ДЕСЯТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ

Содержание. Применение матриц к приведению квадратичной формы двух переменных к сумме квадратов (к каноническому виду). Упрощение уравнений кривых второго порядка.

СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Упрощениями уравнений кривых второго порядка мы уже занимались в первой части этой книги на четырнадцатом практическом занятии. Сейчас возвратимся к этому вопросу и покажем, что привлечение матричного исчисления к решению этой задачи значительно облегчит его.

Прежде всего кратко изложим теорию приведения квадратичной формы двух переменных к сумме квадратов, к так называемому каноническому виду, и полученные выводы применим к упрощению общего уравнения кривой второго порядка.

КВАДРАТИЧНАЯ ФОРМА ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ И ПРИВЕДЕНИЕ ЕЕ К СУММЕ КВАДРАТОВ (К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ).

Квадратичной формой двух переменных называется выражение вида

$$F(x_1,\ x_2) = \sum_{j=1}^{2} \sum_{i=1}^{2} a_{ij} x_i x_j. \tag{10,1}$$

В развернутом виде оно записывается так:

$$F(x_1,\ x_2) = \sum_{j=1}^{2} (a_{1j} x_1 x_j + a_{2j} x_2 x_j) =$$

$$= a_{11}x_1x_1 + a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2x_2.$$

Окончательно

$$F(x_1,\ x_2) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_1x_2 + a_{22}x_2^2. \tag{10,2}$$

Если окажется, что коэффициенты a_{12} и a_{21} при произведении x_1x_2 равны между собой, т. е. $a_{21} = a_{12}$, то формула (10,2) примет вид

$$F(x_1,\ x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2. \tag{10,2$_1$}$$

С таким видом квадратичной формы мы будем встречаться при решении задач. Легко проверить, что выражение (10,2) может быть записано в виде произведения трех матриц

$$F(x_1, x_2) = [x_1, x_2] \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \qquad (10,3)$$

Введем такие обозначения:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \qquad (10,4)$$

A — матрица коэффициентов квадратичной формы.

Если квадратичная форма имеет вид (10,2), то матрица ее коэффициентов будет симметричной и запишется так:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}. \qquad (10,4_1)$$

Таким образом, элементы, стоящие на второй диагонали, равны между собой и каждый из них равен половине коэффициента при произведении x_1x_2 в квадратичной форме ($10,2_1$). Именно в таком виде ($10,4_1$) мы и будем применять матрицу A коэффициентов квадратичной формы при решении задач. Обозначим

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}; \qquad (10,5)$$

$$X' = [x_1 \quad x_2] \qquad (10,6)$$

(матрица X' является транспонированной матрицей X).

Выражение (10,3) с этими обозначениями запишется так:

$$F(x_1, x_2) = X'AX. \qquad (10,7)$$

Задача состоит в том, чтобы выражение ($10,2_1$) или, что то же, выражение (10,7) представить в виде суммы квадратов. В этом виде оно не должно содержать члена с произведением переменных x_1 и x_2. Преобразуем это выражение к новым переменным x_1' и x_2' так, чтобы оно приняло вид

$$F(x_1', x_2') = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2, \qquad (10,8)$$

причем может оказаться, что один из коэффициентов λ_1 или λ_2 будет равен нулю. Это выражение, как легко проверить, можно представить в виде произведения трех матриц

$$F(x_1', x_2') = [x_1' \quad x_2'] \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix}, \qquad (10,9)$$

или, введя обозначения

$$X^* = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix}; \tag{10,10}$$

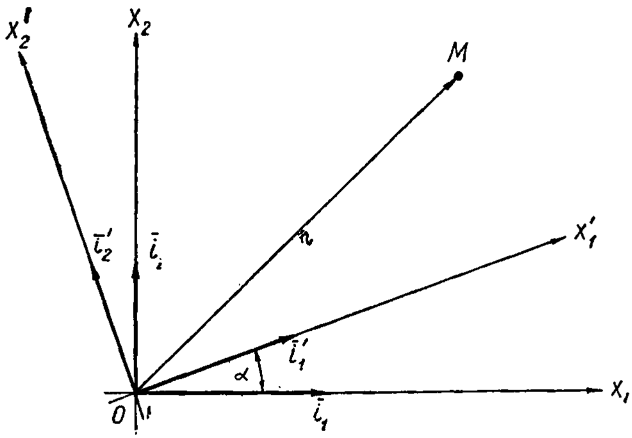
$$X'^* = [x_1' \quad x_2']; \tag{10,11}$$

$$L = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \tag{10,12}$$

получим

$$F(x_1', x_2') = X'^* L X^*. \tag{10,13}$$

Таким образом, задача сводится к определению коэффициентов λ_1 и λ_2 в выражении (10,8).



Фиг. 10,1

Перейдем к геометрическому истолкованию этого преобразования. Будем рассматривать переменные x_1 и x_2 как координаты точки M на плоскости в системе прямоугольных координат (x_1, x_2): ось Ox_1 — ось абсцисс, а ось Ox_2 — ось ординат. Сохраняя без изменений начало координат, повернем систему координат x_1Ox_2 на некоторый угол α. Мы получим новую систему координат, которую обозначим $x_1'Ox_2'$, а координаты точки M в новой системе координат — через x_1' и x_2' (фиг. 10,1).

Единичные векторы осей первоначальной системы координат назовем $\bar{i}$ и $\bar{j}$, а новой системы координат — соответственно $\bar{i}_1$ и $\bar{j}_1$. Обозначим

$$\cos(\widehat{\bar{i}, \bar{i}_1}) = \cos\alpha = l_{11}; \quad \cos(\widehat{\bar{i}, \bar{j}_1}) = \cos(90^\circ + \alpha) = -\sin\alpha = l_{12};$$

$$\cos(\widehat{\bar{j}, \bar{i}_1}) = \cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha = l_{21}; \quad \cos(\widehat{\bar{j}, \bar{j}_1}) = \cos\alpha = l_{22}. \tag{10,14}$$

Радиус-вектор точки $M(x_1, x_2)$ в первоначальной системе координат

$$\bar{r} = x_1\bar{i} + x_2\bar{j},$$

а в новой системе координат

$$\bar{r} = x_1'\bar{i}_1 + x_2'\bar{j}_1,$$

поэтому

$$x_1\bar{i} + x_2\bar{j} = x_1'\bar{i}_1 + x_2'\bar{j}_1. \qquad (10,15)$$

Умножая обе части этого равенства сначала на $\bar{i}$, а потом на $\bar{j}$, учитывая также, что скалярное произведение двух векторов равно произведению их модулей на косинус угла между ними, принимая во внимание обозначения (10,14) и то, что модуль орта равен единице, зная, что для скалярных произведений ортов осей прямоугольной системы координат имеют место равенства

$$\bar{i}_k \cdot \bar{j}_p = \begin{cases} 0, \text{ если } k \neq p \\ 1, \text{ если } k = p, \end{cases}$$

получаем

$$x_1 = x_1'l_{11} + x_2'l_{12};$$
$$x_2 = x_1'l_{21} + x_2'l_{22}. \qquad (10,16)$$

Эти формулы выражают первоначальные координаты x_1 и x_2 точки через ее новые координаты x_1' и x_2'. В матричном виде эти формулы выглядят так:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix}. \qquad (10,17)$$

Учитывая уже введенные обозначения (10,5) и (10,10) и вводя обозначение

$$S = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix}, \qquad (10,18)$$

формулы (10,17) перепишем в виде

$$X = SX^*. \qquad (10,19)$$

Матрица S называется матрицей преобразования. Заметим, что, как это следует на основании (10,14), она ортонормирована. Действительно,

$$l_{11}l_{12} + l_{21}l_{22} = 0; \quad l_{11}^2 + l_{21}^2 = 1;$$
$$l_{11}l_{21} + l_{12}l_{22} = 0; \quad l_{12}^2 + l_{22}^2 = 1.$$

Из этого вытекает, что транспонированная к ней матрица

$$S' = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} \\ l_{12} & l_{22} \end{bmatrix}$$

является для нее и обратной, т. е.

$$S' = S^{-1} \tag{10,20}$$

(убедитесь, что $SS' = E$).

Умножив обе части формулы (10,19) слева на S^{-1}, получим

$$S^{-1}X = S^{-1}SX^*,$$

или, читая справа налево,

$$X^* = S^{-1}X. \tag{10,21}$$

Для перехода от новых координат x_1' и x_2' точки M к ее первоначальным координатам надо уравнения (10,16) решить относительно x_1' и x_2'. Это легко сделать, умножив скалярно обе части равенства (10,15) сначала на $\bar{i}_1$, а потом на $\bar{j}_1$. Учитывая замечание относительно скалярного произведения ортов осей прямоугольной системы координат (стр. 240) и прочитывая полученные равенства справа налево, получим

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 l_{11} + x_2 l_{21}; \\ x_2' &= x_1 l_{12} + x_2 l_{22}. \end{aligned} \tag{10,22}$$

Эти формулы выражают новые координаты x_1' и x_2' точки M через ее первоначальные координаты.

В матричном виде они запишутся так:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} \\ l_{12} & l_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \tag{10,23}$$

Но матрица

$$\begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} \\ l_{12} & l_{22} \end{bmatrix}$$

по отношению к матрице S (10,18) является транспонированной, а поэтому она равна S', а на основании (10,20) она равна S^{-1}. Поэтому формула (10,23) совпадает с ранее полученной формулой (10,21)

$$X^* = S^{-1}X.$$

Легко проверить, что наряду с (10,21) имеет место и равенство

$$X'^* = X'S, \tag{10,24}$$

а с равенством (10,19) — равенство

$$X' = X'^*S^{-1}. \tag{10,25}$$

Теперь уже мы можем от старых переменных перейти к новым, для чего заменим в (10,7) X' по формуле (10,25), а X — по формуле (10,19). В новых переменных x_1' и x_2' функция $F(x_1, x_2)$ запишется так:

$$F(x_1', x_2') = X'^*S^{-1}ASX^*. \tag{10,26}$$

Если обозначить

$$S^{-1}AS = A^*, \tag{10,27}$$

то

$$F(x_1', x_2') = X'^*A^*X^*.$$

Сравнивая это выражение с выражением (10,13), приходим к выводу, что

$$A^* = L,$$

т. е. на основании (10,27)

$$S^{-1}AS = L.$$

Если это равенство умножить слева на S, то

$$SS^{-1}AS = SL,$$

или

$$AS = SL. \tag{10,28}$$

Из этого матричного уравнения должны быть определены элементы матрицы L, т. е. величины λ_1 и λ_2, а также элементы матрицы S, т. е. величины l_{11}, l_{12}, l_{21} и l_{22}.

Выполним умножение в левой и правой частях (10,28), учитывая (10,4), (10,12) и (10,18),

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Отсюда следует:

$$\begin{bmatrix} a_{11}l_{11} + a_{12}l_{21} & a_{11}l_{12} + a_{12}l_{22} \\ a_{21}l_{11} + a_{22}l_{21} & a_{21}l_{12} + a_{22}l_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11}\lambda_1 & l_{12}\lambda_2 \\ l_{21}\lambda_1 & l_{22}\lambda_2 \end{bmatrix}.$$

На основании условия о равенстве двух матриц получаем

$$\left.\begin{aligned} a_{11}l_{11} + a_{12}l_{21} &= l_{11}\lambda_1; \\ a_{21}l_{11} + a_{22}l_{21} &= l_{21}\lambda_1. \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} a_{11}l_{12} + a_{12}l_{22} &= l_{12}\lambda_2; \\ a_{21}l_{12} + a_{22}l_{22} &= l_{22}\lambda_2. \end{aligned}\right\}$$

Эти две системы уравнений перепишем:

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda_1)\, l_{11} + a_{12}l_{21} &= 0; & (a_{11} - \lambda_2)\, l_{12} + a_{12}l_{22} &= 0; \\ a_{21}l_{11} + (a_{22} - \lambda_1)\, l_{21} &= 0; & a_{21}l_{12} + (a_{22} - \lambda_2)\, l_{22} &= 0. \end{aligned} \tag{10,29}$$

Запишем их и в виде одной системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} (a_{11} - \lambda_i)\, l_{1i} + a_{12}l_{2i} &= 0 \\ a_{21}l_{1i} + (a_{22} - \lambda_i) l_{2i} &= 0 \end{aligned}\right\}, \tag{10,30}$$

в которой индекс i может принимать значения 1 и 2.

Эта система является системой двух линейных однородных уравнений. Для того чтобы она имела не тривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был равен нулю, т. е. чтобы

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (10,31)$$

(индекс i у λ мы опустили).

Нетрудно видеть, что уравнение (10,31) есть характеристическое уравнение матрицы A. Раскрыв определитель (10,31), получим квадратное уравнение, решив которое, определим λ_1 и λ_2, т. е. собственные значения матрицы A. Подставляя поочередно эти значения λ в систему (10,30), найдем элементы l_{11}, l_{21}, l_{12}, l_{22} матрицы преобразования S. После того как определены λ_1 и λ_2, преобразование квадратичной формы к каноническому виду можно считать законченным. Элементы матрицы S необходимы для того, чтобы по формулам (10,16) выразить первоначальные координаты x_1 и x_2 через новые координаты x_1' и x_2'.

Заметим, что, решая квадратное уравнение относительно λ, можно встретиться с тремя случаями: 1) λ_1 и λ_2 различны; 2) $\lambda_1 = \lambda_2$; 3) какое-нибудь из этих значений равно нулю.

Задача 10,1. Преобразовать к каноническому виду уравнение

$$5x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_2^2 = 24.$$

Решение. Матрица коэффициентов A в формуле (10,4) в данном случае имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix},$$

а характеристическое уравнение (10,31) запишется так:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда

$$(5-\lambda)(2-\lambda) - 4 = 0,$$

т. е.

$$\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$$
$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 6.$$

Возникает вопрос — какому из найденных значений λ приписать значение λ_1, а какому λ_2? Условимся так нумеровать значения λ, чтобы угол поворота α координатных осей x_1Ox_2 был острым, т. е. так, чтобы выполнялось неравенство $\operatorname{tg}\alpha > 0$. В матрицу S формулы (10,18) входят элементы l_{11}, l_{21} и l_{12}, l_{22}. На основании формул (10,14)

$$l_{11} = \cos\alpha; \quad l_{12} = -\sin\alpha$$
$$l_{21} = \sin\alpha; \quad l_{22} = \cos\alpha,$$

а потому

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{l_{21}}{l_{11}}, \quad \text{или} \quad \operatorname{tg}\alpha = -\frac{l_{12}}{l_{22}}. \qquad (10,32)$$

Пользуясь системами (10,29), надо так пронумеровать λ, чтобы отношения

$$\frac{l_{21}}{l_{11}} \quad \text{и} \quad -\frac{l_{12}}{l_{22}}$$

были положительными.

Примем сначала $\lambda_1 = 1$.

В первую систему (10,29) подставим $\lambda_1 = 1$. Учитывая, что

$$a_{11} = 5; \quad a_{12} = -2; \quad a_{21} = -2; \quad (a_{12} = a_{21}); \quad a_{22} = 2,$$

получим

$$(5-1)\,l_{11} - 2l_{21} = 0;$$
$$-2l_{11} + (2-1)\,l_{21} = 0.$$

Отсюда

$$4l_{11} - 2l_{21} = 0;$$
$$-2l_{11} + l_{21} = 0.$$

Очевидно, что второе уравнение является следствием первого. Отбрасывая второе уравнение, имеем

$$4l_{11} - 2l_{21} = 0,$$

откуда

$$\frac{l_{21}}{l_{11}} = 2,$$

т. е. на основании (10,32) $\operatorname{tg}\alpha = 2 > 0$.

На этом положительном значении $\operatorname{tg}\alpha$ мы и остановимся и будем считать, что $\lambda_1 = 1$, а значит, $\lambda_2 = 6$. В дальнейшем нет надобности рассматривать два уравнения в каждой из систем (10,29), так как второе уравнение в них является следствием первого.

Если бы мы в качестве λ приняли $\lambda_1 = 6$, то с учетом значений a_{11}, a_{12}, a_{22} получили бы

$$(5-6)\,l_{11} - 2l_{21} = 0;$$
$$-l_{11} - 2l_{21} = 0,$$

откуда

$$\frac{l_{21}}{l_{11}} = -\frac{1}{2},$$

т. е. на основании (10,32) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{2}$. Заметьте, что произведение найденных тангенсов равно -1. Так как при $\lambda_1 = 1$ мы получили $\operatorname{tg}\alpha > 0$, а при $\lambda_1 = 6$ оказалось, что $\operatorname{tg}\alpha < 0$, надо оставить именно эту нумерацию и взять

$$\lambda_1 = 1; \quad \lambda_2 = 6.$$

В преобразованном виде заданное уравнение запишется так (формула 10,8):

$$x_1'^2 + 6x_2'^2 = 24.$$

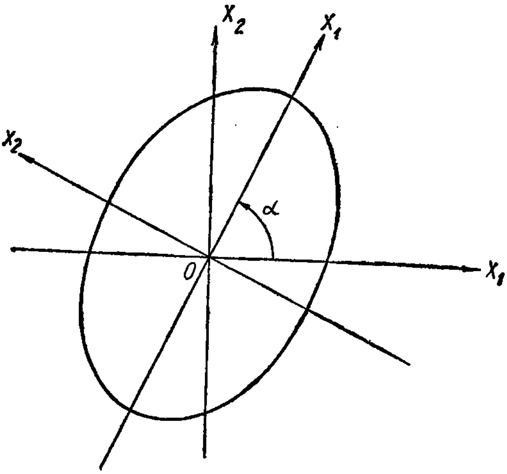
Оно определяет эллипс

$$\frac{x_1'^2}{24} + \frac{x_2'^2}{4} = 1$$

с полуосями

$$a = 2\sqrt{6}; \quad b = 2.$$

Из условия, что $\operatorname{tg} \alpha = 2$, мы определим и угол поворота.



К задаче 10,1

Задача 10,2 (для самостоятельного решения). Преобразовать к каноническому виду уравнение

$$11x^2 + 8xy + 5y^2 - 78 = 0.$$

Указание. В отличие от предыдущей задачи переменные здесь обозначены через x и y, а не через x_1 и x_2.

Корнями λ_1 и λ_2 характеристического уравнения являются числа 3 и 13. Чтобы выполнялось неравенство $\operatorname{tg} \alpha > 0$, надо занумеровать λ

$$\lambda_1 = 13; \quad \lambda_2 = 3.$$

Окажется, что

$$\frac{l_{21}}{l_{11}} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}.$$

Если бы взять $\lambda_1 = 3$, то

$$\operatorname{tg} \alpha = -2.$$

Заметьте, что произведение найденных тангенсов равно -1.

Ответ. Преобразованное уравнение имеет вид

$$13x_1^2 + 3y_1^2 - 78 = 0$$

или

$$\frac{x_1^2}{6} + \frac{y_1^2}{26} = 1.$$

Кривая — эллипс с полуосями $a = \sqrt{6}$; $b = \sqrt{26}$.

Задача 10,3 (для самостоятельного решения). Упростить уравнение линии

$$13x^2 + 6xy + 5y^2 - 56 = 0.$$

Указание. Характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} 13-\lambda & 3 \\ 3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Его корнями являются числа 4 и 14. Если принять, что $\lambda_1 = 4$, то

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{l_{21}}{l_{11}} = -3.$$

Если же $\lambda_1 = 14$, то $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$. Это значение $\operatorname{tg}\alpha$ определится из уравнения

$$-l_{11} + 3l_{21} = 0.$$

Ответ. В каноническом виде заданное уравнение запишется так:

$$14x_1^2 + 4y_1^2 - 56 = 0$$

или

$$\frac{x_1^2}{4} + \frac{y_1^2}{14} = 1.$$

Кривая — эллипс с полуосями $a = 2$; $b = \sqrt{14}$.

Теперь решим несколько задач на упрощение общего уравнения кривой второго порядка.

Задача 10,4. Привести к простейшему виду уравнение линии

$$2x_1^2 + 10x_1x_2 + 2x_2^2 + 9x_1 + 12x_2 - 2 = 0.$$

Решение. Матрица коэффициентов квадратичной формы $2x_1^2 + 10x_1x_2 + 2x_2^2$, входящей в левую часть уравнения, запишется так:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix},$$

а характеристическое уравнение этой матрицы

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda & 5 \\ 5 & 2-\lambda \end{bmatrix} = 0.$$

Его корнями являются числа -3 и 7. Выясним, какое из них принять за λ_1, а какое — за λ_2. Для этого воспользуемся первым уравнением первой системы (10,29), полагая в нем $a_{11} = 2$; $a_{12} = a_{21} = 5$; $a_{22} = 2$, $\lambda_1 = -3$.

$$[2-(-3)]\,l_{11} + 5l_{21} = 0;\ 5l_{11} + 5l_{21} = 0;$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{l_{21}}{l_{11}} = -1.$$

Таким образом, если $\lambda_1 = -3$, то $\operatorname{tg}\alpha < 0$. Положим теперь, что $\lambda_1 = 7$. Тогда из того же уравнения

$$(2-7)\,l_{11} + 5l_{21} = 0;\ -5l_{11} + 5l_{21} = 0;\ l_{21} = l_{11};$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{l_{21}}{l_{11}} = 1. \tag{10,33}$$

На этом значении мы и остановимся, приняв, таким образом, что

$$\lambda_1 = 7;\ \lambda_2 = -3.$$

Квадратичная форма $2x_1^2 + 10x_1x_2 + 2x_2^2$ приобретет вид

$$7x'^2_1 - 3x'^2_2. \tag{10,34}$$

Чтобы определить все элементы матрицы преобразования S, нам осталось найти соотношение, связывающее l_{12} и l_{22}. Для этого воспользуемся первым уравнением второй системы в (10,29):

$$(a_{11} - \lambda_2)\,l_{12} + a_{12}l_{22} = 0$$

или

$$[2-(-3)]\,l_{12} + 5l_{22} = 0;\ 5l_{12} + 5l_{22} = 0;$$

$$\frac{l_{12}}{l_{22}} = -1;\ l_{22} = -l_{12}.$$

Так как на основании (10,32)

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{l_{12}}{l_{22}},$$

то

$$\operatorname{tg}\alpha = 1.$$

Таким образом, получилось прежнее значение для $\operatorname{tg}\alpha$ — см. (10,33).

С учетом найденных зависимостей между l_{21} и l_{11} и между l_{22} и l_{12} матрица преобразования

$$S = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{11} & -l_{12} \end{bmatrix}. \tag{10,35}$$

Но следует иметь в виду, что в формуле (10,18) матрица S является ортонормированной, как это было подчеркнуто на стр. 240 и использовано в последующем выводе. Поэтому и полученную при решении этой задачи матрицу S в формуле (10,35) надо привести к такому же виду, чтобы она стала матрицей преобразования.

Нормирующий множитель для элементов первого столбца

$$n_1 = \frac{1}{\pm\sqrt{l_{11}^2 + l_{21}^2}} = \frac{1}{\pm\sqrt{l_{11}^2 + l_{11}^2}} = \frac{1}{\pm\sqrt{2l_{11}^2}} = \frac{1}{\pm\sqrt{2}\,l_{11}};$$

нормирующий множитель для элементов второго столбца

$$n_2 = \frac{1}{\pm\sqrt{2}\,l_{12}}.$$

Теперь возникает вопрос, какой знак перед корнем в выражениях нормирующих множителей n_1 и n_2 должен быть выбран. Так как мы условились угол поворота α брать в первой четверти, то $\operatorname{tg}\alpha > 0$, $\sin\alpha > 0$ и $\cos\alpha > 0$. Поэтому в матрице преобразования S элементы первого столбца $l_{11} = \cos\alpha$ и $l_{21} = \sin\alpha$ должны быть положительными: $l_{11} > 0$; $l_{21} > 0$. Во втором столбце элемент $l_{12} = -\sin\alpha$, а потому этот элемент должен быть отрицательным, ибо, если $-\sin\alpha < 0$, то $\sin\alpha > 0$ и второй элемент этого столбца $l_{22} = \cos\alpha$ и должен быть положительным. В связи с этим после нормирования матрицы S в формуле (10,35) следует взять у n_1 перед корнем знак плюс, а у n_2 — знак минус:

$$n_1 = \frac{1}{\sqrt{2}\,l_{11}}; \quad n_2 = \frac{1}{-\sqrt{2}\,l_{11}}.$$

После этого мы можем преобразовать к новым осям и линейную часть заданного уравнения $9x_1 + 12x_2 - 2$. На основании формулы (10,19)

$$X = SX^*,$$

т. е. с учетом матрицы $S_{\text{норм}}$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix},$$

или

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} x_1' - \frac{1}{\sqrt{2}} x_2' \\ x_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} x_1' + \frac{1}{\sqrt{2}} x_2' \end{aligned}\right| \begin{matrix} 9 \\ 12 \end{matrix}.$$

Отсюда

$$9x_1 + 12x_2 - 2 = \frac{21}{\sqrt{2}} x_1' + \frac{3}{\sqrt{2}} x_2' - 2.$$

Учитывая, что квадратичная форма в составе заданного уравнения приобрела вид (10,34), запишем его так:

$$7x_1'^2 - 3x_2'^2 + \frac{21\sqrt{2}}{2} x_1' + \frac{3\sqrt{2}}{2} x_2' - 2 = 0.$$

Выделим полные квадраты в левой его части, переписав уравнение:

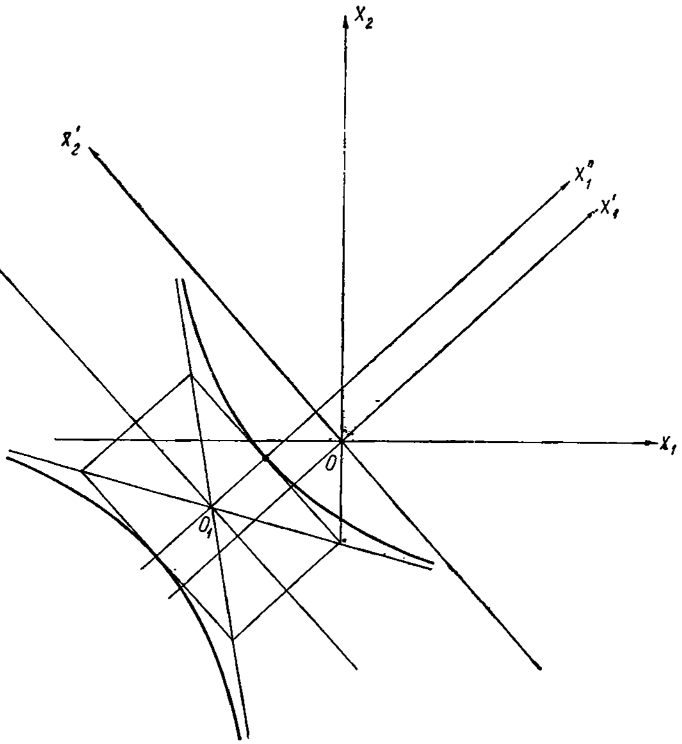
$$7\left(x_1'^2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}x_1'\right) - 3\left(x_2'^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}x_2'\right) - 2 = 0;$$

$$7\left[\left(x_1' + \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2 - \frac{9}{8}\right] - 3\left[\left(x_2' - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}\right] - 2 = 0;$$

$$7\left(x_1' + \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2 - \frac{63}{8} - 3\left(x_2' - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \frac{3}{8} - 2 = 0$$

или

$$7\left(x_1' + \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2 - 3\left(x_2' - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{19}{2}.$$



К задаче 10,4

Теперь сделаем параллельный перенос координатных осей. Положим, что

$$x_1'' = x_1' + \frac{3\sqrt{2}}{4};$$

$$x_2'' = x_2' - \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Из этих формул видно, что новое начало координат O_1 в системе координат $x_1'Ox_2'$ имеет абсциссу, равную $-\frac{3\sqrt{2}}{4}$, и ординату, равную $\frac{\sqrt{2}}{4}$, т. е. $O_1\left(-\frac{3\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ (см. формулу (12,12) преобразования координат при параллельном переносе координат в двенадцатом практическом занятии первой части этой книги). Уравнение (10,35) принимает вид

$$7x_1''^2 - 3x_1''^2 = \frac{19}{2}$$

или

$$\frac{x_1''^2}{\frac{19}{14}} - \frac{x_2''^2}{\frac{19}{6}} = 1.$$

Кривая — гипербола с полуосями

$$a = \sqrt{\frac{19}{14}};\ b = \sqrt{\frac{19}{6}}.$$

Первоначальная система координат x_1Ox_2 была повернута на угол α, тангенс которого на основании (10,33) равен 1, а сам угол $\alpha = \frac{\pi}{4}$. В этой повернутой системе координат центр гиперболы находится в точке

$$\left(-\frac{3\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right).$$

Задача 10,5. Упростить уравнение линии

$$12x^2 - 4xy - 15y^2 - 48x - 168y + 400 = 0.$$

Решение. Матрица коэффициентов квадратичной формы $12x^2 - 4xy + 15y^2$, входящей в уравнение,

$$A = \begin{bmatrix} 12 & -2 \\ -2 & 15 \end{bmatrix}.$$

Характеристическое уравнение этой матрицы

$$\begin{bmatrix} 12-\lambda & -2 \\ -2 & 15-\lambda \end{bmatrix} = 0 \qquad (10,36)$$

имеет корни 11 и 16.

Определим матрицу преобразования S. Из системы (10,29) при $\lambda = 11$ получаем

$$l_{11} - 2l_{21} = 0 \quad \text{и} \quad -4l_{12} - 2l_{22} = 0.$$

Отсюда из первого уравнения

$$\frac{l_{21}}{l_{11}} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2} > 0,$$

а из второго

$$l_{22} = -2l_{12}.$$

Угол поворота координатных осей определится из равенства

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}.$$

Так как при $\lambda = 11$ оказалось, что $\operatorname{tg}\alpha > 0$, мы припишем λ первый номер. Итак,

$$\lambda_1 = 11; \quad \lambda_2 = 16.$$

Квадратичная форма $12x^2 - 4xy + 15y^2$, входящая в уравнение, приобретает после поворота осей вид

$$11x_1^2 + 16y_1^2. \tag{10,37}$$

Матрицу преобразования S, учитывая, что $l_{21} = \frac{1}{2} l_{11}$, а $l_{22} = -2l_{12}$, запишем так:

$$S = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ \frac{1}{2} l_{11} & -2l_{12} \end{bmatrix}. \tag{10,38}$$

Нормирующий множитель первого столбца

$$n_1 = \frac{1}{\pm\sqrt{l_{11}^2 + \left(\frac{1}{2} l_{11}\right)^2}} = \frac{2}{\pm\sqrt{5}\, l_{11}}.$$

Нормирующий множитель второго столбца

$$n_2 = \frac{1}{\pm\sqrt{l_{12}^2 + (-2l_{12})^2}} = \frac{1}{\pm\sqrt{5}\, l_{12}}.$$

На основании разъяснений относительно выбора знака у корня в выражении для n_1 и n_2 (стр. 248) выбираем у n_1 знак плюс, а у n_2 — минус

$$n_1 = \frac{2}{\sqrt{5}\, l_{11}}; \quad n_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}\, l_{12}}.$$

Внося эти множители в матрицу (10,38), получаем

$$S_{\text{норм}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$$

Обратимся к преобразованию линейной части $-48x-168y+400$ заданного уравнения.

По формуле (10,19) выразим x и y через новые координаты x_1 и y_1:

$$\dot{X} = SX^*;$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

(здесь x_1 заменен на x, а x_2 на y).

$$x = \frac{2}{\sqrt{5}} x_1 - \frac{1}{\sqrt{5}} y_1$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{5}} x_1 + \frac{2}{\sqrt{5}} y_1. \qquad (10,39)$$

С помощью этих формул линейная часть заданного уравнения

$$-48x - 168y + 400 = -\frac{264}{\sqrt{5}} x_1 - \frac{288}{\sqrt{5}} y_1 + 400.$$

С учетом того, что квадратичная часть заданного уравнения на основании (10,37) преобразовалась в $11x_1^2 + 16y_1^2$, все заданное уравнение перепишется так:

$$11x_1^2 + 16y_1^2 - \frac{264}{\sqrt{5}} x_1 - \frac{288}{\sqrt{5}} y_1 + 400 = 0.$$

Теперь нам осталось выделить полные квадраты

$$\left(11x_1^2 - \frac{264}{\sqrt{5}} x_1\right) + \left(16y_1^2 - \frac{288}{\sqrt{5}} y_1\right) + 400 = 0;$$

$$11\left(x_1^2 - \frac{24}{\sqrt{5}} x_1\right) + 16\left(y_1^2 - \frac{18}{\sqrt{5}} y_1\right) + 400 = 0;$$

$$11\left[\left(x_1 - \frac{12}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{144}{5}\right] + 16\left[\left(y_1 - \frac{9}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{81}{5}\right] + 400 = 0;$$

$$11\left(x_1 - \frac{12}{\sqrt{5}}\right)^2 + 16\left(y_1 - \frac{9}{\sqrt{5}}\right)^2 - 576 + 400 = 0;$$

$$11\left(x_1 - \frac{12}{\sqrt{5}}\right)^2 + 16\left(y_1 - \frac{9}{\sqrt{5}}\right)^2 = 176. \qquad (10,40)$$

Сделаем параллельный перенос координатной системы x_1Oy_1: введем замену

$$x_2 = x_1 - \frac{12}{\sqrt{5}}; \quad y_2 = y_1 - \frac{9}{\sqrt{5}}.$$

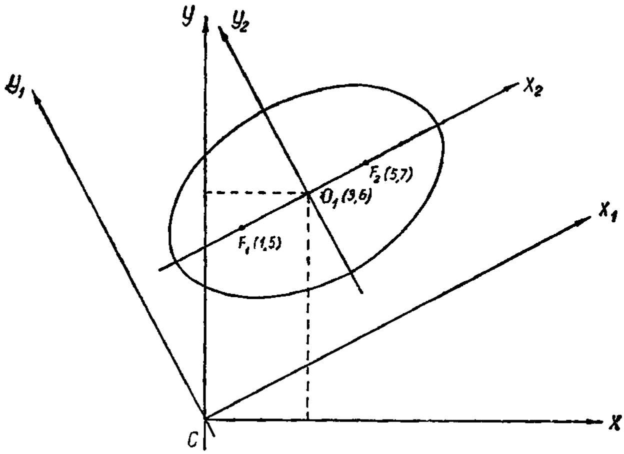
Этим преобразованием начало повернутой системы координат перенесено в точку $O_1\left(\frac{12}{\sqrt{5}}, \frac{9}{\sqrt{5}}\right)$ (учесть, что это координаты нового начала в системе координат x_1Oy_1).

В системе координат $x_2O_1y_2$ уравнение (10,40) запишется так:

$$11x_2^2 + 16y_2^2 = 176$$

или

$$\frac{x_2^2}{16} + \frac{y_2^2}{11} = 1.$$



К задаче 10,5

Кривая — эллипс. Его полуоси: $a = 4$; $b = \sqrt{11}$. Координаты нового начала O_1 в системе координат x_1Oy_1 равны $\frac{12}{\sqrt{5}}$ и $\frac{9}{\sqrt{5}}$; $O_1\left(\frac{12}{\sqrt{5}}; \frac{9}{\sqrt{5}}\right)$.

Докажите, что координаты нового начала O_1 в первоначальной системе координат равны (3; 6), а фокусы находятся в точках с координатами (1; 5); (5; 7).

Задача 10,6 (для самостоятельного решения). Упростить уравнение линии

$$3x^2 - 8xy + 3y^2 + 8x + 8y - 39 = 0$$

и определить координаты ее центра и фокусов в первоначальной системе координат.

Указания и промежуточные результаты

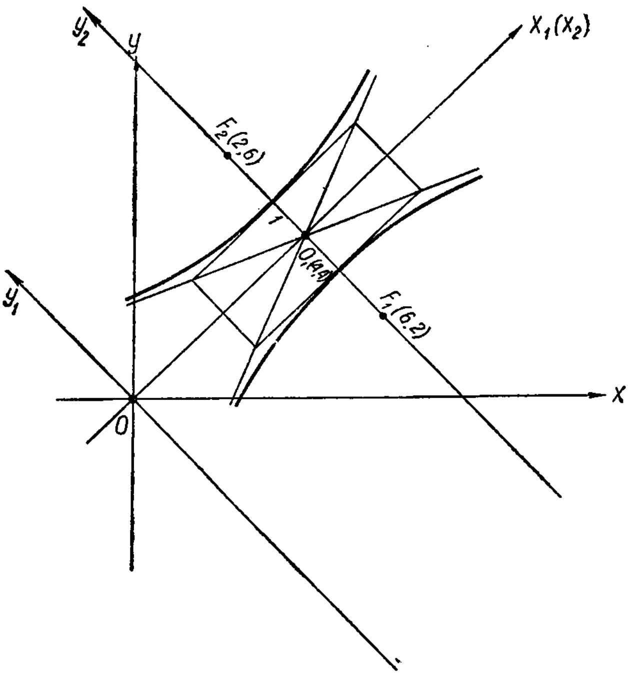
1. Матрица коэффициентов

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}.$$

2. Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 6\lambda - 7 = 0.$$

3. За λ_1 принять $\lambda = -1$, а $\lambda_2 = 7$.



К задаче 10,6

4. Квадратичная форма уравнения $3x^2 - 8xy + 3y^2$ зуется к виду

$$-x_1^2 + 7y_1^2.$$

5. Угол поворота определится из условия $\operatorname{tg}\alpha = 1$

$$l_{21} = l_{11};\ l_{22} = -l_{12}.$$

6. Нормирующие множители

$$n_1 = \frac{1}{\sqrt{2}\,l_{11}};\ n_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}\,l_{12}}.$$

7. Нормированная матрица преобразования

$$S_{\text{норм}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Линейная часть заданного уравнения $8x + 8y - 39$ преобразуется к виду $\frac{16}{\sqrt{2}} x_1 - 39$.

Ответ. Кривая — гипербола. Ее каноническое уравнение

$$\frac{y_2^2}{1} - \frac{x_2^2}{7} = 1.$$

В первоначальной системе координат ее центр находится в точке (4; 4), а фокусы — в точке (2; 6) и (6; 2).

Задача **10,7** (для самостоятельного решения). Упростить уравнение линии

$$144x^2 - 120xy + 25y^2 - 1090x - 2616y + 24961 = 0.$$

Указания и промежуточные результаты

1. Матрица коэффициентов

$$A = \begin{bmatrix} 144 & -60 \\ -60 & 25 \end{bmatrix}.$$

2. Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 169\lambda = 0.$$

Принять, что $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 169$. Квадратичная форма $144x^2 - 120xy + 25y^2$ преобразуется в $169y_1^2$.

3. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{5}$; $l_{21} = \frac{12}{5} l_{11}$; $l_{22} = -\frac{5}{12} l_{12}$.

4. Нормированная матрица преобразования

$$S_{\text{норм}} = \begin{bmatrix} \frac{5}{13} & -\frac{12}{13} \\ \frac{12}{13} & \frac{5}{13} \end{bmatrix}.$$

5. Линейная часть уравнения

$$-1090x + 2616y + 24961$$

преобразуется к виду $-2834x_1 + 24961$.

О т в е т. Кривая — парабола, определяемая уравнением $13y_2^2 = 218x_2$. В системе координат x_1Oy_1, вершина параболы находится в точке $\left(\frac{229}{26};\ 0\right)$.

Задача 10,8. Упростить уравнение линии

$$8x^2 + 4xy + 5y^2 + 48x - 24y + 108 = 0$$

и определить координаты ее фокусов в первоначальной системе координат.

Промежуточные результаты

1. Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 13\lambda + 36 = 0.$$

2. Матрица преобразования

$$S_{\text{норм}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$$

4. В повернутой системе координат x_1Oy_1 заданное уравнение приобретет вид

$$9x_1^2 + 4y_1^2 + \frac{72}{\sqrt{5}}x_1 - \frac{96}{\sqrt{5}}y_1 + 108 = 0.$$

5. После выделения полных квадратов это уравнение запишется так:

$$9\left(x_1 + \frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2 + 4\left(y_1 - \frac{12}{\sqrt{5}}\right)^2 = 36.$$

О т в е т.

$$\frac{x_2^2}{4} + \frac{y_2^2}{9} = 1.$$

Координаты фокусов в первоначальной системе координат:

$$(-5;\ 6);\ (-3,\ 2),$$