ВОСЬМОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание. Характеристическое уравнение матрицы. След матрицы. Характеристические числа и собственные векторы матрицы. Нормирование вектора. Скалярное произведение двух векторов. Ортогональные векторы. Ортогональные матрицы. Преобразование характеристического уравнения методом Леверье.

СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Характеристическое уравнение. Пусть матрица

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \cdots a_{3n} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \cdots a_{nn} \end{bmatrix}, \tag{8,1}$$

а вектор-столбец

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}. \tag{8,2}$$

Умножим матрицу A на вектор x. Произведение будет вектором-столбцом, элементы которого обозначим через y_i $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$. Если окажется, что элементы y_i этого вектора-столбца пропорциональны соответствующим элементам вектора-столбца x с коэффициентом пропорциональности λ, т. е. если

$$y_i = \lambda x_i \quad (i = 1, 2 \ldots, n),$$

то вектор-столбец x называется собственным вектором матрицы A, а коэффициент пропорциональности λ характеристическим числом матрицы A, или ее собственным значением.

Таким образом, вектор x называется собственным вектором матрицы A, а число λ — ее характеристическим числом, или ее собственным значением, если выполняется равенство

$$Ax = \lambda x. \qquad (8,3)$$

Перепишем это уравнение в виде

$$Ax - \lambda x = 0$$

или

$$(A - \lambda E)x = 0, \qquad (8,4)$$

где E — единичная матрица, порядок которой равен порядку матрицы A, а 0 — нулевой вектор-столбец, т. е. столбец, все элементы которого равны нулю. Без множителя E при λ уравнение (8,4) не имело бы смысла.

При условии, что вектор $x \neq 0$, равенство (8,4) возможно только тогда, когда определитель его левой части равен нулю, т. е.

$$|A - \lambda E| = 0. \qquad (8,5)$$

Уравнение (8,5) называется характеристическим уравнением матрицы A, а его левая часть $A - \lambda E$ — характеристическим многочленом. Получим уравнение (8,5) в развернутом виде. Произведение

$$\lambda E = \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{bmatrix}.$$

Поэтому уравнение (8,5) на основании правила вычитания матриц с учетом равенства (8,1) в развернутом виде запишется так:

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda & \ldots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} = 0 \qquad (8,6)$$

Уравнение (8,6) и есть характеристическое уравнение (8,5). Оно называется также вековым уравнением и очень часто встречается в теории колебаний, теоретической и строительной механике, в аэродинамике, в небесной механике и играет большую роль в алгебре матриц. Вековым это уравнение называется потому, что к нему приводит в небесной механике задача исследования вековых возмущений планет.

Характеристические числа или собственные значения матрицы. Если раскрыть определитель в левой части уравнения (8,6), то получится уравнение относительно λ, степень которого равна порядку матрицы A (в данном случае степень этого многочлена равна n). Характеристическое уравнение (8,6) запишется так:

$$\begin{aligned}(-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1} A_1\lambda^{n-1} + (-1)^{n-2}A_2\lambda^{n-2} + \\ + (-1)^{n-3}A_3\lambda^{n-3} + \cdots + (-1)A_{n-1}\lambda + A_n = 0,\end{aligned} \tag{8,7}$$

где

A_1 — сумма всех диагональных миноров 1-го порядка;
A_2 — сумма всех диагональных миноров 2-го порядка;
. . . .
A_n — сумма всех диагональных миноров n-го порядка.

Неизвестная величина λ, определяемая из этого уравнения, имеет n значений

$$\lambda_1, \ \lambda_2, \ \lambda_3, \ \ldots, \ \lambda_n,$$

среди которых могут быть равные.

Таким образом, квадратная матрица A порядка n имеет n характеристических чисел.

Собственный вектор. Каждому характеристическому числу λ_i ($i = 1, 2, 3, \ldots, n$) характеристического (векового) уравнения (8,7) соответствует на основании уравнения (8,3) собственный вектор.

Собственным вектором матрицы A, принадлежащим собственному значению λ_i, называется ненулевой вектор, для которого столбец x, составленный из его элементов, удовлетворяет матричному уравнению (8,3)

$$Ax = \lambda_i x.$$

Будем собственный вектор, соответствующий корню λ_i характеристического уравнения, обозначать через b_i, а его элементы — через $b_{1i}, b_{2i}, b_{3i}, \ldots, b_{ni}$, т. е.

$$b_i = \begin{bmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ b_{3i} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{ni} \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

(элементы вектора называются также его координатами, а иногда компонентами).

Для определения координат собственного вектора, соответствующего характеристическому числу λ_i, перепишем уравнение (8,4) в развернутом виде.

$$\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda_i & a_{12} & a_{13} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda_i & a_{23} & \ldots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda_i & \ldots a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{3n} & \ldots a_{nn}-\lambda_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ b_{3i} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{ni} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Выполнив умножение матриц в левой части этого уравнения, учитывая условие равенства двух матриц, получим систему однородных уравнений для определения координат b_{1i}, b_{2i}, b_{3i} ..., b_{ni} собственного вектора b_i

$$\begin{aligned} (a_{11}-\lambda_i)b_{1i} + a_{12}b_{2i} + a_{13}b_{3i} + \cdots + a_{1n}b_{ni} &= 0; \\ a_{21}b_{1i} + (a_{22}-\lambda_i)\, b_{2i} + a_{23}b_{3i} + \cdots + a_{2n}b_{ni} &= 0; \\ a_{31}b_{1i} + a_{32}b_{2i} + (a_{33}-\lambda_i)b_{3i} + \cdots + a_{3n}b_{ni} &= 0; \qquad (8,8) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}b_{1i} + a_{n2}b_{2i} + a_{n3}b_{3i} + \cdots + (a_{nn}-\lambda_i)b_{ni} &= 0. \\ (i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n) \end{aligned}$$

Определитель системы равен нулю, так как из этого условия были определены собственные значения λ_i матрицы A (следовательно, эти уравнения не являются независимыми). На примерах будет показано, как определяются неизвестные $b_{\alpha i}$ (i, $\alpha = 1, 2, \ldots, n$).

Таким образом, будут определены все элементы собственного вектора b_i.

Следует иметь в виду, что собственный вектор можно определить с точностью до постоянного множителя.

Подставляя в (8,8) поочередно λ_1, λ_2, ..., λ_n, получим n собственных векторов.

Нормированный вектор. Вектор называется нормированным, если сумма квадратов его элементов (компонент, координат) равна 1. Так, если вектор

$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{bmatrix},$$

то он будет нормированным при выполнении условия

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \cdots + v_n^2 = 1.$$

Чтобы нормировать вектор, надо все его элементы умножить на число

$$N = \frac{1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}}.$$

Пример. Нормировать вектор

$$V = \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

Находим, что

$$N = \frac{1}{\sqrt{10^2 + 15^2 + (-6)^2}} = \frac{1}{\sqrt{361}} = \frac{1}{19}$$

и поэтому нормированный вектор

$$\bar{V} = \begin{bmatrix} \frac{10}{19} \\ \frac{15}{19} \\ -\frac{6}{19} \end{bmatrix}.$$

Действительно,

$$\left(\frac{10}{19}\right)^2 + \left(\frac{15}{19}\right)^2 + \left(-\frac{6}{19}\right)^2 = 1.$$

Скалярное произведение двух векторов. Скалярным произведением двух векторов называется сумма произведений соответствующих элементов. Так, если

$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{bmatrix}; \qquad W = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ w_n \end{bmatrix},$$

то их скалярное произведение

$$VW = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 + \cdots + v_n w_n.$$

Взаимно-ортогональные векторы. Два вектора называются взаимно-ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю.

Ортогональные матрицы. Матрица называется ортогональной, если ее столбцы попарно ортогональны.

Ортонормированные матрицы. Матрица называется ортонормированной, если каждый ее столбец есть нормированный вектор, а все столбцы попарно ортогональны.

Легко проверить, что, например, матрица

$$V = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

является ортогональной.

Раскрытие определителя в формуле (8,6). Раскрытие определителя в левой части векового уравнения (8,6) представляет собой очень громоздкую задачу, причем вычислительная работа становиться особенно трудоемкой при больших значениях n.

Вопросу о раскрытии этого определителя, т. е. преобразовании его в многочлен, и тем самым преобразовании (8,6) в алгебраическое уравнение, посвящено большое число работ. Существует много методов этого преобразования, среди которых наиболее распространенными и эффективными являются: метод А. К. Крылова, метод Данилевского, метод Микеладзе, метод Леверье, метод, основанный на решении системы n линейных алгебраических уравнений. Каждый из этих методов имеет как свои преимущества, так и недостатки. Мы выполним на этом практическом занятии упражнения по определению собственных значений матрицы и ее собственных векторов методом Леверье, а на следующем практическом занятии — методом академика А. Н. Крылова. Заметим, что метод Леверье в последнее время нашел большое применение в связи с использованием счетных машин, для которых определение степеней матрицы (на чем основан этот метод) является очень простой задачей.

Метод Леверье. Следом матрицы называется сумма ее диагональных элементов. След матрицы A обозначается символом SpA. Для матрицы A в (8,1)

$$SpA = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Чтобы упростить последующие формулы, введем такие обозначения для следа степеней матрицы A:

след матрицы $A : SpA = S_1$;
след матрицы $A^2 : SpA^2 = S_2$;
след матрицы $A^3 : SpA^3 = S_3$.

Вообще след SpA^k k-ой степени матрицы A будем обозначать через S_k

$$SpA^k = S_k.$$

Коэффициенты A_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) уравнения (8,7)

$$(-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}\lambda^{n-1} \cdot A_1 + (-1)^{n-2}A_2\lambda^{n-2} +$$
$$+ (-1)^{n-3}A_3\lambda^{n-3} + \cdots + (-1)A_{n-1}\lambda + A_n = 0$$

определяются по таким рекурентным формулам:

$$\begin{aligned}
&A_0 = 1.\\
&A_1 = A_0 \cdot S_1;\\
&A_2 = \frac{1}{2}(A_1S_1 - A_0S_2); \qquad\qquad (8,9)\\
&A_3 = \frac{1}{3}(A_2S_1 - A_1S_2 + A_0S_3);\\
&A_4 = \frac{1}{4}(A_3S_1 - A_2S_2 + A_1S_3 - A_0S_4);\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&A_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}A_{n-k}S_k.
\end{aligned}$$

Коэффициент A_1 есть сумма диагональных элементов матрицы A, т. е. след матрицы A. С другой стороны, на основании теоремы Вьета сумма корней характеристического уравнения равна A_1. *Таким образом, сумма корней характеристического уравнения матрицы равна ее следу.*

Коэффициеит A_n в уравнении (8,7) численно равен определителю $|A|$ матрицы, а потому последняя из формул (8,9) позволяет найти величину определителя матрицы A.

Применение этого аппарата формул связано с определением степеней матрицы A. Решим ряд задач на применение метода Леверье.

Задача 8,1. Определить собственные значения и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 10 \end{bmatrix}.$$

Решение. Характеристическое уравнение (8,6) имеет вид

$$|A - \lambda E| = 0,$$

т. е.

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 & 4 \\ 3 & 3-\lambda & 2 \\ 6 & 2 & 10-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

После раскрытия определителя в левой части этого уравнения получится

$$(-1)^3\lambda^3 + (-1)^2A_1\lambda^2 + (-1)A_2\lambda + A_3 = 0; \qquad (8,10)$$

$$\lambda^3 - A_1\lambda^2 + A_2\lambda - A_3 = 0,$$

а коэффициенты A_1, A_2 и A_3 определятся по формулам (8,9). Находим степени матрицы A и следы полученных матриц:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 10 \end{bmatrix}; \quad S_1 = 5 + 3 + 10 = 18;$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 52 & 16 & 62 \\ 36 & 16 & 38 \\ 96 & 32 & 128 \end{bmatrix};$$

$$S_2 = 52 + 16 + 128 = 196;$$

$$A^3 = A^2A = \begin{bmatrix} 52 & 16 & 62 \\ 36 & 16 & 38 \\ 96 & 32 & 128 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 680 & & \\ \cdot & 160 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1728 \end{bmatrix};$$

$$S_3 = 680 + 160 + 1728 = 2568.$$

Очевидно, что в наивысшей из вычисляемых степеней матрицы A следует определить только диагональные элементы, ибо она больше в умножении не участвует, а нас интересует только ее след, т. е. сумма диагональных элементов.

Применяем формулы (8,9):

$$A_0 = 1;$$

$$A_1 = 18;$$

$$A_2 = \frac{1}{2}(A_1S_1 - A_0S_2) = \frac{1}{2}(18 \cdot 18 - 1 \cdot 196) = 64;$$

$$A_3 = \frac{1}{3}(A_2S_1 - A_1S_2 + A_0S_3) = \frac{1}{3}(64 \cdot 18 - 18 \cdot 196 + 2568) = 64$$

(проверьте, что определитель матрицы A равен $A_3 = 64$). Подставляем эти значения в уравнение (8,10):

$$\lambda^3 - 18\lambda^2 + 64\lambda - 64 = 0.$$

Очевидным корнем этого уравнения является $\lambda_1 = 2$. Разделив левую часть уравнения на $\lambda - 2$ по схеме Горнера, получаем

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -18 & 64 & -64 \\ 2 & & 2 & -32 & 64 \\ \hline & \underline{1} & \underline{-16} & \underline{32} & \underline{0} \end{array}$$

Подчеркиутые числа — коэффициенты того квадратного уравнения, из которого найдем остальные два корня

$$\lambda^2 - 16\lambda + 32 = 0;$$

$$\lambda = 8 \pm \sqrt{32};$$

$$\lambda_2 = 4(2 + \sqrt{2}); \quad \lambda_3 = 4(2 - \sqrt{2}).$$

Итак, $\lambda_1 = 2$; $\lambda_2 = 4(2 + \sqrt{2})$; $\lambda_3 = 4(2 - \sqrt{2})$.

Проверьте, равно ли произведение корней характеристического уравнения определителю матрицы A.

Теперь приступим к определению собственных векторов. Систему (8,8) для нашей задачи, учитывая, что

$$a_{11} = 5;\ a_{12} = 1;\ a_{13} = 4;$$
$$a_{21} = 3;\ a_{22} = 3;\ a_{23} = 2;$$
$$a_{31} = 6;\ a_{32} = 2;\ a_{33} = 10,$$

перепишем так:

$$\begin{aligned} (5 - \lambda_i) b_{1i} + 1 \cdot b_{2i} + 4b_{3i} &= 0; \\ 3b_{1i} + (3 - \lambda_i) b_{2i} + 2b_{3i} &= 0; \\ 6b_{1i} + 2b_{2i} + (10 - \lambda_i) b_{3i} &= 0. \end{aligned} \qquad (8,11)$$

Определение первого собственного вектора ($i = 1$). Для $\lambda_1 = 2$ получаем

$$\begin{aligned} 3b_{11} + b_{21} + 4b_{31} &= 0; \\ 3b_{11} + b_{21} + 2b_{31} &= 0; \\ 6b_{11} + 2b_{21} + 8b_{31} &= 0. \end{aligned}$$

Определитель этой системы, конечно, равен нулю (почему?). Третье уравнение является следствием первого: если первое уравнение умножить на два, то получится третье. Отбросим третье уравнение и решим систему двух линейных однородных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{aligned} 3b_{11} + b_{21} + 4b_{31} &= 0; \\ 3b_{11} + b_{21} + 2b_{31} &= 0. \end{aligned}$$

Напомним решение таких систем. Если имеется система уравнений вида

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= 0, \end{aligned}$$

то

$$x_1 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} k;\quad x_2 = \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix} k;\quad x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} k.$$

Здесь k имеет произвольное значение, а определители получаются из матрицы коэффициентов

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

вычеркиванием из нее столбца коэффициентов при определяемом неизвестном.

В нашем случае матрица коэффициентов имеет вид

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix};$$

$$b_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} k; \quad b_{21} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} k; \quad b_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} k;$$

$$b_{11} = -2k; \quad b_{21} = 6k; \quad b_{31} = 0.$$

Первый собственный вектор

$$b_1 = k \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Определение второго собственного вектора ($i = 2$). Подставляя в систему (8,11) второе собственное значение матрицы $\lambda_2 = 4(2 + \sqrt{2})$, получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} &(5-8-4\sqrt{2})\, b_{12} + b_{22} && + 4b_{32} && = 0; \\ &3b_{12} + (3-8-4\sqrt{2})\, b_{22} && + 2b_{32} && = 0; \\ &6b_{12} + 2b_{22} && + (10-8-4\sqrt{2})\, b_{32} && = 0 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} &(-3-4\sqrt{2})\, b_{12} + b_{22} && + 4b_{32} && = 0; \\ &3b_{12} + (-5-4\sqrt{2})\, b_{22} && + 2b_{32} && = 0; \\ &6b_{12} + 2b_{22} && + (2-4\sqrt{2})\, b_{32} && = 0. \end{aligned}$$

Определитель этой системы также равен нулю. Отбросим третье уравнение и решим систему уравнений

$$(-3-4\sqrt{2})\, b_{12} + b_{22} + 4b_{32} = 0;$$

$$3b_{12} + (-5-4\sqrt{2})\, b_{22} + 2b_{32} = 0.$$

Матрица коэффициентов записывается так:

$$\begin{bmatrix} -3-4\sqrt{2} & 1 & 4 \\ 3 & -5-4\sqrt{2} & 2 \end{bmatrix},$$

а неизвестные равны

$$b_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -5-4\sqrt{2} & 2 \end{vmatrix} k; \quad b_{22} = \begin{vmatrix} 4 & -3-4\sqrt{2} \\ 2 & 3 \end{vmatrix} k;$$

$$b_{32} = \begin{vmatrix} -3-4\sqrt{2} & 1 \\ 3 & -5-4\sqrt{2} \end{vmatrix} k,$$

т. е.

$$b_{12} = (22 + 16\sqrt{2})\, k; \quad b_{22} = (18 + 8\sqrt{2})\, k; \quad b_{32} = (44 + 32\sqrt{2})\, k.$$

Второй собственный вектор

$$b_2 = k\begin{bmatrix} 22+16\sqrt{2} \\ 18+\ \ 8\sqrt{2} \\ 44+32\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Определение третьего собственного вектора ($i=3$). Для $\lambda_3 = 4(2-\sqrt{2})$ из системы (8,11) получаем

$$\begin{aligned} &(5-8+4\sqrt{2})\,b_{13}+b_{23} && +4b_{33} &&= 0; \\ &3b_{13}+(3-8+4\sqrt{2})\,b_{23}+2b_{33} && &&= 0; \\ &6b_{13}+2b_{23} && +(10-8+4\sqrt{2})\,b_{33} &&= 0 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} &-(3-4\sqrt{2})\,b_{13}+b_{23} && +4b_{33} &&= 0; \\ &3b_{13}+(-5+4\sqrt{2})\,b_{23}+2b_{33} && &&= 0; \\ &6b_{13}+2b_{23} && +(2+4\sqrt{2})\,b_{33} &&= 0. \end{aligned}$$

Ясно, что определитель и этой системы уравнений равен нулю. Отбрасываем первое уравнение и решаем систему уравнений

$$\begin{aligned} &3b_{13}+(-5+4\sqrt{2})\,b_{23}+2b_{33}=0; \\ &6b_{13}+2b_{23} \qquad\qquad +(2+4\sqrt{2})\,b_{33}=0. \end{aligned}$$

Получаем

$$b_{13}=(18-12\sqrt{2})\,k;\quad b_{23}=(6-12\sqrt{2})\,k;$$
$$b_{33}=(36-24\sqrt{2})\,k.$$

Таким образом, третий собственный вектор

$$b_3 = k\begin{bmatrix} 18-12\sqrt{2} \\ 6-12\sqrt{2} \\ 36-24\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Учитывая, что собственные векторы определяются с точностью до постоянного множителя, можно, полагая $k=1$, матрицу собственных векторов записать в таком виде:

$$b = \begin{bmatrix} -2 & 22+16\sqrt{2} & 18-12\sqrt{2} \\ 6 & 18+\ \ 8\sqrt{2} & 6-12\sqrt{2} \\ 0 & 44+32\sqrt{2} & 36-24\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

З а м е ч а н и е. Очевидно, что, давая множителю k различные значения, этой матрице можно придать бесконечное множество видов. Данное замечание относится и к следующим задачам, в которых, определяются собственные векторы и их матрица.

Задача 8,2. Для матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 11 & -6 & 2 \\ -6 & 10 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \end{bmatrix}$$

найти ее собственные значения и собственные векторы.

Решение.

Заданная матрица — симметричная.

Эти матрицы обладают такими важными свойствами:

1. *Матрица, составленная из собственных векторов симметричной матрицы, ортогональна.*

2. *Матрица, составленная из собственных нормированных векторов симметричной матрицы, также ортогональна.*

3. Если матрица b — ортонормированная, то матрица, транспонированная по отношению к ней, является для нее и обратной, т. е.

$$b \cdot b' = E,$$

а это значит, что

$$b' = b^{-1}.$$

Следует также иметь в виду, что если b — симметричная матрица, то транспонированная по отношению к ней матрица b' совпадает с матрицей b.

4. Если $\bar{b}$ — матрица, составленная из собственных нормированных векторов, то произведение

$$b \cdot A \cdot b^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ & & & & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

т. е. это произведение равно диагональной матрице, диагональные элементы которой равны собственным значениям матрицы.

5. Собственные значения симметричной матрицы — вещественные числа.

Характеристическое уравнение (8,6) в нашем случае запишется так:

$$\begin{vmatrix} 11-\lambda & -6 & 2 \\ -6 & 10-\lambda & -4 \\ 2 & -4 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (8,12)$$

Если раскрыть определитель в левой части, то получится на основании (8,7) уравнение

$$(-1)^3\lambda^3 + (-1)^2 A_1\lambda^2 + (-1)\, A_2\lambda + A_3 = 0$$

или

$$\lambda^3 - A_1\lambda^2 + A_2\lambda - A_3 = 0. \qquad (8,13)$$

Определяем вторую и третью степени матрицы A:

$$A = \begin{bmatrix} 11 & -6 & 2 \\ -6 & 10 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \end{bmatrix}; \quad S_1 = 11 + 10 + 6 = 27;$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 11 & -6 & 2 \\ -6 & 10 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 11 & -6 & 2 \\ -6 & 10 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 161 & -134 & 58 \\ -134 & 152 & -76 \\ 58 & -76 & 56 \end{bmatrix};$$

$$S_2 = 161 + 152 + 56 = 369;$$

$$A^3 = A_2 \cdot A = \begin{bmatrix} 161 & -134 & 58 \\ -134 & 152 & -76 \\ 58 & -76 & 66 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 11 & -6 & 2 \\ -6 & 10 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2691 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 2628 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 756 \end{bmatrix};$$

$$S_3 = 2691 + 2628 + 756 = 6075.$$

Мы заметили, что данная матрица A — симметричная. Ее квадрат A^2 — также симметричная матрица.

Теперь определяем коэффициенты A_1, A_3 и A_3 характеристического уравнения по формулам (8,9)

$$A_1 = A_0 S_1 = 1 \cdot 27 = 27;$$

$$A_2 = \frac{1}{2}(A_1 S_1 - S_2) = \frac{1}{2}(27 \cdot 27 - 369) = 180;$$

$$A_3 = \frac{1}{3}(A_2 S_1 - A_1 S_2 + S_3) = \frac{1}{3}(180 \cdot 27 - 27 \cdot 369 + 6075) = 324$$

(проверьте что определитель матрицы A равен $A_3 = 324$).

Таким образом, уравнение (8,13) запишется в виде

$$\lambda^3 - 27\lambda^2 + 180\lambda - 324 = 0.$$

Одним корнем уравнения является $\lambda_1 = 3$, в чем легко убедиться непосредственной проверкой. Разделим левую часть уравнения на $\lambda - 3$ по схеме Горнера:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -27 & 180 & -324 \\ 3 & & 3 & -72 & 324 \\ \hline & \underline{1} & \underline{-24} & \underline{108} & 0 \end{array}$$

Коэффициенты частного подчеркнуты. Квадратное уравнение для определения остальных двух корней запишется так:

$$\lambda^2 - 24\lambda + 108 = 0;$$
$$\lambda = 12 \pm \sqrt{144 - 108};$$
$$\lambda_2 = 6; \ \lambda_3 = 18.$$

Итак, корни характеристического уравнения

$$\lambda_1 = 3; \ \lambda_2 = 6; \ \lambda_3 = 18$$

(проверьте, равна ли сумма корней следу матрицы, а их произведение—ее определителю).

Система уравнений (8,8) для определения координат собственных векторов в нашем случае запишется так:

$$\begin{aligned} (11 - \lambda_i)\, b_{1i} - 6b_{2i} + 2b_{3i} &= 0; \\ -6b_{1i} + (10 - \lambda_i)\, b_{2i} - 4b_{3i} &= 0; \\ 2b_{1i} - 4b_{2i} + (6 - \lambda_i)\, b_{3i} &= 0. \end{aligned} \tag{8,14}$$

Подставим в нее поочередно λ_1, λ_2 и λ_3.

Определеиие первого собственного вектора ($i = 1$). Подставляем в систему (8,14) $\lambda_1 = 3$ и получаем

$$\begin{aligned} 8b_{11} - 6b_{21} + 2b_{31} &= 0; \\ -6b_{11} + 7b_{21} - 4b_{31} &= 0; \\ 2b_{11} - 4b_{21} + 3b_{31} &= 0. \end{aligned}$$

Ясно, что определитель этой системы равен нулю. Здесь независимы только два уравнения (действительно, если сложить второе уравнение с третьим и сумму умножить на —2, то получится первое уравнение). Рассмотрим систему, состоящую из первого и второго уравнений

$$\left.\begin{aligned} 8b_{11} - 6b_{21} + 2b_{31} &= 0; \\ -6b_{11} + 7b_{21} - 4b_{31} &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Матрица коэффициентов

$$\begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \end{bmatrix};$$

$$b_{11} = 10k; \quad b_{21} = 20k; \quad b_{31} = 20k,$$

а первый собственный вектор

$$b_1 = k \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 20 \end{bmatrix}.$$

Определение второго собственного вектора ($i=2$). Подставляем в систему (8,14) $\lambda_2=6$ и получаем для определения координат второго собственного вектора систему уравнений

$$\begin{aligned} 5b_{12}-6b_{22}+2b_{32}&=0;\\ -6b_{12}+4b_{22}-4b_{32}&=0;\\ 2b_{12}-4b_{22}\qquad\quad&=0, \end{aligned}$$

определитель которой равен нулю. Независимых уравнений в этой системе только два (если второе уравнение разделить на —2 и сложить с третьим, то получится первое).

Решим систему, состоящую из второго и третьего уравнений. Матрица коэффициентов

$$\begin{bmatrix} -6 & 4 & -4\\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix};$$

$$b_{12}=-16k;\quad b_{22}=-8k;\quad b_{32}=16k,$$

а второй собственный вектор

$$b_2=k\cdot\begin{bmatrix} -16\\ -8\\ 16 \end{bmatrix}.$$

Определение третьего собственного вектора ($i=3$). Система (8,14) для $\lambda_3=18$ примет такой вид:

$$\begin{aligned} -7b_{13}-6b_{23}+2b_{33}&=0;\\ -6b_{13}-8b_{23}-4b_{33}&=0;\\ 2b_{13}-4b_{23}-12b_{33}&=0. \end{aligned}$$

Определитель этой системы равен нулю. Здесь опять-таки только два уравнения независимы (если первое уравнение умножить на —2, а второе на 2 и сложить их, то получится третье уравнение).

Матрица коэффициентов первых двух уравнений

$$\begin{bmatrix} -7 & -6 & 2\\ -6 & -8 & -4 \end{bmatrix};$$

$$b_{13}=40k;\quad b_{23}=-40k;\quad b_{33}=20k,$$

а третий собственный вектор

$$b_3=k\cdot\begin{bmatrix} 40\\ -40\\ 20 \end{bmatrix}.$$

Так как собственные векторы определяются с точностью до постоянного множителя, то можно взять $k=1$ для b_1, b_2 и b_3.

Матрица b собственных векторов матрицы A при $k=1$ запишется так:

$$b = \begin{bmatrix} 10 & -16 & 40 \\ 20 & -8 & -40 \\ 20 & 16 & 20 \end{bmatrix}.$$

Матрица b по свойству 1 симметрических матриц (стр. 202), как легко проверить, действительно ортогональна:

$$b_1 \cdot b_2 = 10 \cdot (-16) + 20 \cdot (-8) + 20 \cdot 16 = 0;$$
$$b_1 \cdot b_3 = 10 \cdot 40 + 20 \cdot (-40) + 20 \cdot 20 = 0;$$
$$b_2 \cdot b_3 = -16 \cdot 40 + (-8) \cdot (-40) + 16 \cdot 20 = 0.$$

Пронормируем. каждый из собственных векторов b_1, b_2 и b_3 и составим матрицу из нормированных собственных векторов.

Для первого собственного вектора b_1 нормирующий множитель

$$N = \frac{1}{\sqrt{10^2 + 20^2 + 20^2}} = \frac{1}{30}$$

(см. стр. 194).

Для второго собственного вектора b_2 нормирующий множитель

$$N_2 = \frac{1}{-\sqrt{(-16)^2 + (-8)^2 + 16^2}} = -\frac{1}{24}.$$

Знак минус перед корнем выбран для того, чтобы матрица преобразования $\bar{b}$ была симметричной.

Для третьего собственного вектора b_3 нормирующий множитель

$$N_3 = \frac{1}{\sqrt{40^2 + (-40)^2 + 20^2}} = \frac{1}{60}.$$

Нормированные собственные векторы обозначим соответственно через $\bar{b}_1$, $\bar{b}_2$, $\bar{b}_3$:

$$\bar{b}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}; \quad \bar{b}_2 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}; \quad \bar{b}_3 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

и составим из них матрицу

$$\bar{b} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \bar{b}_1 & \bar{b}_2 & \bar{b}_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \end{array}. \qquad (8,15)$$

Проверим выполнение свойства 2 симметричных матриц (стр. 202). Составим скалярные произведения $\bar{b}_1 \cdot b_2$, $\bar{b}_1 \cdot \bar{b}_3$ и $\bar{b}_2 \cdot \bar{b}_3$. Легко убедиться, что каждое из них равно нулю.

$$
\begin{aligned}
b_1 \cdot b_2 &= \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = 0; \\
b_1 \cdot b_3 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = 0; \qquad (8,16) \\
b_2 \cdot b_3 &= -\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{3} = 0.
\end{aligned}
$$

Таким образом, векторы $\bar{b}_1$, $\bar{b}_2$ и $\bar{b}_3$ попарно ортогональны, матрица (8,15) — ортогональная матрица, а так как векторы $\bar{b}_1$, $\bar{b}_2$ и $\bar{b}_3$ нормированы, то матрица (8,15) ортонормирована.

Заметив, что матрица (8,15) ортонормированная, проверим выполнение третьего свойства.

Составим произведение $\bar{b} \cdot \bar{b}'$ и убедимся, что получится единичная матрица. Это будет означать, что матрица $\bar{b}'$ обратна матрице $\bar{b}$:

$$
b \cdot b' = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} =
$$

$$
= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E.
$$

Поскольку $b \cdot b' = E$, то $\bar{b}'$ есть матрица, обратная b.

Теперь проверим выполнение свойства 4. Составим произведение $b \cdot A \cdot b^{-1}$:

$$
b \cdot A \cdot b^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 11 & -6 & 2 \\ -6 & 10 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \end{bmatrix} \times
$$

$$
\times \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \\ 12 & -12 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} =
$$

$$
= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{bmatrix}. \qquad (8,17)
$$

Действительно, получилась диагональная матрица с диагональными элементами, равными $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$ и $\lambda_3 = 18$.

Отметим также выполнение свойства 5: все собственные числа симметричной матрицы — действительные числа. Этим мы и закончим решение данной задачи.

Задача 8,3. Найти собственные значения и собственные векторы симметричной матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

и проверить свойства 1 и 2 симметричных матриц, указанные в предыдущей задаче.

Решение. Характеристическое уравнение запишется так:

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & 3 & 2 \\ 3 & 6-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Если раскрыть определитель в его левой части, то получится уравнение такое же, как и (8,13).

$$\lambda^3 - A_1\lambda^2 + A_2\lambda - A_3 = 0. \qquad (8,18)$$

Чтобы найти коэффициенты A_1, A_2 и A_3, найдем A^2 — вторую степень матрицы A и диагональные элементы матрицы A^3.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}; \ S_1 = 13;$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 49 & 40 & 20 \\ 40 & 49 & 20 \\ 20 & 20 & 9 \end{bmatrix}; \ S_2 = 107.$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 49 & 40 & 20 \\ 40 & 49 & 20 \\ 20 & 20 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 454 & & \\ & 454 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 89 \end{bmatrix};$$

$$S_3 = 997.$$

$$A_0 = 1;$$

$$A_1 = S_1 = 13;$$

$$A_2 = \frac{1}{2}(A_1S_1 - S_2) = \frac{1}{2}(13 \cdot 13 - 107) = 31;$$

$$A_3 = \frac{1}{3}(A_2S_1 - A_1S_2 + S_3) = \frac{1}{3}(31 \cdot 13 - 13 \cdot 107 + 997) = 3.$$

С этими значениями коэффициентов уравнение (8,18) запишется так:

$$\lambda^3 - 13\lambda^2 + 31\lambda - 3 = 0.$$

Его корнем, как легко проверить, будет $\lambda_1 = 3$. Разделим левую часть этого уравнения на $\lambda - 3$ по схеме Горнера;

$$\begin{array}{c|rrrr} 3 & 1 & -13 & 31 & -3 \\ & & 3 & -30 & 3 \\ \hline & \underline{1} & -\underline{10} & \underline{1} & 0 \end{array}$$

Коэффициенты частного от деления подчеркнуты, а квадратное уравнение для определения остальных двух корней будет таким:

$$\lambda^2 - 10\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda_2 = 5 + 2\sqrt{6};\ \lambda_3 = 5 - 2\sqrt{6}.$$

Таким образом, собственные значения матрицы найдены

$$\lambda_1 = 3;\ \lambda_2 = 5 + 2\sqrt{6};\ \lambda_3 = 5 - 2\sqrt{6}.$$

Система уравнений (8,9) для определения собственных векторов с найденными собственными значениями матрицы A запишется так:

$$\begin{gathered} (6 - \lambda_i) b_{1i} + 3b_{2i} + 2b_{3i} = 0 \\ 3b_{1i} + (6 - \lambda_i) b_{2i} + 2b_{3i} = 0 \\ 2b_{1i} + 2b_{2i} + (1 - \lambda_i) b_{3i} = 0 \\ (i = 1, 2, 3). \end{gathered} \tag{8,19}$$

Для определения собственных векторов подставляем в эту систему поочередно λ_1, λ_2 и λ_3.

Определение первого собственного вектора ($i = 1$). При $\lambda_1 = 3$ система (8,19) примет вид

$$\begin{gathered} 3b_{11} + 3b_{21} + 2b_{31} = 0; \\ 3b_{11} + 3b_{21} + 2b_{31} = 0; \\ 2b_{11} + 2b_{21} - 2b_{31} = 0. \end{gathered}$$

Определитель этой системы равен, конечно, нулю. Здесь второе уравнение совпадает с первым. Независимых уравнений в системе два.

Решим систему уравнений из второго и третьего уравнений

$$\begin{gathered} 3b_{11} + 3b_{21} + 2b_{31} = 0; \\ 2b_{11} + 2b_{21} - 2b_{31} = 0. \end{gathered}$$

Матрица коэффициентов записывается так:

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix};$$

$$b_{11} = -10k; \ b_{21} = 10k; \ b_{31} = 0,$$

а первый собственный вектор

$$b_1 = k \cdot \begin{bmatrix} -10 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Определение второго собственного вектора ($i = 2$). Для $\lambda_2 = 5 + 2\sqrt{6}$ система (8,19) запишется так:

$$\begin{aligned} &(6 - 5 - 2\sqrt{6})\, b_{12} + 3b_{22} + 2b_{32} = 0; \\ &3b_{12} + (6 - 5 - 2\sqrt{6})\, b_{22} + 2b_{32} = 0; \\ &2b_{12} + 2b_{22} + (1 - 5 - 2\sqrt{6})\, b_{32} = 0 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} &(1 - 2\sqrt{6})\, b_{12} + 3b_{22} + 2b_{32} = 0; \\ &3b_{12} + (1 - 2\sqrt{6})\, b_{22} + 2b_{32} = 0; \\ &2b_{12} + 2b_{22} + (-4 - 2\sqrt{6})\, b_{32} = 0. \end{aligned}$$

Определитель этой системы равен нулю, в ней только два независимых уравнения.

Решим систему из первого и второго уравнений

$$\begin{aligned} &(1 - 2\sqrt{6})\, b_{12} + 3b_{22} + 2b_{32} = 0; \\ &3b_{12} + (1 - 2\sqrt{6})\, b_{22} + 2b_{32} = 0. \end{aligned}$$

Матрица коэффициентов этой системы имеет вид

$$\begin{bmatrix} 1 - 2\sqrt{6} & 3 & 2 \\ 3 & 1 - 2\sqrt{6} & 2 \end{bmatrix}.$$

Неизвестные определяются формулами

$$b_{12} = (4\sqrt{6} + 4)\, k; \quad b_{22} = (4\sqrt{6} + 4)\, k;$$

$$b_{32} = (16 - 4\sqrt{6})\, k.$$

Второй собственный вектор

$$b_2 = k \cdot \begin{bmatrix} 4 + 4\sqrt{6} \\ 4 + 4\sqrt{6} \\ 16 - 4\sqrt{6} \end{bmatrix}.$$

Определение третьего собственного вектора ($i=3$). При $\lambda_3 = 5-2\sqrt{6}$ система (8,19) примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
&(6-5+2\sqrt{6})\,b_{13}+3b_{23}+2b_{33}=0;\\
&3b_{13}+(6-5+2\sqrt{6})\,b_{23}+2b_{33}=0;\\
&2b_{13}+2b_{23}+(1-5+2\sqrt{6})\,b_{33}=0
\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
&(1+2\sqrt{6})\,b_{13}+3b_{23}+2b_{33}=0;\\
&3b_{13}+(1+2\sqrt{6})\,b_{23}+2b_{33}=0;\\
&2b_{13}+2b_{23}+(-4+2\sqrt{6})\,b_{33}=0.
\end{aligned}$$

Опять-таки определитель этой системы равен нулю, независимых уравнений в ней два. Решая систему из первого и второго уравнений, находим, что

$$b_{13}=(4-4\sqrt{6})\,k;\quad b_{23}=(4-4\sqrt{6})\,k;$$
$$b_{33}=(16+4\sqrt{6})\,k,$$

а третий собственный вектор

$$b_3 = k\cdot\begin{bmatrix}4-4\sqrt{6}\\4-4\sqrt{6}\\16+4\sqrt{6}\end{bmatrix}.$$

Так как собственные векторы определяются с точностью до постоянного множителя, то, полагая $k=1$ в выражениях для b_1, b_2 и b_3, получаем матрицу собственных векторов

$$b=\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\quad b_1 & \qquad b_2 & \qquad b_3\end{array}\\ \begin{bmatrix}-10 & 4+4\sqrt{6} & 4-4\sqrt{6}\\ 10 & 4+4\sqrt{6} & 4-4\sqrt{6}\\ 0 & 16-4\sqrt{6} & 16+4\sqrt{6}\end{bmatrix}\end{array}. \qquad (8,20)$$

Убедимся в выполнении первого свойства симметричных матриц: составим скалярные произведения собственных векторов

$$b_1b_2=-10\cdot(4\sqrt{6}+4)+10(4\sqrt{6}+4)+0\cdot(16-4\sqrt{6})=0;$$
$$b_1b_3=-10(4-4\sqrt{6})+10(4-4\sqrt{6})+0(16+4\sqrt{6})=0;$$
$$b_2b_3=(4\sqrt{6}+4)(4-4\sqrt{6})+(4\sqrt{6}+4)(4-4\sqrt{6})+$$
$$+(16-4\sqrt{6})(16+4\sqrt{6})=0.$$

Таким образом, матрица (8,20), составленная из собственных векторов симметричной матрицы A, является ортогональной.

Теперь пронормируем собственные векторы b_1, b_2 и b_3 и убедимся в выполнении второго свойства симметрических матриц, указанного в предыдущей задаче.

Для первого собственного вектора нормирующий множитель

$$N_1 = \frac{1}{\sqrt{(-10)^2 + 10^2}} = \frac{1}{10\sqrt{2}},$$

а сам этот вектор в нормированном виде

$$b_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Для второго собственного вектора нормирующий множитель

$$N_2 = \frac{1}{\sqrt{(4 + 4\sqrt{6})^2 + (4 + 4\sqrt{6})^2 + (16 - 4\sqrt{6})^2}} = \frac{1}{8\sqrt{9 - \sqrt{6}}},$$

а сам этот вектор в нормированном виде

$$b_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{3 - \sqrt{6}}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3 - \sqrt{6}}} \\ \frac{1}{\sqrt{6 + 2\sqrt{6}}} \end{bmatrix}.$$

Наконец, для третьего собственного вектора нормирующий множитель

$$N_3 = \frac{1}{\sqrt{(4 - 4\sqrt{6})^2 + (4 - 4\sqrt{6})^2 + (16 + 4\sqrt{6})^2}} = \frac{1}{8\sqrt{9 + \sqrt{6}}}.$$

а в нормированном виде

$$b_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{3 + \sqrt{6}}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{3 + \sqrt{6}}} \\ \frac{1}{\sqrt{6 - 2\sqrt{6}}} \end{bmatrix}.$$

Матрица b нормированных собственных векторов имеет вид

$$b = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \quad\bar{b}_1 \quad & \quad\quad \bar{b}_2 \quad\quad & \quad\quad \bar{b}_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{3 - \sqrt{6}}} & -\frac{1}{2\sqrt{3 + \sqrt{6}}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{3 - \sqrt{6}}} & -\frac{1}{2\sqrt{3 + \sqrt{6}}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{6 + 2\sqrt{6}}} & \frac{1}{\sqrt{6 - 2\sqrt{6}}} \end{bmatrix} \end{array}.$$

Легко проверить, что и эта матрица ортогональна, так как

$$b_1 \cdot b_2 = 0; \qquad b_1 \cdot b_3 = 0; \quad b_2 \cdot b_3 = 0;$$

Тем самым выполнено и свойство 2.

Теперь легко проверить, что

$$b \cdot b' = E,$$

а

$$b \cdot A \cdot b' = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5+2\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & 5-2\sqrt{6} \end{bmatrix},$$

т. е. выполняется и четвертое свойство ортогональных матриц.

Выполняется и свойство 5: все собственные значения заданной симметрической матрицы — действительные числа.

Задача 8,4 (для самостоятельного решения). Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Промежуточные результаты:

1. Характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - 10\lambda^2 + 24\lambda - 16 = 0.$$

2. Собственные значения матрицы

$$\lambda_1 = 2; \quad \lambda_2 = 4 + 2\sqrt{2}; \quad \lambda_3 = 4 - 2\sqrt{2}.$$

3. Система уравнений для определения собственных векторов

$$\begin{aligned} (3-\lambda_i)b_{1i} + 2b_{2i} \qquad\qquad + b_{3i} &= 0; \\ 2b_{1i} + (4-\lambda_i)b_{2i} + 2b_{3i} &= 0; \\ b_{1i} + 2b_{2i} \qquad + (3-\lambda_i)b_{3i} &= 0. \end{aligned}$$

Первый собственный вектор ($i = 1$)

$$b_1 = k \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Второй собственный вектор

$$b_2 = k \cdot \begin{bmatrix} 4+2\sqrt{2} \\ 4+4\sqrt{2} \\ 4+2\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Третий собственный вектор

$$b_3 = k \cdot \begin{bmatrix} 4-2\sqrt{2} \\ 4-4\sqrt{2} \\ 4-2\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Матрица собственных векторов

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \\ b = & \begin{bmatrix} 1 & 4+2\sqrt{2} & 4-2\sqrt{2} \\ 0 & 4+4\sqrt{2} & 4-4\sqrt{2} \\ -1 & 4+2\sqrt{2} & 4-2\sqrt{2} \end{bmatrix}. \end{array}$$

Проверить, что имеют место равенства

$$b \cdot b' = E \quad \text{и} \quad b \cdot A \cdot b' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4+2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 4-2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Задача 8,5 (для самостоятельного решения). Найти ные значения матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Промежуточные результаты:

1. Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3-\lambda & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 4-\lambda & 6 \\ 3 & 1 & 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

2. Степени матрицы A:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 45 & 16 & 34 & 39 \\ 29 & 16 & 22 & 31 \\ 58 & 24 & 48 & 62 \\ 41 & 16 & 34 & 43 \end{bmatrix};$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 45 & 16 & 34 & 39 \\ 29 & 16 & 22 & 31 \\ 58 & 24 & 48 & 62 \\ 41 & 16 & 34 & 43 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 510 & 200 & 404 & 498 \\ 358 & 152 & 284 & 362 \\ 716 & 288 & 576 & 724 \\ 502 & 200 & 404 & 506 \end{bmatrix};$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 510 & 200 & 404 & 498 \\ 358 & 151 & 284 & 362 \\ 716 & 288 & 576 & 724 \\ 502 & 200 & 404 & 506 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 6060 & \cdot & \cdot & \\ \cdot & 1744 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 6912 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & 6052 \end{bmatrix}.$$

3. Следы матрицы

$S_1 = 16$ — след матрицы A;
$S_2 = 152$ — след матрицы A^2;
$S_3 = 1744$ — след матрицы A^3;
$S_4 = 20768$ — след матрицы A^4.

4. По формулам (8,9) определяются коэффициенты характеристического уравнеиия:

$A_1 = S_1 = 16;$

$A_2 = \frac{1}{2}(A_1 S_1 - S_2) = \frac{1}{2}(16 \cdot 16 - 152) = 52;$

$A_3 = \frac{1}{3}(A_2 S_1 - A_1 S_2 + S_3) = \frac{1}{3}(52 \cdot 16 - 16 \cdot 152 + 1744) = 48;$

$A_4 = \frac{1}{4}(A_3 S_1 - A_2 S_2 + A_1 S_3 - S_4) = \frac{1}{4}(48 \cdot 16 - 52 \cdot 152 + 16 \times$
$\times 1744 - 20768) = 0.$

5. Характеристическое уравнение

$$\lambda^4 - 16\lambda^3 + 52\lambda^2 - 48\lambda = 0.$$

Ответ. Собственные значения матрицы A:

$$\lambda_1 = 0; \quad \lambda_2 = 2; \quad \lambda_3 = 12; \quad \lambda_4 = 2;$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = S_1.$$

Убедиться, что определитель матрицы

$$|A| = 0,$$

т. е. матрица особенная (иначе — вырожденная).