots - b_{3n}x_n; \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_1 &= y_1 - b_{12}x_2 - b_{13}x_3 - \cdots - b_{1n}x_n. \end{aligned}$$

Общая формула для определения x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) запишется так:

$$x_i = y_i - \sum_{k=i+1}^{n} b_{ik}x_k. \qquad (7,14)$$

Для удобства напишем рядом формулы (7,11) и (7,14)

$$y_i = \frac{d_i - \sum\limits_{k=1}^{i-1} c_{ik}y_k}{c_{ii}};$$

$$x_i = y_i - \sum_{k=i+1}^{n} b_{ik}x_k.$$

По формуле (7,11) элементы y_i находятся так же, как и элементы b_{ij} $(i < j)$ верхней треугольной матрицы по формулам (6,21). Ниже приводится так называемая компактная вычислительная схема для применения метода Гаусса решения линейных систем алгебраических уравнений (табл. 1).

Таблица 1 указывает компактную схему решения системы линейных алгебраических уравнений. Приведенный аппарат формул для решения системы линейных алгебраических уравнений по способу Гаусса приводит к такому простому правилу:

1. Заготавливаются схемы, аналогичные схеме на стр. 187.

2. Вычисления ведутся в такой же последовательности, как и в схеме на стр. 155: сначала определяются элементы столбцов, а потом элементы строк, т. е. элементы первого столбца, элементы первой строки; элементы второго столбца, а потом элементы второй строки; элементы третьего столбца, а потом элементы третьей строки и т. д.

3. Чтобы получить элементы, расположенные на главной диагонали или ниже ее, берется соответствующий элемент матрицы A и из него вычитается сумма произведений элементов, расположенных в той же строке и в том же столбце, что и вычисляемый элемент, причем произведения берутся так, что умножается первый элемент в строке на первый элемент в столбце, второй в строке — на второй в столбце и т. д.

4. Чтобы получить элемент, стоящий над главной диагональю, поступают так же, как указано в п. 3, но полученное от вычитания число надо еще разделить на диагональный элемент той же строки, в которой стоит вычисляемый элемент.

5. Искомые неизвестные вычисляются в таком порядке:

$$x_4,\ x_3,\ x_2,\ x_1,$$

т. е. так называемым «обратным ходом» по формуле (7,14)

$$x_i = y_i - \sum_{k=i+1}^{n} b_{ik} x_k.$$

Если вычисления ведутся с помощью арифмометра или клавишной машины, то элементы в табл. 1 получаются без каких бы то ни было промежуточных записей.

Все вычисления должны быть проконтролированы. Контроль осуществляется так: для него отводится последний столбец и последняя строка вычислительной схемы. Последний столбец делится на две части: верхнюю и нижнюю (см. табл. 1). Элемент верхнего столбца, который мы обозначим через f_i, равен сумме элементов, стоящих с ним в одной и той же строке,

$$f_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} + d_i.$$

Таблица 1

КОМПАКТНАЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ СХЕМА ПРИМЕНЕНИЯ СПОСОБА ГАУССА

x_1	x_2	x_3	x_4	d_i	Контрольный столбец f_i и k_i
a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	d_1	$f_1=a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}+d_1$
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	d_2	$f_2=a_{21}+a_{22}+a_{23}+a_{24}+d_2$
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	d_3	$f_3=a_{31}+a_{32}+a_{33}+a_{34}+d_3$
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	d_4	$f_4=a_{41}+a_{42}+a_{43}+a_{44}+d_4$
$c_{11}=a_{11}$ 1	$b_{12}=\frac{a_{12}}{a_{11}}$	$b_{13}=\frac{a_{13}}{a_{11}}$	$b_{14}=\frac{a_{14}}{a_{11}}$	$y_1=\frac{d_1}{a_{11}}$	$k_1=\frac{f_1}{a_{11}}$
$c_{21}=a_{21}$	$c_{22}=a_{22}-a_{21}b_{12}$ 1	$b_{23}=\frac{a_{23}-c_{21}b_{13}}{c_{22}}$	$b_{24}=\frac{a_{24}-c_{21}b_{14}}{c_{22}}$	$y_2=\frac{d_2-c_{21}y_1}{c_{22}}$	$k_2=\frac{f_2-c_{21}k_1}{c_{22}}$
$c_{31}=a_{31}$	$c_{32}=a_{32}-a_{31}b_{12}$	$c_{33}=a_{33}-c_{31}b_{13}-c_{32}b_{23}$ 1	$b_{34}=\frac{a_{34}-c_{31}b_{14}-c_{32}b_{24}}{c_{33}}$	$y_3=\frac{d_3-c_{31}y_1-c_{32}y_2}{c_{33}}$	$k_3=\frac{f_3-c_{31}k_1-c_{32}k_2}{c_{33}}$
$c_{41}=a_{41}$	$c_{42}=a_{42}-a_{41}b_{12}$	$c_{43}=a_{43}-c_{41}b_{13}-c_{42}b_{23}$	$c_{44}=a_{44}-c_{41}b_{14}-c_{42}b_{24}-c_{43}b_{34}$ 1	$y_4=\frac{d_4-c_{41}y_1-c_{42}y_2-c_{43}y_3}{c_{44}}$	$k_4=\frac{f_4-c_{41}k_1-c_{42}k_2-c_{43}k_3}{c_{44}}$
$x_1=y_1-b_{12}x_2-b_{13}x_3-b_{14}x_4$	$x_2=y_2-b_{23}x_3-b_{24}x_4$	$x_3=y_3-b_{34}x_4$	$x_4=y_4$		

Элементы же нижнего контрольного, которые мы обозначим через k_i, получаются, как и элементы верхней треугольной матрицы, т. е. по формуле

$$k_i = \frac{f_4 - \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} k_j}{c_{ii}}.$$

Контроль состоит в том, что элементы контрольного столбца должны быть равны сумме элементов, стоящих в той же строке над главной диагональю. Например, в схеме элементы контрольного столбца должны быть равны:

$$k_2 = 1 + b_{23} + b_{24} + y_2;$$
$$k_3 = 1 + b_{34} + y_3;$$
$$k_4 = y_4.$$

Контроль должен осуществляться после вычисления каждой строки.

Таблица 2

	x_1	x_2	x_3	x_4	d_i	f_i и k_i	
	3	2	—1	5	—8	1	
	1	1	—1	1	—4	—2	f_i
	1	—1	1	2	0	3	
	2	—3	—1	3	—15	—14	
	3 | 1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$	$-\frac{8}{3}$	$\frac{1}{3}$	
c_{ij}	1	$\frac{1}{3}$ | 1	—2	—2	—4	—7	k_i
	1	$-\frac{5}{3}$	—2 | 1	$+\frac{3}{2}$	2	$\frac{9}{2}$	
	2	$-\frac{13}{3}$	—9	$+\frac{9}{2}$ | 1	—2	—1	
	1	2	5	—2	↑ y_i		
	↑ x_1	↑ x_2	↑ x_3	↑ x_4			

Задача 7,9. Решить по способу Гаусса систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} 3x_1+2x_2-x_3+5x_4&=-8;\\ x_1+x_2-x_3+x_4&=-4;\\ x_1-x_2+x_3+2x_4&=0;\\ 2x_1-3x_2-x_3+3x_4&=-15. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Используя указанный аппарат формул (7,11) и (7,14), с также схему, приведенную в табл. 1 на стр. 187, располагаем все вычисления, как указано в табл. 2, стр. 188. (Вычисления проведены в простых дробях для упрощения проверки по ходу решения. Дальнейшие задачи решаются в десятичных дробях).

Задача 7,10. Решить по способу Гаусса систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} 2x_1+x_2-3x_3+5x_4&=18{,}9012;\\ x_1-x_2+x_3-3x_4&=14{,}0800;\\ 3x_1+x_2-x_3+2x_4&=-2{,}2954;\\ 5x_1+2x_2-3x_3+x_4&=-6{,}3764. \end{aligned}\right\}$$

Таблица 3

x_1	x_2	x_3	x_4	d_i	f_i и k_i
2	1	—3	5	18,9012	23,9012
1	—1	1	—3	14,0800	12,0800
3	1	—1	2	—2,2954	2,7046
5	2	—3	1	—6,3764	—1,3764 f_i ↑
2 | 1	0,5000	—1,5000	2,5000	9,4506	11,9506
1	—1,5000 | 1	—1,6667	3,6667	—3,0863	—0,0863
3	—0,5000	2,6667 | 1	—1,3750	—12,0717	—12,4467
5	—0,5000	3,6667	—4,6251 | 1	2,3590	3,3590
3,5359	—26,4498	—8,8281	2,3590		
↑ x_1	↑ x_2	↑ x_3	↑ x_4	↑ ν_i	↑ k_i

f^i

c_{ij}

Решение. Для решения используем компактную схему, приведенную на стр. 187, в которой как уже указывалось, использованы формулы (7,11) и (7,14). Последний столбец отведен для контроля. Читатель должен проделать все вычисления с помощью арифмометра или настольной клавишной вычислительной машины. Все вычисления помещены в табл. 3. на стр. 189.

Задача 7,11 (для самостоятельного решения). Решить систему уравнений

$$\begin{aligned}
0{,}8320x_1 + 0{,}4670x_2 + 0 + 0 + 0{,}0155x_5 &= 0;\\
0{,}4670x_1 + 1{,}5160x_2 + 0{,}0467x_3 + 0 + 0{,}0294x_5 &= -0{,}302;\\
0{,}0155x_1 + 0{,}0294x_2 + 0{,}0561x_3 + 0{,}0561x_4 + 0{,}0283x_5 &= -0{,}634;\\
0 + 0{,}4670x_2 + 1{,}7850x_3 + 0{,}5120x_4 + 0{,}0561x_5 &= -1{,}163;\\
0 + 0 + 0{,}5120x_3 + 1{,}4720x_4 + 0{,}0561x_5 &= -1{,}977.
\end{aligned}$$

Ответ. $x_1 = 0{,}378$; $x_2 = 0{,}0485$; $x_3 = 0{,}184$; $x_4 = -0{,}580$; $x_5 = -21{,}7$.

Задача 7,12 (для самостоятельного решения). Решить систему уравнений

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 3;\\
x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 &= 9;\\
2x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= -16;\\
3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 + x_5 &= 2;\\
-x_1 + x_2 - 4x_3 + 4x_4 + 2x_5 &= -12.
\end{aligned}$$

Ответ. $x_1 = 1$: $x_2 = -1$; $x_3 = 2$; $x_4 = -2$; $x_5 = 3$.

Задача 7,13 (для самостоятельного решения). Решить систему уравнений

$$\begin{aligned}
10x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 2x_5 &= -20;\\
2x_1 + 20x_2 + 3x_3 - x_4 + 3x_5 &= 15;\\
3x_1 - 2x_2 + 25x_3 + x_4 - 2x_5 &= -20;\\
-x_1 - 2x_2 + x_3 - 10x_4 + 2x_5 &= -40;\\
2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 50x_5 &= -75.
\end{aligned}$$

Ответ. $x_1 = -2{,}411$; $x_2 = 1{,}439$; $x_3 = -0{,}633$: $x_4 = 3{,}664$; $x_5 = -1{,}130$.

Задача 7,14 (для самостоятельного решения). Решить систему уравнений

$$\begin{aligned}
0{,}5x_1 + 0 + x_3 + 1{,}023x_4 &= 4{,}725;\\
1{,}5x_1 + x_2 + 0 + 3{,}702x_4 &= 3{,}402;\\
1{,}273x_1 - 2{,}752x_2 + 3{,}208x_3 - 1{,}305x_4 &= 2{,}709;\\
2x_1 + x_2 + x_3 + 4{,}007x_4 &= 1{,}231.
\end{aligned}$$

Ответ. $x_1 = -14{,}980$; $x_2 = -9{,}682$; $x_3 = 2{,}390$; $x_4 = 9{,}604$.