ОДИННАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание. Поверхности уровня, производная по направлению, градиент функции.

Это и шесть следующих практических занятий посвящаются векторному анализу.

Прежде чем решать задачи из этого практического занятия, рекомендуется повторить основы векторной алгебры, в особенности такие понятия, как скалярное и векторное произведения, векторно-скалярное произведение, двойное векторное произведение, а также основы теории проекций.

Ниже для справок помещены основные понятия и формулы векторной алгебры.

1. Вектор и его координаты. В прямоугольной системе координат каждому вектору $\bar{a}$ ставятся в соответствие три числа — его проекции a_x, a_y и a_z на координатные оси Ox, Oy, Oz. Эти числа называются координатами вектора, а вектор записывается в виде $\bar{a}\{a_x, a_y, a_z\}$. Если точка $A(x_1, y_1, z_1)$ — начало вектора, а точка $B(x_2, y_2, z_2)$ — его конец, то его проекции на оси прямоугольной системы координат равны разностям между одноименными координатами его конца и начала

$$a_x = x_2 - x_1;\quad a_y = y_2 - y_1;\quad a_z = z_2 - z_1.$$

Учитывая эти формулы, вектор $\bar{a}$ можно записать и в таком виде:

$$\bar{a}\{x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1\}.$$

2. Длина вектора. Длина вектора $\bar{a}$, или (что то же) его модуль, обозначается одним из символов $|\bar{a}|$ или a и определяется по формуле

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

3. Равенство векторов. Два вектора одинаковой длины, лежащие на параллельных прямых и одинаково направленные, называются равными.

4. Произведение вектора на скаляр. Произведением вектора $\bar{a}$ на скаляр m называется вектор, модуль которого равен ma — произведению числа m на модуль вектора $\bar{a}$. Этот новый вектор направлен так же, как и вектор $\bar{a}$, если $m > 0$, и противоположно ему, если $m < 0$. Вектор $-\bar{a}$ называется противоположным вектору $\bar{a}$.

5. Единичный вектор. Орт. Вектор, по направлению совпадающий с данным вектором и по модулю (длине) равный единице, называется *единичным вектором* данного вектора, или *ортом*. Единичный вектор обозначается той же буквой, что и данный, но с ноликом в виде показателя степени. Таким образом, единичный вектор вектора $\bar{a}$ обозначается $\bar{a}^0$

$$\bar{a} = a\bar{a}^0.$$

6. Направляющие косинусы вектора. Косинусы углов, которые вектор составляет с положительными направлениями координатных осей, называются направляющими косинусами вектора. Углы, составляемые вектором с координатными осями Ox, Oy и Oz, обозначаются в дальнейшем соответственно через α, β и γ.

Между направляющими косинусами вектора существует соотношение

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

7. Проекция вектора на ось. Проекция вектора $\bar{a}$ на ось есть *скалярная величина*, равная произведению модуля вектора на косинус угла между направлением оси и направлением вектора:

$$a_l = \text{пр}_{\bar{l}}\bar{a} = a\cos(\bar{l}, \bar{a}).$$

Проекции вектора $\bar{a}$ на оси Ox, Oy и Oz прямоугольной системы координат обозначаются соответственно через a_x, a_y и a_z и определяются по формулам

$$a_x = a\cos\alpha; \qquad \cos\alpha = \frac{a_x}{a};$$

$$a_y = a\cos\beta; \qquad \cos\beta = \frac{a_y}{a};$$

$$a_z = a\cos\gamma; \qquad \cos\gamma = \frac{a_z}{a}$$

(обозначение углов вектора с координатными осями дано в предыдущем пункте). Если $\bar{a}^0$ — единичный вектор, то на основании этих формул (учитывая, что в этом случае его модуль равен 1) его проекции на оси Ox, Oy, Oz равны его направляющим косинусам

$$(\bar{a}^0)_x = \cos\alpha; \ (\bar{a}^0)_y = \cos\beta; \ (\bar{a}^0)_z = \cos\gamma.$$

8. Разложение вектора по трем координатным осям прямоугольной системы координат. Если a_x, a_y и a_z — проекции вектора $\bar{a}$ на оси Ox, Oy и Oz прямоугольной системы координат, а $\bar{i}$, $\bar{j}$ и $\bar{k}$ — единичные векторы этих осей, то имеет место формула

$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}.$$

9. Радиус-вектор точки. Радиусом-вектором точки $M(x, y, z)$ называется вектор, обозначаемый обыкновенно через $\bar{r}$, имеющий начало в начале координат, а конец — в этой точке. Проекции радиуса-вектора $\bar{r}$ на оси Ox, Oy, Oz равны соответственным координатам его конца

$$r_x = x; \quad r_y = y; \quad r_z = z,$$

поэтому

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}.$$

10. Скалярное произведение двух векторов. Скалярным произведением двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, которое обозначается символом $a \cdot \bar{b}$, называется произведение их модулей на косинус угла между ними. Если угол между векторами обозначить буквой φ, то согласно этому определению скалярное произведение $\bar{a} \cdot \bar{b}$ векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ находят по формуле

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = ab\cos\varphi.$$

Скалярное произведеиие двух векторов есть число. Так как

$$b\cos\varphi = \text{пр}_{\bar{a}}\bar{b}, \text{ а } a\cos\varphi = \text{пр}_{\bar{b}}\bar{a},$$

скалярное произведение

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a\,\text{пр}_{\bar{a}}\bar{b} = b\,\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a}.$$

СВОЙСТВА СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

I. Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ перпендикулярны: $\bar{a} \perp \bar{b}$, то их скалярное произведение

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = 0.$$

II. Скалярное произведение двух равных векторов (иначе, скалярный квадрат) равно квадрату модуля

$$\bar{a} \cdot \bar{a} = a^2.$$

III. Скалярное произведение векторов подчиняется законам, аналогичным законам произведения чисел:

а) $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$ переместительный (коммутативный) закон;

б) $(\bar{a} + \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot \bar{c} + \bar{b} \cdot \bar{c}$ закон распределительности (дистрибутивности) по отношению к сложению;

в) $(n\bar{a}) \cdot \bar{b} = n(\bar{a} \cdot \bar{b})$ сочетательный (ассоциативный) закон по отношению к умножению на число.

IV. Выражение скалярного произведения $\bar{a} \cdot \bar{b}$ через проекции этих векторов на оси прямоугольной системы координат.

Если

$$\bar{a}\{a_x,\ a_y,\ a_z\}, \text{ а } \bar{b}\{b_x,\ b_y,\ b_z\},$$

то

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ перпендикулярны, то

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$$

V. Косинус угла между двумя векторами.

Если φ — угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$, то

$$\cos\varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{ab}$$

или

$$\cos\varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Если вектор $\bar{a}$ с координатными осями Ox, Oy и Oz составляет углы, соответственно равные α, β и γ, а вектор $\bar{b}$ с теми же осями составляет углы α_1, β_1 и γ_1, то косинус угла φ между этими векторами определяется по формуле

$$\cos\varphi = \cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1 + \cos\gamma\cos\gamma_1.$$

11. Векторное произведение двух векторов. Векторным произведением двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, которое обозначается символом $\bar{a} \times \bar{b}$ (читается «*a* крест *b*»), называется вектор, модуль которого равен произведению модулей перемножаемых векторов на синус угла между ними. Вектор $\bar{a} \times \bar{b}$ направлен по перпендикуляру к плоскости, определяемой перемножаемыми векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ в такую сторону, что наблюдателю, смотрящему с конца вектора $\bar{a} \times \bar{b}$ на перемножаемые векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$, кажется, что для совмещения первого множителя $\bar{a}$ со вторым множителем $\bar{b}$ по кратчайшему пути первый множитель нужно вращать против движения часовой стрелки.

Свойства векторного произведения двух векторов

I. По определению векторного произведения

$$|\bar{a} \times \bar{b}| = ab\sin\alpha.$$

II. $$\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a},$$

т. е. изменение порядка сомножителей в векторном произведении влечет за собой изменение его знака: векторное произведение не подчиняется переместительному закону.

III. Векторное произведение подчиняется распределительному закону по отношению к сложению

$$(\bar{a} + \bar{b}) \times \bar{c} = \bar{a} \times \bar{c} + \bar{b} \times \bar{c}.$$

IV. Векторное произведение подчиняется сочетательному закону относительно умножения на число

$$(n\bar{a}) \times \bar{b} = n(\bar{a} \times \bar{b}).$$

V. Если известны проекции векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ на оси прямоугольной системы координат

$$\bar{a}\{a_x, a_y, a_z\}; \quad \bar{b}\{b_x, b_y, b_z\},$$

то их векторное произведение определяется по формуле

$$\bar{a}\times\bar{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\bar{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\bar{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\bar{k},$$

где $\bar{i}$, $\bar{j}$ и $\bar{k}$ — орты координатных осей.

Отсюда видно, что проекции векторного произведения на координатные оси равны

$$(\bar{a}\times\bar{b})_x = a_y b_z - a_z b_y; \quad (\bar{a}\times\bar{b})_y = a_z b_x - a_x b_z;$$
$$(\bar{a}\times\bar{b})_z = a_x b_y - a_y b_x.$$

Векторное произведение $\bar{a}\times\bar{b}$ двух векторов $\bar{a}\{a_x, a_y, a_z\}$ и $\bar{b}\{b_x, b_y, b_z\}$ может быть записано в виде определителя

$$\bar{a}\times\bar{b} = \begin{bmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{bmatrix}.$$

VI. Условие параллельности двух векторов. Необходимым и достаточным условием параллельности двух векторов $\bar{a}\{a_x, a_y, a_z\}$ и $\bar{b}\{b_x, b_y, b_z\}$ является равенство нулю их векторного произведения, т. е. необходимым и достаточным условием параллельности двух векторов является выполнение условия $\bar{a}\times\bar{b} = 0$, или, что равносильно, пропорциональности их одноименных проекций

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

12. Векторно-скалярное произведение трех векторов. Так называется произведение трех векторов типа $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}$. Здесь сначала выполняется векторное произведение $\bar{a}\times\bar{b}$, а затем оно скалярно умножается на вектор $\bar{c}$. Через проекции сомножителей на оси прямоугольной системы координат векторно-скалярное произведение

$$(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c} = \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Свойства векторно-скалярного произведения

I. Если в векторно-скалярном произведении два каких-либо множителя коллинеарны, то это произведение равно нулю.

II. В векторно-скалярном произведении допустима циклическая перестановка множителей.

13. Векторно-векторное произведение трех векторов. Так называется произведение трех векторов, имеющее вид

$$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}).$$

Иногда векторно-векторное произведение называется двойным векторным произведением.

Векторно-векторное произведение $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c})$ трех векторов вычисляется по формуле

$$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = \bar{b}(\bar{a} \cdot \bar{c}) - \bar{c}(\bar{a} \cdot \bar{b}).$$

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

1. Физическое поле. Физическим полем называется часть пространства или все пространство, в котором происходит физическое явление.

2. Скалярное поле. Физическое поле называется скалярным, если физическое явление, его образующее, характеризуется функцией $f = f(x, y, z)$, зависящей ***только от координат*** точек пространства, в котором это явление происходит. Скалярное поле полностью определено заданием одной функции $f(x, y, z)$ трех независимых переменных. Эта функция, независимо от ее физического смысла, называется потенциалом поля.

Если физическое явление образовало скалярное поле, то каждой точке $P(x_1, y_1, z_1)$ пространства, в котором происходит это явление, ставится в соответствие определенное число, характеризующее данное явление в рассматриваемой точке. Это число есть частное значение функции $f(x, y, z)$, вычисленное в точке P (примерами скалярного поля являются: поле электростатического потенциала, давление в атмосфере).

3. Поверхность уровня. Если однозначная функция соответствует скалярному полю, образованному физическим явлением, то поверхностью уровня (или эквипотенциальной поверхностью) этого поля называется поверхность, во всех точках которой функция $f(x, y, z)$ сохраняет одно и то же значение.

Поверхности уровня определяются уравнением

$$f(x, y, z) = C, \tag{11,1}$$

где C — постоянная величина.

Придавая постоянной C различные числовые значения, получим семейство поверхностей уровня. Через каждую точку пространства проходит одна поверхность уровня. Во всех точках поверхности уровня физическое явление протекает одинаково.

Уравнение поверхности уровня, проходящей через точку $P(x_1, y_1, z_1)$, имеет вид

$$f(x, y, z) = f(x_1, y_1, z_1). \tag{11,2}$$

4. **Производная по направлению.** Производная от функции $\varphi(x, y, z)$ по направлению $(\bar{l})$ характеризует скорость изменения функции $\varphi(x, y, z)$ по этому направлению, вычисленную в точке с координатами x, y, z. Эта производная вычисляется по формуле

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos(\bar{l}, x) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos(\bar{l}, y) + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cos(\bar{l}, z). \qquad (11,3)$$

Величина производной по направлению зависит от выбора точки P, в которой она вычисляется, и от выбора направления, по которому она вычисляется. Направляющие косинусы направления $\bar{l}$ входят множителями в формулу (11,3), а координаты точки P являются аргументами частных производных, входящих в эту формулу.

5. **Градиент функции.** Градиентом скалярной функции $\varphi(x, y, z)$ называется вектор, проекции которого на координатные оси Ox, Oy и Oz соответственно равны $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ и $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$, т. е.

$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\bar{k}. \qquad (11,4)$$

На основании этого определения проекции вектора $\operatorname{grad}\varphi$ на координатные оси запишутся так:

$$(\operatorname{grad}\varphi)_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x}; \quad (\operatorname{grad}\varphi)_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y}; \quad (\operatorname{grad}\varphi)_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z} \qquad (11,5)$$

(предполагается при этом, что $\varphi(x, y, z)$ — однозначная непрерывная функция, имеющая непрерывные частные производные).

Модуль вектора $\operatorname{grad}\varphi$ вычисляется по формуле

$$|\operatorname{grad}\varphi| = \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}. \qquad (11,6)$$

Если $\bar{l}^\circ$ — единичный вектор направления $\bar{l}$

$$\bar{l}^\circ = \cos(\bar{l}, x)\,\bar{i} + \cos(\bar{l}, y)\,\bar{j} + \cos(\bar{l}, z)\,\bar{k},$$

то правая часть формулы (11,3) есть скалярное произведение вектора $\operatorname{grad}\varphi$ на этот единичный вектор $\bar{l}^\circ$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l} = \operatorname{grad}\varphi \cdot \bar{l}^\circ. \qquad (11,7)$$

Так как $|\bar{l}^\circ| = 1$, то скалярное произведение

$$\operatorname{grad}\varphi \cdot l^\circ = |\operatorname{grad}\varphi| \cdot 1 \cdot \cos(\operatorname{grad}\varphi, \bar{l}^\circ) = |\operatorname{grad}\varphi| \cdot \cos(\operatorname{grad}\varphi, \bar{l}^\circ),$$

поэтому наибольшее значение скалярного произведения $\operatorname{grad}\varphi \cdot \bar{l}^\circ$ равно модулю $\operatorname{grad}\varphi$, т. е. $|\operatorname{grad}\varphi|$. Это будет иметь место тогда, когда направление $\bar{l}$ совпадет с направлением вектора $\operatorname{grad}\varphi$, так как в этом случае $\cos(\operatorname{grad}\varphi,\ l^\circ) = 1$.

Поскольку производная функции φ по направлению характеризует скорость изменения функции φ по этому направлению, то можно сказать, что вектор $\operatorname{grad}\varphi$ есть вектор, в направлении которого скорость изменения функции φ является наибольшей и эта наибольшая скорость $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial l}\right)_{\max}$ по модулю равна $|\operatorname{grad}\varphi|$, т. е.

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial l}\right)_{\max} = |\operatorname{grad}\varphi| \tag{11,7а}$$

или

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial l}\right)_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}. \tag{11,7б}$$

Вектор $\operatorname{grad}\varphi$ ***в каждой точке направлен по нормали к поверхности уровня, проходящей через точку, в сторону возрастания функции.*** Модуль этого вектора равен скорости изменения функции $\varphi(x, y, z)$ по этому направлению нормали. Скорость изменения скалярной функции $\varphi(x, y, z)$ по некоторому направлению $(\bar{l})$ равна проекции вектора $\operatorname{grad}\varphi$ на это направление, т. е.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l} = \text{пр}_{\bar{l}}\,(\operatorname{grad}\varphi). \tag{11,8}$$

В этом состоит основное свойство градиента функции: производная функции φ по направлению $\bar{l}$ равна проекции вектора градиента φ на направление $\bar{l}$.

Величина и направление градиента не зависят от выбора координатной системы.

Задача 11,1 (для самостоятельного решения). Найти поверхности уровня потенциала $\varphi = \frac{e}{r}$ электростатического поля точечного заряда, где r — расстояние точки M поля от точки, в которой находится электрический заряд.

Решение. Поместим начало координат в точку, в которой находится заряд. По формуле (11,1)

$$\varphi = \frac{e}{r} = C; \quad r = \frac{e}{C}.$$

Если координаты точки M есть x, y и z, то

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

а

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{e}{C}.$$

Уравнение $x^2+y^2+z^2=\frac{e^2}{C^2}$ определяет семейство концентрических сфер с центром в точке, в которой помещен заряд.

Задача 11,2. Найти градиент потенциала $\varphi=\frac{e}{r}$ электростатического поля, $|\operatorname{grad}\varphi|$ и его направляющие косинусы, где $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ — расстояние точки $A(x, y, z)$ поля от начала координат, в котором находится заряд e.

Решение. Чтобы воспользоваться формулой (11,4) для определения $\operatorname{grad}\varphi$, надо найти $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ и $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$. У нас $\varphi=\frac{e}{r}$, а потому проекция градиента этой функции на ось Ox

$$(\operatorname{grad}\varphi)_x=\left(\operatorname{grad}\frac{e}{r}\right)_x=\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\left(\frac{e}{r}\right)}{\partial x}=-\frac{e}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}, \text{ но } r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Поэтому

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{r}.$$

Значит,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-e\frac{x}{r^3}; \qquad (\operatorname{grad}\varphi)_x=-e\frac{x}{r^3}.$$

Аналогично

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-e\frac{y}{r^3}; \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial z}=-e\frac{z}{r^3}.$$

Подставив значения найденных частных производных $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ и $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ в формулу (11,4), получим

$$\operatorname{grad}\varphi=-e\frac{x}{r^3}\bar{i}-e\frac{y}{r^3}\bar{j}-e\frac{z}{r^3}\bar{k}$$

или

$$\operatorname{grad}\varphi=-\frac{e}{r^3}(x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}).$$

Но вектор $x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}$ равен радиусу-вектору r точки $A(x, y, z)$ поля: $x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}=\bar{r}$, поэтому $\operatorname{grad}\varphi=-\frac{l}{r^3}\cdot r$. Учитывая, что $\frac{r}{r}=r^0$, получим окончательно

$$\operatorname{grad}\varphi=-\frac{e}{r^2}\bar{r}^0.$$

По закону Кулона напряженность $\bar{E}$ в точке электростатического поля точечного заряда определяется вектором $\frac{e}{r^2}\bar{r}^{\circ}$. Последнюю формулу поэтому можно переписать в виде

$$\operatorname{grad}\varphi = -\bar{E}$$

или

$$-\operatorname{grad}\frac{e}{r} = \bar{E}.$$

Из формулы (11,6)

$$|\operatorname{grad}\varphi| = e\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{r^6}} = e\sqrt{\frac{r^2}{r^6}} = \frac{e}{r^2};$$

$$|\operatorname{grad}\varphi| = \frac{e}{r^2}.$$

Направляющие косинусы вектора $\operatorname{grad}\frac{e}{r}$ найдем по формулам

$$\cos\left(\operatorname{grad}\frac{e}{r},\ x\right) = \frac{\left(\operatorname{grad}\frac{e}{r}\right)_x}{\left|\operatorname{grad}\frac{e}{r}\right|} = -\frac{e\,\frac{x}{r^3}}{\frac{e}{r^2}} = -\frac{x}{r};$$

$$\cos\left(\operatorname{grad}\frac{e}{r},\ y\right) = -\frac{y}{r};\quad \cos\left(\operatorname{grad}\frac{e}{r},\ z\right) = -\frac{z}{r}.$$

Задача 11,3. Найти градиент функции $\varphi(r)$, где r — расстояние точки $A(x, y, z)$ поля до начала координат $(r = \sqrt{x^2+y^2+z^2})$.

Решение. Чтобы воспользоваться формулой (11,4), определим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x},\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}\ \text{и}\ \frac{\partial\varphi}{\partial z};\quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2};$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{r}$$

и аналогично $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$; $\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$.

Получаем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} = \varphi'(r)\cdot\frac{x}{r};$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y} = \varphi'(r)\cdot\frac{y}{r};$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial z} = \varphi'(r)\cdot\frac{z}{r}.$$

Отсюда следует

$$\operatorname{grad}\varphi(r) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\bar{k} = \varphi'(r)\cdot\frac{x}{r}\bar{i} + \varphi'(r)\cdot\frac{y}{r}\bar{j} +$$

$$+\varphi'(r)\times\frac{z}{r}\bar{k} = \varphi'(r)\left[\frac{x}{r}\bar{i} + \frac{y}{r}\bar{j} + \frac{z}{r}\bar{k}\right] = \varphi'(r)\,\frac{x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}}{r} =$$

$$= \varphi'(r)\cdot\frac{\bar{r}}{r} = \varphi'(r)\cdot\bar{r}_0,$$

так как $x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}=\bar{r}$, а $\bar{r}^\circ$ — орт вектора $\bar{r}\cdot\left(\bar{r}^\circ=\frac{\bar{r}}{r}\right)$.

Итак,

$$\operatorname{grad}\varphi(r)=\varphi'(r)\cdot\bar{r}^0. \tag{11,9}$$

Рассмотрим важные частные случаи:

1) $\varphi(r)=r$; $\varphi'(r)=1$;

Тогда

$$\operatorname{grad} r=\bar{r}^0=\frac{\bar{r}}{r}; \tag{11,10}$$

$$2)\ \varphi(r)=\frac{1}{r};\quad \varphi'(r)=-\frac{1}{r^2};$$

$$\operatorname{grad}\frac{1}{r}=-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\bar{r}}{r}.$$

Окончательно

$$\operatorname{grad}\frac{1}{r}=-\frac{\bar{r}}{r^3}. \tag{11,11}$$

Если C — постоянная величина, то

$$\operatorname{grad}\frac{C}{r}=-\frac{C}{r^3}\cdot\bar{r}. \tag{11,12}$$

Укажем на одно из применений только что полученного результата.

По закону Ньютона материальная точка O массы m притягивает материальную точку $A(x, y, z)$ массы 1 с силой $\bar{F}$, модуль которой $F=k\frac{m}{r^2}$, где $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, а k — постоянная притяжения.

Эта сила направлена от A к O.

Поместим в точку O начало координат. Обозначим через $\bar{r}$ радиус-вектор $\overline{OA}$ точки A, а соответствующий ему единичный вектор — через $\bar{r}^0\left(\bar{r}^0=\frac{\bar{r}}{r}\right)$.

Тогда $-\bar{r}^0$ будет единичным вектором для вектора $\overline{AO}$, противоположного вектору $\bar{r}=\overline{OA}$. Сила $\bar{F}$ будет равна ее численной величине F, умноженной на $-\bar{r}^\circ$, и

$$\bar{F}=k\frac{m}{r^2}\cdot(-\bar{r}^0)$$

$$\bar{F}=-k\frac{m}{r^2}\cdot\frac{\bar{r}}{r},$$

т. е.

$$\bar{F}=-k\frac{m}{r^3}\cdot\bar{r}.$$

На основании формул (11,11) и (11,12)

$$\bar{F} = \operatorname{grad}\frac{km}{r}.$$

Легко проверить, что проекции силы притяжения F_x, F_y и F_z являются частными производными функции $V = \frac{km}{r}$ соответственно по координатам x, y и z. Действительно, из $\bar{F} = -k\frac{m}{r^3}\cdot\bar{r}$ следует, что

$$\bar{F} = -k\frac{m}{r^3}(x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}),$$

а

$$F_x = -\frac{km}{r^3}x; \quad F_y = -\frac{km}{r^3}y; \quad F_z = -\frac{km}{r}z.$$

Если же взять частные производные от функции $V = \frac{km}{r^2}$, учитывая, что $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, получим

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{km}{r^2}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{km}{r^2}\cdot\frac{x}{r} = -\frac{km}{r^3}x$$

и аналогично

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{km}{r^3}y; \quad \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{km}{r^3}z,$$

т. е. проекции силы притяжения равны

$$F_x = \frac{\partial V}{\partial x}; \quad F_y = \frac{\partial V}{\partial y}; \quad F_z = \frac{\partial V}{\partial z}. \qquad (11,13)$$

Таким образом, сила притяжения $\bar{F} = -\frac{km}{r^3}\cdot\bar{r}$, о которой шла речь, является градиентом функции $V = \frac{km}{r}$, т. е.

$$\bar{F} = \operatorname{grad}\frac{km}{r},$$

а ее проекции на оси прямоугольной системы координат равны частным производным от функции $V = \frac{km}{r}$, которая называется потенциалом силы притяжения (это свойство потенциала силы притяжения было замечено Лагранжем). Поэтому для определения силы притяжения между двумя точками надо только найти ее потенциал, отыскать его частные производные по координатам x, y и z, которые равны проекциям силы притяжения, а ее модуль найдется по формуле

$$F = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2}. \qquad (11,14)$$

Если на точку A действует не только точка O, но и неподвижные точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$ с массами, соответственно равными $m_1, m_2, \ldots, m_n$, то потенциал точки A

$$V = \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \frac{m_3}{r_3} + \cdots + \frac{m_n}{r_n}\text{*}$$

или

$$V = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{r_i},$$

где r_i есть расстояние AA_i, причем предполагается что $r_i \neq 0$. Если масса непрерывно заполняет дугу кривой, поверхность или тело, то потенциал этой массы относительно точки A вычисляется по следующим формулам:

для случая кривой

$$V = \int_l \frac{dm}{r}; \tag{11,15}$$

для случая поверхности

$$V = \iint_{(s)} \frac{dm}{r}; \tag{11,16}$$

для тела

$$V = \iiint_{(V)} \frac{dm}{r}. \tag{11,17}$$

В этих формулах dm — элемент массы.

Если точка A находится вне притягивающих масс, то все входящие в эти формулы интегралы собственные.

В случае, когда точка A находится внутри притягивающей массы, r становится равным нулю, подынтегральные функции неограниченно возрастают, а интегралы делаются несобственными. Однако эти интегралы существуют и проекции силы и в данном случае определяют также по формулам (11,13). Доказательство этого положения можно найти, например, в учебнике Г. М. Фихтенгольца «Курс дифференциального и интегрального исчисления», т. III, § 638.

Задача 11,4. Вычислить потенциал однородного призматического стержня длиной $2l$ относительно материальной точки M с массой, равной 1, лежащей на продолжении его оси. При этом учесть, что поперечное сечение s стержня настолько мало, что стержень можно рассматривать как отрезок прямой линии (см. чертеж).

---

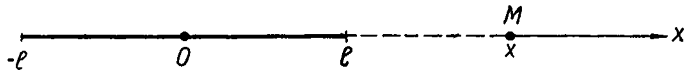
* В этой и следующих формулах принято, что постоянная притяжения $k = 1$. Это означает, что за единицу силы притяжения принята сила, с которой притягиваются друг к другу две материальные точки с массами, равными 1, находящиеся одна от другой на расстоянии, равном единице.

Решение. Поместим начало координат в середину стержня. Расстояние точки M от начала координат обозначим через x. При решении задачи будем считать стержень отрезком прямой, поэтому воспользуемся формулой (11,15). Если бы в условии задачи не было этой оговорки, интегрирование следовало бы производить по объему стержня при помощи формулы (11,17).

Входящий в числитель подынтегрального выражения (11,15) элемент массы мы найдем как произведение объема элемента стержня на его плотность

$$dm = \gamma s\, dr,$$

где γ — постоянная плотность стержня (постоянная потому, что стержень однороден), dr — элемент длины стержня.



К задаче 11,4

В формуле (11,15) r — расстояние точки M до любой точки N стержня, причем это расстояние на стержне при условии, что $x > l$, изменяется от $x - l$ до $x + l$. По формуле (11,15) находим

$$V = \int_{x-l}^{x+l} \frac{\gamma s\, dr}{r} = \gamma s \ln r \Big|_{x-l}^{x+l} = \gamma s \ln \frac{x+l}{x-l}.$$

Если бы точка P находилась на продолжении оси стержня слева от него ($x < -l$), то пределы интегрирования были бы $x + l$ и $x - l$. В этом случае

$$V = \gamma s \ln \frac{x-l}{x+l}.$$

Итак, относительно точки M потенциал стержня

$$V = \gamma s \ln \frac{x+l}{x-l}, \text{ если } x > l$$

или

$$V = \gamma s \ln \frac{x-l}{x+l}, \text{ если } x < -l.$$

Зная потенциал V, вычислим величину силы, с которой стержень притягивает точку M (формула (11,14). Если $x > l$, то

$$F_x = \frac{\partial V}{\partial x} = \gamma s \left(\frac{1}{x+l} - \frac{1}{x-l} \right) = -\gamma s \frac{2l}{x^2 - l^2}.$$

Если же $x < -l$, то

$$F_x = \frac{\partial V}{\partial x} = \gamma s \frac{2l}{x^2 - l^2}.$$

Учитывая, что масса m стержня равна его объему, умноженному на плотность (стержень однороден), имеем

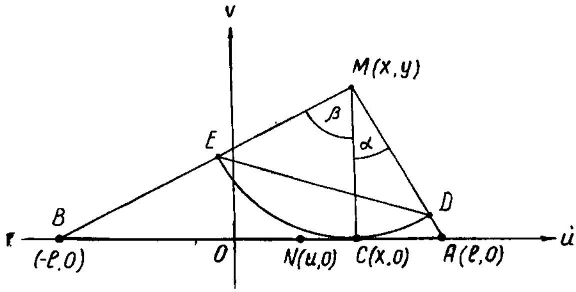
$$m = 2ls\gamma$$

и тогда

$$F_x = \pm \frac{m}{x^2 - l^2},$$

где верхний знак соответствует случаю $x < -l$, а нижний — случаю $x > l$. Если бы в точке M была помещена не единица массы, а масса m_1, то сила притяжения была бы равна

$$F = \pm \frac{mm_1}{x^2 - l^2}.$$



К задаче 11,5

Задача 11,5. Вычислить потенциал однородного стержня длиной $2l$ относительно точки M массы $m = 1$, если точка находится в любом месте плоскости (но только не внутри стержня и не на его поверхности). Стержень рассматривать как отрезок прямой.

Решение. Обозначим координаты точки M через x и y. Ее расстояние до переменной точки $N(u, O)$ стержня вычисляется по формуле.

$$r = \sqrt{(u - x)^2 + y^2}.$$

Если поперечное сечение стержня равно s, а его плотность γ, то элемент стержня длиной du имеет массу

$$dm = \gamma s\, du.$$

По формуле (11,15) потенциал стержня

$$V = \int_{-l}^{l} \frac{\gamma s\, du}{\sqrt{(u - x)^2 + y^2}},$$

где x и y следует рассматривать как величины постоянные, а переменной интегрирования является u. Выполняя интегрирование, получим

$$V = \gamma s \ln\left[u - x + \sqrt{(u-x)^2 + y^2}\right]\Big|_{-l}^{+l} =$$
$$= \gamma s\left[\ln\left(l - x + \sqrt{(l-x)^2 + y^2}\right) - \ln\left(-l - x + \sqrt{(l+x)^2 + y^2}\right)\right].$$

Окончательно

$$V = \gamma s \ln \frac{\sqrt{(l-x)^2 + y^2} + l - x}{\sqrt{(l+x)^2 + y^2} - l - x}.$$

Таким образом, потенциал V является функцией x и y.

Теперь, зная потенциал, определим силу, с которой стержень притягивает точку M. Выполним дифференцирование функции V по x и y:

$$F_x = \frac{\partial V}{\partial x} = \gamma s\left[\frac{1}{\sqrt{(l-x)^2 + y^2} + l - x}\cdot\left(\frac{-(l-x)}{\sqrt{(l-x)^2 + y^2}} - 1\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{\sqrt{(l+x)^2 + y^2} - l - x}\cdot\left(\frac{l+x}{\sqrt{(l+x)^2 + y^2}} - 1\right)\right]$$

или

$$F_x = \gamma s\left[\frac{x - l - \sqrt{(l-x)^2 + y^2}}{\left(\sqrt{(l-x)^2 + y^2} + l - x\right)\cdot\sqrt{(l-x)^2 + y^2}} - \right.$$
$$\left. - \frac{l + x - \sqrt{(l+x)^2 + y^2}}{\left(\sqrt{(l+x)^2 + y^2} - l - x\right)\sqrt{(l+x)^2 + y^2}}\right].$$

Отсюда

$$F_x = \gamma s\left[\frac{1}{\sqrt{(l+x)^2 + y^2}} - \frac{1}{\sqrt{(l-x)^2 + y^2}}\right].$$

Замечая, что знаменатель первой дроби есть расстояние точки M до левого конца стержня $B(-l, O)$, т. е. BM, а знаменатель второй дроби есть расстояние точки M до правого конца стержня $A(l, O)$, т. е. AM, получаем

$$F_x = \gamma s\left(\frac{1}{BM} - \frac{1}{AM}\right);$$

$$F_y = \frac{\partial V}{\partial y} = \gamma s\left[\frac{1}{\sqrt{(l-x)^2 + y^2} + l - x}\cdot\frac{y}{\sqrt{(l-x)^2 + y^2}} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{\sqrt{(l+x)^2 + y^2} - l - x}\cdot\frac{y}{\sqrt{(l+x)^2 + y^2}}\right].$$

В первых дробях каждого из произведений в квадратной скобке последнего выражения уничтожим иррациональность в знаменателе:

$$F_y = \frac{\gamma s}{y}\left(\frac{\sqrt{(l-x)^2 + y^2} - l + x}{\sqrt{(l-x)^2 + y^2}} - \frac{\sqrt{(l+x^2) + y^2} + l + x}{\sqrt{(l+x)^2 + y^2}}\right)$$

или

$$F_y = \frac{\gamma s}{y}\left(1 - \frac{l-x}{\sqrt{(l-x)^2+y^2}} - 1 - \frac{l+x}{\sqrt{(l+x)^2+y^2}}\right)$$

и окончательно

$$F_y = -\frac{\gamma s}{y}\left(\frac{l-x}{\sqrt{(l-x)^2+y^2}} + \frac{l+x}{\sqrt{(l+x)^2+y^2}}\right).$$

Учитывая, что $l - x = AC$; $l + x = BC$

$$\sqrt{(l-x)^2+y^2} = AM, \text{ а } \sqrt{(l+x)^2+y^2} = BM,$$

получим

$$F_y = -\frac{\gamma s}{y}\left[\frac{AC}{AM} + \frac{BC}{BM}\right].$$

Преобразуем теперь выражения, найденные для F_x и F_y. Из чертежа видно, что

$$BM = \frac{y}{\cos\beta}; \quad AM = \frac{y}{\cos\alpha}; \quad \frac{AC}{AM} = \sin\alpha; \quad \frac{BC}{BM} = \sin\beta,$$

поэтому F_x и F_y могут быть записаны в виде

$$F_x = \gamma s\left(\frac{\cos\beta}{y} - \frac{\cos\alpha}{y}\right) = \frac{\gamma s}{y}(\cos\beta - \cos\alpha);$$

$$F_y = \frac{\gamma s}{y}(\sin\alpha + \sin\beta)$$

Модуль силы притяжения

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

и тогда

$$F = \sqrt{\frac{\gamma^2 s^2}{y^2}(\cos\beta - \cos\alpha)^2 + \frac{\gamma^2 s^2}{y^2}(\sin\alpha + \sin\beta)^2} =$$

$$= \frac{\gamma s}{y}\sqrt{\cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta} =$$

$$= \frac{\gamma s}{y}\sqrt{2 - 2(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)} =$$

$$= \frac{\gamma s}{y}\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos(\alpha+\beta)} = \frac{\gamma s}{y}\sqrt{2}\sqrt{2\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

$$F = \frac{2\gamma s}{y}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}. \tag{A}$$

Из чертежа видно, что, если провести дугу окружности с центром в точке M радиусом равным ординате точке M, то длина хорды ED, которая стягивает дугу этой окружности, заключенную между отрезками, соединяющими точку M с концами стержня, будет равна

$$ED = 2y\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

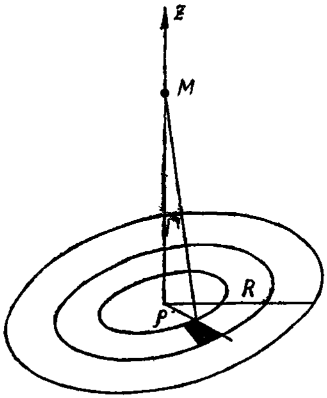
Умножая в (A) числитель и знаменатель дроби на y и замечая, что масса m хорды ED (если считать ее плотность и поперечное сечение такими же, как и у стержня AB) будет равна

$$m = \underbrace{2y\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}_{\text{длина хорды}}\cdot s\cdot\gamma,$$

получим

$$F = \frac{m}{y^2},$$

т. е. величина силы притяжения стержнем точки M равна силе, с которой эту точку притягивала бы масса m, сосредоточенная в середине дуги ED, построенной, как указано выше.



К задаче 11,6

Задача 11,6. Определить потенциал круглого однородного диска относительно точки M единичной массы, находящейся на перпендикуляре к диску, восстановленном из его центра. Расстояние точки M от диска равно z, плотность диска γ, его радиус R, толщину диска h во внимание не принимать. Определить также силу притяжения диском указанной точки.

Решение. Поскольку, как указано в условии задачи, толщину диска не следует принимать во внимание, диск можно рассматривать как круг, а поэтому при вычислении потенциала будем пользоваться формулой (11,16). Если бы этого указания не было, вычислять потенциал следовало бы по формуле (11,17).

Введем на плоскости диска полярные координаты ρ и φ, поместив полюс полярной системы координат в центр диска. В полярной системе координат элемент площади равен $\rho\, d\rho\, d\varphi$. Элемент объема диска

$$h\rho\, d\rho\, d\varphi,$$

а масса этого элемента

$$dm = \gamma h\, \rho d\, \rho d\varphi.$$

В формуле (11,16) расстояние r точки M до элемента диска равно

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$$

и тогда потенциал

$$V = \iint\limits_{(s)} \frac{\gamma h\, \rho d\rho\, d\varphi}{\sqrt{\rho^2+z^2}} = \gamma h \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}} = 2\pi\gamma h \sqrt{\rho^2+z^2}\Big|_0^R.$$

$$V = 2\pi\gamma h\left(\sqrt{R^2+z^2} - z\right).$$

Модуль силы притяжения найдем по формуле (11,14). Так как точка M симметрична по отношению к диску, то проекции F_x и F_y силы притяжения на оси Ox и Oy равны нулю: $F_x = F_y = 0$. Остается найти $F_z = \frac{dV}{dz}$

$$F_z = \frac{dV}{dz} = 2\pi\gamma h\left(\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} - 1\right);$$

$$F_z = 2\pi\gamma h \cdot \frac{z - \sqrt{R^2+z^2}}{\sqrt{R^2+z^2}}.$$

Если учесть, что масса диска $m = \pi R^2\gamma h$, то $\gamma h = \frac{m}{\pi R^2}$ и поэтому

$$F_z = \frac{2m}{R^2} \cdot \frac{z - \sqrt{R^2+z^2}}{\sqrt{R^2+z^2}}.$$

Задача 11,7. Определить потенциал и силу притяжения полого шара (шарового слоя) относительно точки M единичной массы, лежащей: 1) вне шара; 2) внутри полого пространства 3) внутри массы слоя.

Радиусы шаровых поверхностей, ограничивающих слой для внутренней и внешней поверхности, равны соответственно a и R ($a < R$), плотность γ является известной функцией ρ — расстояния точки слоя от центра шара: $\gamma = \psi(\rho)$.

Решение. Обозначим расстояние точки M от центра шара через z и расположим координатные оси так, чтобы положительное направление оси Oz проходило через точку M. На чертеже $OC = a$; $OD = R$; $OM = z$; $ON = \rho$. Применим сферические координаты. Известно, что в сферической системе координат элемент объема

$$dV = \rho^2 \sin\theta d\rho\, d\varphi\, d\theta.$$

Поскольку плотность $\gamma = \psi(\rho)$, находим, что масса элемента слоя

$$dm = \psi(\rho)\, \rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\varphi d\theta.$$

Так как мы имеем дело с телом, то для решения задачи надо воспользоваться формулой (11,17). Входящая в нее величина

$$r = \sqrt{z^2 + \rho^2 - 2\rho z\cos\theta}$$

равна расстоянию MN точки M до элемента объема и тогда потенциал

$$V = \iiint\limits_{(v)} \frac{\psi(\rho)\, \rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\varphi\, d\theta}{\sqrt{z^2 + \rho^2 - 2\rho z\cos\theta}};$$

$$V = \int\limits_a^R \psi(\rho)\, \rho^2\, d\rho \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{z^2 + \rho^2 - 2\rho z\cos\theta}}.$$

Начнем с вычисления внутреннего интеграла

$$I=\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta\,d\theta}{\sqrt{z^2+\rho^2-2\rho z\cos\theta}}=\frac{1}{\rho z}\sqrt{z^2+\rho^2-2\rho z\cos\theta}\,\Big|_0^{\pi}=$$
$$=\frac{1}{\rho z}\left(\sqrt{z^2+\rho^2+2\rho z}-\sqrt{z^2+\rho^2-2\rho z}\right).$$

При вычислении интеграла была использована формула $\int\frac{u'}{\sqrt{u}}\,dx=$ $=2\sqrt{u}+c$. Производная подкоренного выражения по переменной θ равна $2\rho z\sin\theta$. Следует учесть, что

$$\sqrt{z^2+\rho^2-2\rho z}=\sqrt{(z-\rho)^2}=$$

$=\left.\begin{matrix} z-\rho, \\ \rho-z, \end{matrix}\right\}$ если $z>\rho$ (т. е. если точка M лежит вне шарового слоя) если $z<\rho$ (т. е. если точка M лежит внутри полого пространства).

Случай 1 (фиг. 11,1). Когда точка M лежит вне шарового слоя, то $z>\rho$, $\sqrt{(z-\rho)^2}=z-\rho$, а

$$I=\frac{1}{\rho z}\Big[(z+\rho)-(z-\rho)\Big]=\frac{1}{\rho z}(z+\rho-z+\rho)=\frac{2}{z}\cdot$$

Тогда, учитывая, что $\int_0^{2\pi}d\varphi=2\pi$, получаем

$$V=\frac{2}{z}\cdot 2\pi\int_a^R\psi(\rho)\,\rho^2\,d\rho=\frac{4\pi}{z}\int_a^R\varphi(\rho)\,\rho^2\,d\rho,$$

или иначе

$$V=\frac{1}{z}\int_a^R 4\pi\psi(\rho)\,\rho^2\,d\rho. \tag{11,18}$$

Выражение $4\pi\rho^2\,d\rho$ есть объем бесконечно тонкого шарового слоя, а так как $\psi(\rho)$ — плотность, то $4\pi\psi(\rho)\,\rho^2\,d\rho$ есть масса бесконечно тонкого шарового слоя, поэтому $\int_a^R 4\pi\psi(\rho)\,\rho^2\,d\rho$ равен всей массе m рассматриваемого шарового слоя.

Окончательно относительно внешней точки потенциал шарового слоя

$$V=\frac{m}{z}. \tag{11,19}$$

Случай 2. Если точка M лежит внутри полого пространства шара, то $z<\rho$, $\sqrt{(z-\rho)^2}=\rho-z$, а интеграл

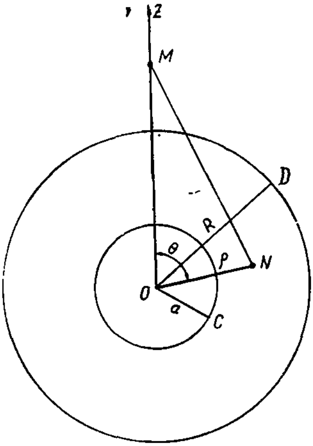
$$I=\frac{1}{\rho z}[(\rho+z)-(\rho-z)]=\frac{1}{\rho z}(\rho+z-\rho+z)=\frac{2}{\rho}$$

и тогда относительно точки, лежащей внутри полого пространства, с учетом того, что $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$,

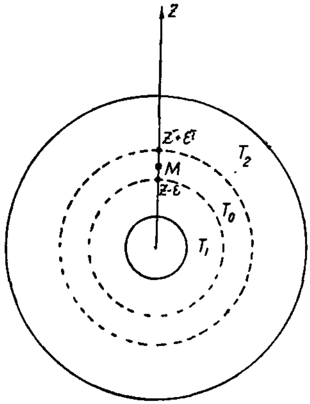
$$V = 4\pi \int\limits_a^R \psi(\rho)\, \rho d\rho. \qquad (11,20)$$

Из этой формулы следует, что внутри полого пространства потенциал шарового слоя не зависит от z, т. е. он одинаков во всех точках.

Нам осталось рассмотреть случай, когда точка M лежит внутри шарового слоя.



Фиг. 11,1



Фиг. 11,2

Случай 3 (фиг. 11,2). Проведем две концентрических шаровых поверхности: одну — радиусом $z - \varepsilon$, другую — радиусом $z + \varepsilon$. Эти две поверхности разделят шаровой слой на три части: T_1, T_0 и T_2. Точка M лежит в слое T_0. По отношению к слою T_1 она является внешней. Поэтому потенциал этого слоя, который мы обозначим через V_1, следует вычислять по формуле (11,18), а интеграл, входящий в эту формулу, надо вычислять в пределах от a до $z - \varepsilon$, после чего вычислить предел полученного выражения при $\varepsilon \to 0$. Таким образом,

$$V_1 = \frac{4\pi}{z} \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_a^{z-\varepsilon} \psi(\rho)\, \rho^2\, d\rho.$$

По отношению же к слою T_2 точку M нужно рассматривать как лежащую внутри полого пространства. Поэтому потенциал этого слоя, который мы обозначим через V_2, следует вычислять по формуле (11,20), интеграл в ней взят в пределах от $z+\varepsilon$ до R, а в полученном выражении перейти к пределу, устремляя ε к нулю. Таким образом,

$$V_2 = 4\pi \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{z+\varepsilon}^{R} \psi(\rho)\,\rho\,d\rho.$$

Потенциал V всего шарового слоя рассмотрим как сумму потенциалов слоев T_1 и T_2.

$$V = V_1 + V_2,$$

т. е.

$$V = \frac{4\pi}{z} \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{a}^{z-\varepsilon} \psi(\rho)\,\rho^2\,d\rho + 4\pi \lim \int\limits_{z+\varepsilon}^{R} \psi(\rho)\,\rho\,d\rho. \tag{11,21}$$

Если плотность $\psi(\rho)$ слоя есть величина постоянная, равная γ,

$$\psi(\rho) = \text{const} = \gamma,$$

то

$$V = \frac{4\pi}{z} \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{a}^{z-\varepsilon} \gamma\rho^2\,d\rho + 4\pi \lim \int\limits_{z+\varepsilon}^{R} \gamma\rho\,d\rho = \frac{4\pi\gamma}{z} \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\rho^3}{3}\Bigg|_{a}^{z-\varepsilon} +$$

$$+ 4\pi\gamma \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\rho^2}{2}\Bigg|_{z+\varepsilon}^{R} = \frac{4\pi\gamma}{3z} \lim_{\varepsilon\to 0} [(z-\varepsilon)^3 - a^3] + 2\pi\gamma \lim_{\varepsilon\to 0} [R^2 - (z+\varepsilon)^2].$$

Вычисляя входящие в эту формулу пределы, можно сделать вывод, что если шаровой слой однороден, то его потенциал на внутреннюю точку

$$V = \frac{4\pi\gamma}{3z}(z^3 - a^3) + 2\pi\gamma(R^2 - z^2). \tag{11,22}$$

При $a = 0$ в шаре не будет полого пространства (полный шар) и тогда при постоянной плотности γ относительно внешней точки потенциал шара на основании (11,19)

$$V = \frac{M}{z},$$

где M — масса шара.

В случае же, если точка находится внутри полного шара, $a = 0$ из (11,22) потенциал

$$V = \frac{4}{3}\pi\gamma z^2 + 2\pi\gamma R^2 - 2\pi\gamma z^2,$$

или

$$V = 2\pi\gamma R^2 - \frac{2}{3}\pi\gamma z^2. \tag{11,23}$$

Если точка лежит на поверхности шара, то $z = R$ и из (11,23) следует, что потенциал однородного шара относительно точки, лежащей на его поверхности,

$$V = 2\pi\gamma R^2 - \frac{2}{3}\pi\gamma R^2$$

или

$$V = \frac{4}{3}\pi\gamma R^2.$$

Теперь перейдем к вычислению силы, с которой точка притягивается шаровым слоем.

Случай 1 (точка лежит вне шарового слоя). Потенциал V вычисляется по формуле (11,19). Проекция F_z силы притяжения на ось Oz

$$F_z = \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{m}{z^2}. \qquad (11,24)$$

Очевидно, что проекции F_x и F_y силы притяжения на оси Ox и Oy ввиду симметрии точки M относительно шара равны нулю:

$$F_x = F_y = 0.$$

На основании (11,24) мы заключаем, что шаровой слой притягивает точку, находящуюся вне его, с такой же силой, как если бы вся его масса шара была сосредоточена в его центре.

Случай 2 (точка лежит внутри полого пространства шара). Потенциал подсчитывается по формуле (11,20), от z он не зависит. Поэтому проекция силы притяжения на ось Oz

$$F_z = \frac{\partial V}{\partial z} = 0.$$

Случай 3 (точка находится внутри однородного шарового слоя). На основании формулы (11,22)

$$F_z = \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{4\pi\gamma}{3z^2}(z^3 - a^3) + \frac{4\pi\gamma}{3z}\cdot 3z^2 - 4\pi\gamma z;$$

$$F_z = -\frac{4\pi\gamma}{3}\cdot\frac{z^3 - a^3}{z^2}. \qquad (11,25)$$

Но масса слоя T_1, которую мы обозначим через m_1, равна $\frac{4}{3}\pi\gamma(z^3 - a^3)$, поэтому

$$F_z = -\frac{m_1}{z^2}. \qquad (11,26)$$

Таким образом, получается, что сила притяжения шаровым слоем точки, находящейся внутри его, такая же, как если бы вся масса этого шарового слоя находилась в его центре. Можно показать, что это заключение остается верным и для неоднородного шарового слоя.

Укажем, что формулы (11,24) и (11,26) верны и тогда, когда вместо шарового слоя берется полный шар. Тогда в этих формулах m — масса полного шара, а m_1 масса шара радиуса $z\,(z < R)$.

Из формулы (11,23) заключаем, что притяжение полным шаром постоянной плотности внутренней точки

$$F_z = \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{4}{3}\pi\gamma z,$$

т. е. притяжение пропорционально расстоянию точки от центра шара.

Замечание. Если в точке M помещена не единичная масса, а масса m_0, то при вычислении потенциала и притяжения в соответствующих формулах этой задачи правые части следует умножить на m_0.

Задача 11,8. Дано скалярное поле $\varphi = \frac{x^2y^3}{z^2}$. В каком направлении функция φ будет возрастать быстрее всего, если исходить из точки A (1, 2, —1)?

Решение. Известно, что направление, в котором функция растет с наибольшей скоростью, указывается градиентом этой функции. Поэтому прежде всего найдем градиент заданной функции в произвольной точке. У нас

$$\varphi = \frac{x^2y^3}{z^2}; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{2xy^3}{z^2}; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{3x^2y^2}{z^2}; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\frac{2x^2y^3}{z^3}.$$

Подставляя значения этих производных в формулу (11,4), определяющую градиент функции, получаем

$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{2xy^3}{z^2}\bar{i} + \frac{3x^2y^2}{z^2}\bar{j} - \frac{2x^2y^3}{z^3}\bar{k}.$$

Теперь найдем $\operatorname{grad}\varphi$ в точке A (1, 2, —1), заменив в этой формуле x, y и z их значениями в точке A:

$$x = 1; \quad y = 2; \quad z = -1.$$

Вектор $(\operatorname{grad}\varphi)_A = 16\bar{i} + 12\bar{j} + 16\bar{k}$ и указывает направление, в котором заданная функция растет скорее всего, если исходить из точки A.

Задача 11,9 (для самостоятельного решения). Докажите, что функция $V = \frac{km}{r}\left(r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Указание. Используйте найденные в задаче 11,4 значения $\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}$.

Задача **11,10**. Доказать, что:

$$1)\ \operatorname{grad}(\varphi+\psi)=\operatorname{grad}\varphi+\operatorname{grad}\psi; \qquad (11,27)$$

$$2)\ \operatorname{grad}(\varphi\cdot\psi)=\varphi\operatorname{grad}\psi+\psi\operatorname{grad}\varphi; \qquad (11,28)$$

$$3)\ \operatorname{grad}F(\varphi)=F'(\varphi)\operatorname{grad}\varphi, \qquad (11,29)$$

где $\varphi=\varphi(x,\ y,\ z)$; $\psi=\psi(x,\ y,\ z)$.

Решение. 1. Формула (11,27) следует прямо из формулы (11,4). Действительно,

$$\operatorname{grad}(\varphi+\psi)=\frac{\partial}{\partial x}(\varphi+\psi)\bar{i}+\frac{\partial}{\partial y}(\varphi+\psi)\bar{j}+\frac{\partial}{\partial z}(\varphi+\psi)\bar{k},$$

поэтому

$$\operatorname{grad}(\varphi+\psi)=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\bar{i}+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\bar{j}+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\bar{k}=$$

$$=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\bar{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\bar{k}\right)+\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\bar{j}+\frac{\partial\psi}{\partial z}\bar{k}\right)=$$

$$=\operatorname{grad}\varphi+\operatorname{grad}\psi$$

и формула (11,27) доказана. Несмотря на свою простоту она очень важна, так как с ее помощью решается вопрос о построении суммы векторных полей.

Частный случай. Если $\psi=C$, то, поскольку в этом случае частные производные

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{\partial\psi}{\partial z}=0,$$

имеем

$$\operatorname{grad}(\varphi+C)=\operatorname{grad}\varphi.$$

2. Докажем теперь формулу (11,28)

$$\operatorname{grad}(\varphi\psi)=\frac{\partial}{\partial x}(\varphi\psi)\bar{i}+\frac{\partial}{\partial y}(\varphi\psi)\bar{j}+\frac{\partial}{\partial z}(\varphi\psi)\bar{k}.$$

Легко получаем:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\varphi\psi)=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\psi+\frac{\partial\psi}{\partial x}\varphi;$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\varphi\psi)=\frac{\partial\varphi}{\partial y}\psi+\frac{\partial\psi}{\partial y}\varphi;$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(\varphi\psi)=\frac{\partial\varphi}{\partial z}\psi+\frac{\partial\psi}{\partial z}\varphi.$$

Умножая обе части каждого из этих равенств соответственно на $\bar{i}$, $\bar{j}$ и $\bar{k}$ и почленно складывая, имеем

$$\operatorname{grad}(\varphi\psi)=\psi\operatorname{grad}\varphi+\varphi\operatorname{grad}\psi.$$

Частные случаи: а) если $\varphi = \psi$, то

$$\operatorname{grad} \varphi^2 = 2\varphi \operatorname{grad} \varphi;$$

б) если $\psi = C$, то

$$\operatorname{grad} C\varphi = C \operatorname{grad} \varphi.$$

3. Формулу (11,29) докажите самостоятельно.

Задача 11,11. Доказать, что, если $\bar{r}$ — радиус-вектор точки $A(x, y, z)$, а $\varphi = \varphi(x, y, z)$ — функция трех независимых переменных, то

$$d\varphi = \overline{dr} \cdot \operatorname{grad} \varphi$$

($\overline{dr} \cdot \operatorname{grad} \varphi$ — скалярное произведение векторов $\overline{dr}$ и $\operatorname{grad} \varphi$).

Решение. Если функция $\varphi = \varphi(x, y, z)$, то ее полный дифференциал

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z} dz. \tag{A}$$

Радиус-вектор точки $A(x, y, z)$

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k},$$

а его дифференциал

$$\overline{dr} = dx \cdot \bar{i} + dy \cdot \bar{j} + dz \cdot \bar{k}.$$

Так как вектор

$$\operatorname{grad} \varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\bar{k},$$

то скалярное произведение

$$\overline{dr} \cdot \operatorname{grad} \varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z} dz.$$

Сравнивая это выражение с выражением (A) для полного дифференциала функции φ, получаем требуемое равенство:

$$d\varphi = \overline{dr} \cdot \operatorname{grad} \varphi.$$

Отсюда можно сделать заключение, что, если

$$d\varphi = \overline{dr} \cdot \bar{a}, \tag{11,30}$$

то вектор $\bar{a}$ необходимо является градиентом некоторой функции $\varphi = \varphi(x, y, z)$:

$$\bar{a} = \operatorname{grad} \varphi. \tag{11,31}$$

Задача 11,12 (для самостоятельного решения). Найти

$$\operatorname{grad}\left(\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$

Ответ. $\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}}[-xz\bar{i}-yz\bar{j}+(x^2+y^2)\bar{k}]$.

Задача 11,13 (для самостоятельного решения). Найти

$$\operatorname{grad}(x^2+y^2+z^2).$$

Ответ. $2\bar{r}$.

Задача 11,14 (для самостоятельного решения). Найти градиент скалярного произведения $\bar{r}\cdot\bar{a}$, где $\bar{a}$ — постоянный вектор, а $\bar{r}$ — радиус-вектор точки $A(x, y, z)$ $(\bar{r}=x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k})$.

Ответ. $\operatorname{grad}(\bar{r}\cdot\bar{a})=\bar{a}$.

Полученный результат указывает на то, что вектор $\operatorname{grad}(\bar{r}\cdot\bar{a})$ во всех точках поля сохраняет постоянное направлеие, совпадающее с направлением вектора $\bar{a}$.

Кроме общего способа, основанного на применении формулы (11,4) к функции $\varphi=\bar{r}\cdot\bar{a}=a_x\cdot x+a_y\cdot y+a_z\cdot z$, можно также воспользоваться результатом задачи (11,11). У нас функция $\varphi=\bar{r}\cdot\bar{a}$ ($\bar{a}$ — постоянный вектор)

$$d\varphi=d(\bar{r}\cdot\bar{a})=\bar{a}\cdot\overline{dr}.$$

Следовательно, на основании формулы (11,31)

$$\bar{a}=\operatorname{grad}\varphi=\operatorname{grad}(\bar{r}\cdot\bar{a}).$$

Читая это равенство справа налево, получаем требуемое

$$\operatorname{grad}(\bar{r}\cdot\bar{a})=\bar{a}.$$

Задача 11,15. Определить $\operatorname{grad}\varphi(u, v)$, где $u=u(x, y, z)$, $v=v(x, y, z)$.

Решение. Чтобы воспользоваться формулой (11,4), определим частные производные $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ и $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ по формуле дифференцирования сложных функций

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x};$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y};$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}.$$

Умножая обе части каждого из этих равенств соответственно на $\bar{i}$, $\bar{j}$ и $\bar{k}$ и почленно складывая их, получим

$$\operatorname{grad} \varphi(u, v) = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \operatorname{grad} u + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \operatorname{grad} v.$$

Задача 11,16. 1. Найти производную функции $u = u(x, y, z)$ в направлении градиента функции $v = v(x, y, z)$. 2. При каком условии эта производная равна нулю?

Решение. На основании формулы (11,4)

$$\operatorname{grad} v = \frac{\partial v}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial v}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial v}{\partial z}\bar{k}.$$

Проекция вектора $\operatorname{grad} v$ на оси прямоугольной системы координат

$$(\operatorname{grad} v)_x = \frac{\partial v}{\partial x}; \quad (\operatorname{grad} v)_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad (\operatorname{grad} v)_z = \frac{\partial v}{\partial z}.$$

Направляющие косинусы вектора $\bar{a}$ находят, как известно, по формулам

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{a}; \quad \cos\beta = \frac{a_y}{a}; \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{a}.$$

Направляющие косинусы вектора $\operatorname{grad} v$ определим по формулам

$$\cos(\operatorname{grad} v, \widehat{\ } x) = \frac{(\operatorname{grad} v)_x}{|\operatorname{grad} v|} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{|\operatorname{grad} v|};$$

$$\cos(\operatorname{grad} v, \widehat{\ } y) = \frac{(\operatorname{grad} v)_y}{|\operatorname{grad} v|} = \frac{\frac{\partial v}{\partial y}}{|\operatorname{grad} v|};$$

$$\cos(\operatorname{grad} v, \widehat{\ } z) = \frac{(\operatorname{grad} v)_z}{|\operatorname{grad} v|} = \frac{\frac{\partial v}{\partial z}}{|\operatorname{grad} v|}.$$

Производную функции $u = u(x, y, z)$ по направлению вектора $\bar{l} = \operatorname{grad} v$, характеризуемому только что определенными косинусами, найдем по формуле (11,3)

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{|\operatorname{grad} v|} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\frac{\partial v}{\partial y}}{|\operatorname{grad} v|} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\frac{\partial v}{\partial z}}{|\operatorname{grad} v|}$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}}{|\operatorname{grad} v|},$$

а так как

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (\operatorname{grad} u)_x; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = (\operatorname{grad} u)_y; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = (\operatorname{grad} u)_z;$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = (\operatorname{grad} v)_x; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = (\operatorname{grad} v)_y; \quad \frac{\partial v}{\partial z} = (\operatorname{grad} v)_z,$$

то числитель последней дроби равен скалярному произведению векторов $\operatorname{grad} u$ и $\operatorname{grad} v$ и тогда окончательно

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v}{|\operatorname{grad} v|}.$$

Теперь переходим ко второму вопросу задачи.

Найденная производная $\frac{\partial u}{\partial l}$ будет равна нулю, если числитель последней дроби равен нулю, т. е. если

$$\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v = 0.$$

Из этого следует, что производная функции $u = u(x, y, z)$ по направлению градиента функции $v = v(x, y, z)$ равна нулю, если векторы $\operatorname{grad} u$ и $\operatorname{grad} v$ перпендикулярны.