ДЕВЯТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание. Преобразование характеристического уравнения методом академика А. Н. Крылова, Теорема Кэли — Гамильтона.

1. МЕТОД АКАДЕМИКА А. Н. КРЫЛОВА ДЛЯ РАСКРЫТИЯ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ В ВЕКОВОМ УРАВНЕНИИ

Академик А. Н. Крылов указал удобный метод раскрытия определителя в левой части уравнения (8,6). Сущность этого метода заключается в том, что определитель путем алгебраических преобразований приводится к такому виду, который позволяет его легко вычислить.

Трудность раскрытия определителя состоит в том, что неизвестная величина λ входит только в диагональные элементы. Методом А. Н. Крылова определитель в левой части (8,6) преобразуется так, что неизвестные величины λ оказываются не диагональными его элементами, а элементами столбца. Это дает возможность на основании известных свойств определителей разложить его по элементам этого столбца, довольно просто представить определитель в уравнении (8,6) в виде многочлена и получить алгебраическое уравнение с неизвестным λ.

Ознакомиться с теорией этого вопроса можно по таким источникам:

1. А. Н. Крылов. О численном решении уравнения, которым в технических вопросах определяются частоты малых колебаний материальных систем («Известия Академии наук СССР», 1931).
2. Н. Н. Лузин. О методе академика Крылова составления векового уравнения («Известия Академии наук СССР», 1931).
3. А. К. Сушкевич. Основы высшей алгебры, глава IX, § 171 (Издательство ОНТИ, 1937).

Здесь же, не вдаваясь в теоретические подробности, мы изложим метод академика А. Н. Крылова и покажем на примерах его применение.

Левая часть векового уравнения (8,6) записывается так:

$$|A - \lambda E|.$$

Для применения метода Крылова надо выполнить следующее:

1. Составить первые строки последовательных степеней матрицы A, т. е. первые строки матриц A^2, A^3, A^4, ..., A^n.

Если обозначить через $a_{1j}^{(k)}$ элементы первой строки κ-ой степени матрицы A, то их просто можно определить по формуле приведения

$$a_{1j}^{(k)} = \sum_{\beta=1}^{n} a_{1\beta}^{(k-1)} a_{\beta j}, \tag{9,1}$$

где верхний индекс (k) — указатель степени матрицы, причем $k = 2, 3, 4, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, n$, $a_{1j}^{(1)} = a_{1j}$. Эта формула позволяет по известным элементам первой строки матрицы A^{k-1} и элементам матрицы A найти элементы первой строки матрицы A^k.

Таким образом, должны быть составлены матрицы

$$A^2 = \begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & \ldots & a_{1n}^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix};$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} a_{11}^{(3)} & a_{12}^{(3)} & \ldots & a_{1n}^{(3)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix};$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} a_{11}^{(4)} & a_{12}^{(4)} & \ldots & a_{1n}^{(4)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix};$$

$$A^n = \begin{bmatrix} A_{11}^{(n)} & a_{12}^{(n)} & \ldots & a_{1n}^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}.$$

2. После того как первые строки степеней матрицы A найдены, составить определитель такого вида:

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \lambda & a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \ldots & a_{1n}^{(1)} \\ \lambda^2 & a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & \ldots & a_{1n}^{(2)} \\ \lambda^3 & a_{11}^{(3)} & a_{12}^{(3)} & a_{13}^{(3)} & \ldots & a_{1n}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda n & a_{11}^{(n)} & a_{12}^{(n)} & a_{13}^{(n)} & \ldots & a_{1n}^{(n)} \end{vmatrix}, \tag{9,2}$$

в котором степени неизвестной величины λ уже расположены в первом столбце, а строки степеней матрицы A являются строками минора элемента, стоящего в левом верхнем углу в (9,2).

Этот определитель тождествен определителю левой части уравнения (8,6), а раскрыть его значительно проще: его надо только разложить по элементам первого столбца. Получится уравнение степени n относительно λ. Решение его и даст собственные значения исходной матрицы. Определитель (9,2) называется определителем Крылова. Преобразованием определителя $|A-\lambda E|$ в уравнении (8,6) к виду (9,2) обойдены все большие трудности, связанные с его раскрытием.

3. Надо с помощью тождественных преобразований определителя (9,2) внести дальнейшие упрощения в разложение этого определителя по элементам первого столбца.

Предполагая, что элементы второй строки в (9,2) $a_{12}^{(1)}$, $a_{13}^{(1)}, \ldots,$ $a_{1n}^{(1)}$ не равны нулю, разделим элементы столбцов, начиная с третьего, соответственно на $a_{12}^{(1)}$, $a_{13}^{(1)}$ $\ldots$, $a_{1n}^{(1)}$, что равносильно вынесению за знак определителя произведения $a_{12}^{(1)} \cdot a_{13}^{(1)} \ldots a_{1n}^{(1)}$. После этого деления получится определитель вида

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \lambda & a_{11}^{(1)} & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda^2 & a_{11}^{(2)} & \frac{a_{12}^{(2)}}{a_{12}^{(1)}} & \frac{a_{13}^{(2)}}{a_{13}^{(1)}} & \ldots & \frac{a_{1n}^{(2)}}{a_{1n}^{(1)}} \\ \lambda^3 & a_{11}^{(3)} & \frac{a_{12}^{(3)}}{a_{12}^{(1)}} & \frac{a_{13}^{(3)}}{a_{13}^{(1)}} & \ldots & \frac{a_{1n}^{(3)}}{a_{1n}^{(1)}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda^n & a_{11}^{(n)} & \frac{a_{12}^{(n)}}{a_{12}^{(1)}} & \frac{a_{13}^{(n)}}{a_{13}^{(1)}} & \ldots & \frac{a_{1n}^{(n)}}{a_{1n}^{(1)}} \end{vmatrix} \qquad (9,3)$$

Обозначим дроби $\frac{a_{1k}^{(j)}}{a_{1k}}$ через $b_{1k}^{(j)}$, где $k=2, 3, 4, \ldots n$; $j=2, 3, 4, \ldots n$, т. е.

$$\frac{a_{1k}^{(j)}}{a_{1k}^{(1)}} = b_{1k}^{(j)}$$

и определитель (9,3) примет вид

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \lambda & a_{11}^{(1)} & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda^2 & a_{11}^{(2)} & b_{12}^{(2)} & b_{13}^{(2)} & \ldots & b_{1n}^{(2)} \\ \lambda^3 & a_{11}^{(3)} & b_{12}^{(3)} & b_{13}^{(3)} & \ldots & b_{1n}^{(3)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda^n & a_{11}^{(n)} & b_{12}^{(n)} & b_{13}^{(n)} & \ldots & b_{1n}^{(n)} \end{vmatrix}. \qquad (9,4)$$

Вычтем теперь из элементов четвертого и следующего за ним столбцов определителя (9,4) соответствующие элементы третьего столбца и получим определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots 0 \\ \lambda & a_{11}^{(1)} & 1 & 0 & \dots 0 \\ \lambda^2 & a_{11}^{(2)} & b_{12}^{(2)} & c_{13}^{(2)} & \dots c_{1n}^{(2)} \\ \lambda^3 & a_{11}^{(3)} & b_{12}^{(3)} & c_{13}^{(3)} & \dots c_{1n}^{(3)} \\ . & . & . & . & . \\ \lambda n & a_{11}^{(n)} & b_{12}^{(n)} & c_{13}^{(n)} & \dots c_{1n}^{(n)} \end{vmatrix} \cdot \tag{9,5}$$

где

$$c_{ik}^{(j)} = b_{ik}^{(j)} - b_{12}^{(j)}$$

$$(k = 3,\ 4,\ \dots\ n;\ j = 2,\ 3,\ 4,\ \dots\ n)$$

С определителем (9,5) поступаем так же, как и с определителем (9,2), но начиная уже с четвертого столбца.

Предполагая, что элементы третьей строки $c_{13}^{(2)}, \dots\ c_{1n}^{(2)}$ не равны нулю, разделим все элементы столбцов, начиная с четвертого соответственно на $c_{13}^{(2)}. \dots, c_{1n}^{(2)}$, т. е. на верхний, не равный нулю элемент этого столбца.

Такое деление равносильно вынесению за знак определителя произведения $c_{13}^{(2)} \cdot c_{14}^{(2)} \dots c_{1n}^{(2)}$. Получится определитель вида

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots 0 \\ \lambda & a_{11}^{(1)} & 1 & 0 & \dots 0 \\ \lambda^2 & a_{11}^{(2)} & b_{12}^{(2)} & 1 & \dots 1 \\ \lambda^3 & a_{11}^{(3)} & b_{12}^{(3)} & d_{13}^{(3)} & \dots d_{1n}^{(3)} \\ . & . & . & . & . \\ \lambda_n & a_{11}^{(n)} & b_{12}^{(n)} & d_{13}^{(n)} & \dots d_{1n}^{(n)} \end{vmatrix} \cdot \tag{9,6}$$

где

$$d_{1k}^{(j)} = \frac{c_{1k}^{(j)}}{c_{1k}^{(2)}} (k,\ j = 3,\ 4,\ \dots\ n);$$

После этого вычтем из элементов пятого и следующего за ним столбцов соответствующие элементы четвертого столбца, отчего величина определителя не изменится.

Определитель примет вид

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots 0 \\ \lambda & a_{11}^{(1)} & 1 & 0 & \dots 0 \\ \lambda^2 & a_{11}^{(2)} & b_{12}^{(2)} & 1 & \dots 0 \\ \lambda^3 & a_{11}^{(3)} & b_{12}^{(3)} & d_{13}^{(3)} & \dots, e_{1n}^{(3)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda^n & a_{11}^{(n)} & b_{12}^{(n)} & d_{13}^{(n)} & \dots e_{1n}^{(n)} \end{vmatrix}, \tag{9,7}$$

где

$$e_{1k}^{(j)} = d_{1k}^{(j)} - d_{13}^{(j)}$$
$$(j = 3,\ 4,\ \dots,\ n);\ k = 4,\ 5,\ \dots,\ n).$$

Поступая так же с элементами пятого и следующих столбцов, получим в конце концов определитель такого вида:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots 0 \\ \lambda & a_{11}^{(1)} & 1 & 0 & \dots 0 \\ \lambda^2 & a_{11}^{(2)} & b_{12}^{(2)} & 1 & \dots 0 \\ \lambda^3 & a_{11}^{(3)} & b_{12}^{(3)} & d_{13}^{(3)} & \dots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 \\ \lambda^n & a_{11} & b_{12}^{(n)} & d_{13}^{(n)} & \dots SpA \end{vmatrix}. \tag{9,8}$$

Следует помнить, что в правом нижнем углу определителя должен получиться след SpA матрицы A. Заметим, что чем выше порядок матрицы A, собственные значения которой отыскиваются, тем эффективнее описанный метод, предложенный академиком Крыловым.

Переходя к уравнению (8,6), мы видим, что в его левой части находится определитель (9,8), множителями перед которым будут указанные выше произведения

$$(a_{12}^{(1)} \cdot a_{13}^{(1)} \dots a_{1n}^{(1)})(c_{13}^{(2)} \cdot c_{14}^{(2)} \dots c_{1n}^{(2)}) \dots, \tag{9,9}$$

а в правой части — нуль.

Эти множители можно отбросить, что равносильно сокращению уравнения на все произведение (9,9). После описанных преобразований вместо уравнения (8,6) получится уравнение

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots 0 \\ \lambda & a_{11}^{(1)} & 1 & 0 & 0 & \dots 0 \\ \lambda^2 & a_{11}^{(2)} & b_{12}^{(2)} & 1 & 0 & \dots 0 \\ \lambda^3 & a_{11}^{(3)} & b_{12}^{(3)} & d_{13}^{(3)} & 1 & \dots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \lambda^n & a_{11}^{(n)} & b_{12}^{(n)} & d_{13}^{(n)} & e_{14}^{(n)} & \dots SpA \end{vmatrix} = 0. \tag{9,10}$$

Если среди элементов, на которые требовалось производить деление, окажутся равные нулю, то надо сразу раскрывать определитель (9,2), не прибегая к дальнейшим его преобразованиям, или переставить строки так, чтобы избежать этой неприятности. Теперь применим описанный метод к нескольким матрицам, выполняя все указанные операции последовательно. В качестве матриц возьмем те, которые нам уже встретились в задачах 8,1 — 8,5.

Задача 9, 1. По методу академика А. Н. Крылова найти характеристическое уравнение матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 10 \end{bmatrix}.$$

Решение. 1. С этой матрицей мы уже встречались в задаче 8,1. Находим первые строки последовательных степеней матрицы A по формуле приведения (9, 1)

$$A^2 = \begin{bmatrix} 52 & 16 & 62 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix};$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 680 & 224 & 860 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}.$$

Первые строки матриц A^2 и A^3 можно получить проще, не прибегая к формуле (9,1): на отдельном листке бумаги написать матрицу A и этот листок приставлять поочередно к матрице A и A^2, составляя сумму произведений элементов первой строки этих матриц на соответствующие столбцы «приставной» матрицы.

2. Составляем определитель вида (9,2)

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 5 & 1 & 4 \\ \lambda^2 & 52 & 16 & 62 \\ \lambda^3 & 680 & 224 & 860 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \to \text{(первая строка заданной матрицы)} \\ \\ \\ \end{array}$$

3. Теперь разделим элементы каждого столбца, начиная с третьего, на верхние их элементы, находящиеся во второй строке:

$$D(\lambda) = 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 5 & 1 & 1 \\ \lambda^2 & 52 & 16 & \frac{62}{4} \\ \lambda^3 & 680 & 224 & \frac{860}{4} \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 5 & 1 & 1 \\ \lambda^2 & 52 & 16 & \frac{31}{2} \\ \lambda^3 & 680 & 224 & 215 \end{vmatrix}.$$

Вычтем из элементов четвертого столбца соответствующие элементы третьего. Получится определитель

$$D(\lambda) = 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 5 & 1 & 1-1 \\ \lambda^2 & 52 & 16 & \frac{31}{2}-16 \\ \lambda^3 & 680 & 224 & 215-224 \end{vmatrix} = 4 \times$$

$$\times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 5 & 1 & 0 \\ \lambda^2 & 52 & 16 & -\frac{1}{2} \\ \lambda^3 & 680 & 224 & -9 \end{vmatrix}.$$

Теперь разделим все элементы четвертого столбца на $-\frac{1}{2}$:

$$D(\lambda) = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 5 & 1 & 0 \\ \lambda^2 & 52 & 16 & 1 \\ \lambda^3 & 680 & 224 & 18 \end{vmatrix}.$$

Еще раз напомним: последний элемент последнего столбца равен следу заданной матрицы, т. е. сумме ее диагональных элементов, а предпоследний элемент должен быть равен 1. Раскроем этот определитель по элементам первого столбца, начиная с его последнего элемента.

$$D(\lambda) = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \left\{ -\lambda^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 52 & 16 & 1 \end{vmatrix} + \lambda^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \\ 680 & 224 & 18 \end{vmatrix} - \right.$$

$$\left. -\lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 52 & 16 & 1 \\ 680 & 224 & 18 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 52 & 16 & 1 \\ 680 & 224 & 18 \end{vmatrix} \right\}.$$

1. Определитель при λ^3 равен

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 52 & 16 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 16 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

(Напомним, что если все элементы какого-либо ряда определителя, кроме одного, равны нулю, то определитель равен произведению этого, не равного нулю элемента, на его алгебраическое дополнение).

2. Определитель при λ^2

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 680 & 224 & 18 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 224 & 18 \end{vmatrix} = 18.$$

3. Определитель при λ

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 52 & 16 & 1 \\ 680 & 224 & 18 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 16 & 1 \\ 224 & 18 \end{vmatrix} = 64$$

4. Свободный член

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 52 & 16 & 1 \\ 680 & 224 & 18 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -28 & 16 & 1 \\ -440 & 224 & 18 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} -28 & 1 \\ -440 & 18 \end{vmatrix} = -(-64) = 64.$$

Таким образом,

$$D(\lambda) = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)(-\lambda^3 + 18\lambda^2 + 64\lambda + 64).$$

Характеристическое уравнение запишется так:

$$D(\lambda) = 0$$

или

$$4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)(-\lambda^3 + 18\lambda^2 + 64\lambda + 64) = 0.$$

Сокращая на множитель $4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$ и умножая обе части уравнения на -1, получим окончательно

$$\lambda^3 - 18\lambda^2 - 64\lambda - 64 = 0.$$

Это же уравнение было найдено в задаче 8,1.

Задача 9,2. Найти методом академика А. Н. Крылова характеристическое уравнение матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 11 & -6 & 2 \\ -6 & 10 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \end{bmatrix}.$$

Решение. Эта матрица нам уже встречалась в задаче 8,2.

1. Находим первые строки ее степеней A^2 и A^3, пользуясь фор-

мулой (9,1) или приставной табличкой (это в данном случае, пожалуй, проще)

$$A^2 = \begin{bmatrix} 161 & -134 & 58 \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \end{bmatrix};$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 2691 & -2538 & 1206 \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}.$$

2. Составляем определитель вида (9,2)

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 11 & -6 & 2 \\ \lambda^2 & 161 & -134 & 58 \\ \lambda^3 & 2691 & -2538 & 1206 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \to \text{первая строка} \\ \quad \text{матрицы } A \\ \\ \end{array}$$

3. Разделим элементы третьего столбца на элемент -6, а элементы четвертого столбца на 2, в результате чего определитель

$$D(\lambda) = -6 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 11 & 1 & 1 \\ \lambda^2 & 161 & \frac{67}{3} & 29 \\ \lambda^3 & 2691 & 423 & 603 \end{vmatrix}.$$

Вычтем из элементов четвертого столбца соответствующие элементы третьего столбца. Тогда

$$D(\lambda) = -6 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 11 & 1 & 0 \\ \lambda^2 & 161 & \frac{67}{3} & 29 - \frac{67}{3} \\ \lambda^3 & 2691 & 423 & 603 - 423 \end{vmatrix} =$$

$$= -6 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 11 & 1 & 0 \\ \lambda^2 & 161 & \frac{67}{3} & \frac{20}{3} \\ \lambda^3 & 2691 & 423 & 180 \end{vmatrix}.$$

Разделим элементы четвертого столбца на $\frac{20}{3}$:

$$D(\lambda) = -6 \cdot 2 \cdot \frac{20}{3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 11 & 1 & 0 \\ \lambda^2 & 161 & \frac{67}{3} & 1 \\ \lambda^3 & 2691 & 423 & 27 \end{vmatrix}.$$

Контроль: Последний элемент в последнем столбце равен следу матрицы A.

Разлагаем этот определитель по элементам первого столбца, начиная с его последнего элемента

$$D(\lambda) = -6\cdot 2\cdot\frac{20}{3}\left\{-\lambda^3\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 11 & 1 & 0\\ 161 & \frac{67}{3} & 1\end{vmatrix} + \lambda^2\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 11 & 1 & 0\\ 2691 & 423 & 27\end{vmatrix} -\right.$$

$$\left. -\lambda\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 161 & \frac{67}{3} & 1\\ 2691 & 423 & 27\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}11 & 1 & 0\\ 161 & \frac{67}{3} & 1\\ 2691 & 423 & 27\end{vmatrix}\right\}.$$

Определитель при λ^3

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 11 & 1 & 0\\ 161 & \frac{67}{3} & 1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 0\\ \frac{67}{3} & 1\end{vmatrix} = 1.$$

Определитель при λ^2

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 11 & 1 & 0\\ 2691 & 423 & 27\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 0\\ 423 & -27\end{vmatrix} = 27.$$

Определитель при λ

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 161 & \frac{67}{3} & 1\\ 2691 & 423 & 27\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\frac{67}{3} & 1\\ 423 & 27\end{vmatrix} = 180.$$

Свободный член

$$\begin{vmatrix}11 & 1 & 0\\ 161 & \frac{67}{3} & 1\\ 2691 & 423 & 27\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0 & 1 & 0\\ -\frac{254}{3} & \frac{67}{3} & 1\\ -1962 & 423 & 27\end{vmatrix} =$$

(к элементам первого столбца прибавлены элементы второго столбца, умноженные на —11)

$$= -\begin{vmatrix}-\frac{254}{3} & 1\\ -1962 & 27\end{vmatrix} = -(-324) = 324.$$

Таким образом, приравнивая $D(\lambda)$, нулю, получаем характеристическое уравнение для матрицы A

$$D(\lambda) = -6 \cdot 2 \cdot \frac{20}{3}(-\lambda^3 + 27\lambda^2 - 180\lambda + 324) = 0,$$

или окончательно

$$\lambda^3 - 27\lambda^2 + 180\lambda - 324 = 0.$$

Такое же уравнение найдено и в решении задачи 8,2.

Задача 9,3. Методом академика Крылова найти характеристическое уравнение матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Решение. С этой матрицей мы встречались в задаче 8,3.

1. Определим первые строки ее степеней A^2 и A^3, пользуясь формулой приведения (9,1) или «приставной» матрицей

$$A^2 = \begin{bmatrix} 49 & 40 & 20 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix};$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 454 & 427 & 198 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}.$$

2. Составляем определитель вида (9,2)

$$D\lambda = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 6 & 3 & 2 \\ \lambda^2 & 49 & 40 & 20 \\ \lambda^3 & 454 & 427 & 198 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \to \text{первая строка} \\ \text{матрицы } A \\ \\ \end{matrix}$$

3. Разделим все элементы третьего столбца на 3 (верхний элемент этого столбца в его второй строке), а элементы четвертого на 2 (верхний элемент во второй строке этого столбца):

$$D(\lambda) = 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 6 & 1 & 1 \\ \lambda^2 & 49 & \frac{40}{3} & 10 \\ \lambda^3 & 454 & \frac{427}{3} & 99 \end{vmatrix}.$$

Теперь из элементов четвертого столбца вычтем соответствующие элементы третьего столбца

$$D(\lambda) = 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 6 & 1 & 0 \\ \lambda^2 & 49 & \frac{40}{3} & -\frac{10}{3} \\ \lambda^3 & 454 & \frac{427}{3} & -\frac{130}{3} \end{vmatrix}.$$

Разделим все элементы четвертого столбца на элемент $-\frac{10}{3}$ и получим

$$D(\lambda) = 3 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{10}{3}\right) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 6 & 1 & 0 \\ \lambda^2 & 49 & \frac{40}{3} & 1 \\ \lambda^3 & 454 & \frac{427}{3} & 13 \end{vmatrix}.$$

Разлагаем этот определитель по элементам первого столбца, начиная с его последнего элемента,

$$D(\lambda) = 3 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{10}{3}\right) \cdot \left\{ -\lambda^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 49 & \frac{40}{3} & 1 \end{vmatrix} + \lambda^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 454 & \frac{427}{3} & 13 \end{vmatrix} - \right.$$

$$\left. - \lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 49 & \frac{40}{3} & 1 \\ 454 & \frac{427}{3} & 13 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 49 & \frac{40}{3} & 1 \\ 454 & \frac{427}{3} & 13 \end{vmatrix} \right\}.$$

Определитель при λ^3

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 49 & \frac{40}{3} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{40}{3} & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Определитель при λ^2

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 454 & \frac{427}{3} & 13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{427}{3} & 13 \end{vmatrix} = 13.$$

Определитель при λ

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 49 & \frac{40}{3} & 1 \\ 454 & \frac{427}{3} & 13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{40}{3} & 1 \\ \frac{427}{3} & 13 \end{vmatrix} = 31.$$

Свободный член

$$\begin{vmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 49 & \frac{40}{3} & 1 \\ 454 & \frac{427}{3} & 13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -31 & \frac{40}{3} & 1 \\ -400 & \frac{427}{3} & 13 \end{vmatrix} =$$

(элементы второго столбца умножены на —6 и прибавлены к элементам первого столбца)

$$= -\begin{vmatrix} -31 & 1 \\ -400 & 13 \end{vmatrix} = -(-3) = 3.$$

Подставляя эти значения определителей в $D(\lambda)$ и приравнивая нулю полученное выражение, находим характеристическое уравнение

$$D(\lambda) = 3 \cdot 2\left(-\frac{10}{3}\right)(-\lambda^3 + 13\lambda^2 - 31\lambda + 3) = 0$$

и окончательно

$$\lambda^3 - 13\lambda^2 + 31\lambda - 3 = 0.$$

Это же уравнение было получено в задаче 8,3.

Задача 9,4 (для самостоятельного решения). Методом академика Крылова найти характеристическое уравнение матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ответ. $\lambda^3 - 10\lambda^2 + 24\lambda - 16 = 0$ (см. задачу 8,4).

Задача 9,5 (для самостоятельного решения). Найти методом академика Крылова характеристическое уравнение матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Промежуточные результаты:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 45 & 16 & 34 & 39 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix};$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 510 & 200 & 404 & 498 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix};$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 6060 & 2416 & 4840 & 6036 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}.$$

2. Определитель (9,2) имеет вид

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 5 & 1 & 3 & 2 \\ \lambda^2 & 45 & 16 & 34 & 39 \\ \lambda^3 & 510 & 200 & 404 & 498 \\ \lambda^4 & 6060 & 2416 & 4840 & 6036 \end{vmatrix}.$$

Ответ. $\lambda^4 - 16\lambda^3 + 52\lambda^2 - 48\lambda = 0$.

Задача 9,6 (для самостоятельного решения). Найти методом академика Крылова характеристическое уравнение матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

и ее собственные значения.

Промежуточные результаты:

Первая строка в матрице A^2

55 80 81 64 35.

Первая строка в матрице A^3

1001 1672 1863 1568 889.

Первая строка в матрице A^4

21307 36608 41877 35968 20651.

Первая строка в матрице A^5

471185 814528 938223 810656 467281.

Определитель (9,2)

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ \lambda^2 & 55 & 80 & 81 & 64 & 35 \\ \lambda^3 & 1001 & 1672 & 1863 & 1568 & 889 \\ \lambda^4 & 21307 & 36608 & 41877 & 35968 & 20651 \\ \lambda^5 & 471185 & 814528 & 938223 & 810656 & 467281 \end{vmatrix}.$$

После преобразования по указанной схеме получится характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda^2 & 55 & 20 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda^3 & 1001 & 418 & 29 & 1 & 0 \\ \lambda^4 & 21307 & 9152 & \frac{4807}{7} & \frac{230}{7} & 1 \\ \lambda^5 & 471185 & 203632 & 15587 & 814 & 35 \end{vmatrix}=0.$$

После разложения этого определителя по элементам первого столбца и вычисления определителей при степенях λ это уравнение примет вид

$$\lambda^5-35\lambda^4+336\lambda^3-1296\lambda^2+2160\lambda-1296=0.$$

Его корни — собственные значения матрицы A

$$\lambda_1=2;\quad \lambda_2=3;\quad \lambda_3=6;\quad \lambda_4=12+6\sqrt{3};\quad \lambda_5=12-6\sqrt{3}.$$

Задача 9,7 (для самостоятельного решения) Методом Крылова найти характеристическое уравнение матрицы

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

и ее собственные значения

Ответ. $\lambda^3-4\lambda^2+\lambda+6=0;$

$$\lambda_1=-1;\quad \lambda_2=2;\quad \lambda_3=3.$$

Задача 9,8. Методом Крылова найти характеристическое уравнение матрицы

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 48 & -28 & -8 & 7 \end{bmatrix}$$

и ее собственные значения.

Ответ. $\lambda^4 - 7\lambda^3 + 8\lambda^2 + 28\lambda - 48 = 0;$

$$\lambda_1 = -2;\ \lambda_2 = 2;\ \lambda_3 = 3;\ \lambda_4 = 4.$$

II. ТЕОРЕМА КЭЛИ-ГАМИЛЬТОНА.

Теорема Кэли-Гамильтона в матричном исчислении является одной из важнейших. Вот ее формулировка:

Каждая квадратная матрица удовлетворяет своему характеристическому уравнению, которое следует понимать в матричном смысле.

Объясним это.

Если для матрицы A характеристическое уравнение имеет вид (8,7)

$$(-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} A_1\lambda^{n-1} + (-1)^{n-2} A_2\lambda^{n-2} + \cdots + (-1) A_{n-1}\lambda + A_n = 0,$$

то получается матричное равенство

$$(-1)^n A^n + (-1)^{n-1} A_1A^{n-1} + (-1)^{n-2}A_2A^{n-2} + \cdots + (-1) A_{n-1} A + A_nE = 0, \qquad (9,11)$$

где E — единичная матрица того же порядка, что и A, а 0 — нулевая матрица.

Определение обратной матрицы при помощи теоремы Кэли-Гамильтона

Если A — невырожденная матрица, то равенство (9,11) позволяет найти A^{-1} — матрицу, обратную A.

Умножим (9,11) слева на A^{-1}:

$$(-1)^n A^{n-1} + (-1)^{n-1} A_1A^{n-2} + \cdots + (-1)A_{n-1}A^{-1}A + A_nA^{-1}E = 0$$

Отсюда, учитывая, что $A^{-1}A = E$, получим

$$A^{-1} = -\frac{1}{A_n}[(-1)^n A^{n-2} + (-1)^{n-1}A_1A^{n-2} + \cdots + (-1)A_{n-1}E]. \quad (9,12).$$

Эта формула дает удобный практический метод вычисления обратной матрицы, так как определить коэффициенты A_1, A_2 A_3, ..., A_n характеристического уравнения можно по формулам (8,9).

Задача 9,9. Доказать, что матрица

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 10 \end{bmatrix}$$

удовлетворяет своему характеристическому уравнению

$$\lambda^3 - 18\lambda^2 + 64\lambda - 64 = 0$$

(см. задачу 9,1).

Решение. Заменим в левой части характеристического уравнения λ на матрицу A:

$$A^3 \quad -18A^2 \quad +64A \quad -64E \tag{9,13}$$

или

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 10 \end{bmatrix}^3 - 18 \cdot \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 10 \end{bmatrix}^2 + 64 \cdot \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 10 \end{bmatrix} - 64 \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E}.$$

Убедимся, что это выражение равно нулевой матрице.

Найдем сначала квадрат, а потом куб матрицы A

$$A^2 = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 10 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 10 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 52 & 16 & 62 \\ 36 & 16 & 38 \\ 96 & 32 & 128 \end{bmatrix};$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 52 & 16 & 62 \\ 36 & 16 & 38 \\ 96 & 32 & 128 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 10 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 680 & 224 & 860 \\ 456 & 160 & 556 \\ 1344 & 448 & 1728 \end{bmatrix}.$$

Подставляем полученные степени матрицы A в выражение (9,13) и убедимся, что оно обратится в нулевую матрицу

$$\begin{bmatrix} 680 & 224 & 860 \\ 456 & 160 & 556 \\ 1344 & 448 & 1728 \end{bmatrix} - 18 \cdot \begin{bmatrix} 52 & 16 & 62 \\ 36 & 16 & 38 \\ 96 & 32 & 128 \end{bmatrix} -$$

$$+ 64 \cdot \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 10 \end{bmatrix} - 64 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 680 & 224 & 860 \\ 456 & 160 & 556 \\ 1344 & 448 & 1728 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 936 & 288 & 1116 \\ 648 & 288 & 684 \\ 1728 & 576 & 2304 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 320 & 64 & 256 \\ 192 & 192 & 128 \\ 384 & 128 & 640 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 64 & 0 & 0 \\ 0 & 64 & 0 \\ 0 & 0 & 64 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Задача 9,10. Найти матрицу, обратную матрице A предыдущей задачи.

Решение. Характеристическим уравнением матрицы A является уравнение

$$\lambda^3 - 18\lambda^2 + 64\lambda - 64 = 0$$

(см. задачу 8,1).

На основании теоремы Кэли-Гамильтона матрица A удовлетворяет этому характеристическому уравнению. Поэтому

$$A^3 - 18A^2 + 64A - 64E = 0.$$

Умножая, как это делалось при выводе формулы (9,12), обе части этого уравнения на A^{-1}, получим

$$A^{-1} \cdot A^3 - 18A^{-1} \cdot A^2 + 64A^{-1} \cdot A - 64A^{-1} \cdot E = 0,$$

откуда

$$A^2 - 18A + 64E = 64A^{-1},$$

а

$$A^{-1} = \frac{1}{64}(A^2 - 18A + 64E)$$

Матрица A^2 уже была найдена в предыдущей задаче

$$A^2 = \begin{bmatrix} 52 & 16 & 62 \\ 36 & 16 & 38 \\ 96 & 32 & 128 \end{bmatrix}.$$

Поэтому обратная к A матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{64}\left\{\begin{bmatrix} 52 & 16 & 62 \\ 36 & 16 & 38 \\ 96 & 32 & 128 \end{bmatrix} - 18 \cdot \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 10 \end{bmatrix} + 64 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right\} =$$

$$= \frac{1}{64}\left\{\begin{bmatrix} 52 & 16 & 62 \\ 36 & 16 & 38 \\ 96 & 32 & 128 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 90 & 18 & 72 \\ 54 & 54 & 36 \\ 108 & 36 & 180 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 64 & 0 & 0 \\ 0 & 64 & 0 \\ 0 & 0 & 64 \end{bmatrix}\right\} =$$

$$= \frac{1}{64}\begin{bmatrix} 26 & -2 & -10 \\ -18 & 26 & 2 \\ -12 & -4 & 12 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, обратная матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{64} \cdot \begin{bmatrix} 26 & -2 & -10 \\ -18 & 26 & 2 \\ -12 & -4 & 12 \end{bmatrix};$$

$$A^{-1} = \frac{1}{32} \cdot \begin{bmatrix} 13 & -1 & -5 \\ -9 & 13 & 1 \\ -6 & -2 & 6 \end{bmatrix};$$

Проверка:

$$A^{-1}\cdot A=\frac{1}{32}\cdot\begin{bmatrix}13 & -1 & -5\\ -9 & 13 & 1\\ -6 & -2 & 6\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}5 & 1 & 4\\ 3 & 3 & 2\\ 6 & 2 & 10\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=E.$$

Заметим, что формула Кэли-Гамильтона позволяет, зная $(n-1)$-ую степень матрицы A, найти ее n-ую степень, учитывая, что коэффициенты характеристического уравнения легко вычисляются по формулам (8,9).

Так, из характеристического уравнения задачи 9,9

$$\lambda^3-18\lambda^2+64\lambda-64=0$$

на основании теоремы Кэли-Гамильтона следует

$$A^3-18A^2+64A-64E=0,$$

откуда

$$A^3=18A^2-64A+64E.$$

Действительно, легко проверить, что найденное раньше значение (см. задачу 9,9)

$$A^3=18\cdot\begin{bmatrix}52 & 16 & 62\\ 36 & 16 & 38\\ 96 & 32 & 128\end{bmatrix}-64\cdot\begin{bmatrix}5 & 1 & 4\\ 3 & 3 & 2\\ 6 & 2 & 10\end{bmatrix}+64\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Убедитесь, что это выражение равно матрице

$$A^3=\begin{bmatrix}680 & 224 & 860\\ 456 & 160 & 556\\ 1344 & 448 & 1728\end{bmatrix}.$$

Задача 9,11 (для самостоятельного решения). Доказать, что матрица

$$A=\begin{bmatrix}11 & -6 & 2\\ -6 & 10 & -4\\ 2 & -4 & 6\end{bmatrix}$$

удовлетворяет своему характеристическому уравнению

$$\lambda^3-27\lambda^2+180\lambda-324=0$$

и найти матрицу A^{-1}, обратную матрице A.

Ответ.

$$A^{-1} = \frac{1}{324} \cdot \begin{bmatrix} 44 & 28 & 4 \\ 28 & 62 & 32 \\ 4 & 32 & 74 \end{bmatrix}.$$

Задача 9,12 (для самостоятельного решения). Для матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

характеристнческим уравнением является

$$\lambda^3 - 13\lambda^2 + 13\lambda - 3 = 0.$$

Найти A^3 и A^{-1}.

Указание. На основании теоремы Кэли-Гамильтона матрица A удовлетворяет своему характеристическому уравнению, т. е. имеет место равенство

$$A^3 - 13A^2 + 31A - 3E = 0.$$

Отсюда

$$A^3 = 13A^2 - 31A + 3E,$$

а на основании формулы (9,12)

$$A^{-1} = \frac{1}{3}(A^2 - 13A + 31E).$$

Ответ.

$$A^3 = \begin{bmatrix} 454 & 427 & 198 \\ 427 & 454 & 198 \\ 198 & 198 & 89 \end{bmatrix}; \quad A^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & -6 \\ 1 & 2 & -6 \\ -6 & -6 & 27 \end{bmatrix}.$$

Задача 9,13 (для самостоятельного решения). Для матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

характеристическим является уравнение

$$\lambda^3 - 10\lambda^2 + 24\lambda - 16 = 0.$$

Убедиться, что эта матрица удовлетворяет этому характеристическому уравнению. Определить обратную матрицу A^{-1} и найти A^3.

Ответ. $A^{-1} = \frac{1}{16}(A^2 - 10A + 24E);$

$$A^{-1} = \frac{1}{16} \cdot \begin{bmatrix} 8 & -4 & 0 \\ -4 & 8 & -4 \\ 0 & -4 & 8 \end{bmatrix};$$

$$A^3 = 10A^2 - 24A + 16E;$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 84 & 112 & 76 \\ 112 & 160 & 112 \\ 76 & 112 & 84 \end{bmatrix}.$$

Задача 9,14 (для самостоятельного решения). Найти характеристическое уравнение матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix},$$

ее собственные значения и, пользуясь теоремой Кэли-Гамильтона, обратную ей матрицу A^{-1}

Ответ. 1) $\lambda^3 - 3\lambda^2 - 9\lambda + 27 = 0;$

2) $\lambda_1 = 3; \quad \lambda_2 = 3; \quad \lambda_3 = -3;$

3) $A^{-1} = -\frac{1}{27}(A^2 - 3A - 9E)$

$$A^{-1} = -\frac{1}{27} \cdot \begin{bmatrix} -3 & -6 & -6 \\ -6 & -3 & 6 \\ -6 & 6 & -3 \end{bmatrix}.$$