ДВЕНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание. Векторное поле. Потенциальные векторы. Потенциал векторного поля. Циркуляция вектора. Линейный интеграл. Вихрь вектора.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Векторное поле. Физическое поле называется векторным, если образующее его физическое явление характеризуется вектором (например, поле силы тяжести, поле скоростей).

В случае векторного поля каждой точке P пространства, в котором происходит образовавшее его физическое явление, ставится в соответствие определенный вектор $\bar{a}(P)$, являющийся функцией координат точки, т. е. $\bar{a} = \bar{a}(x, y, z)$.

Вектор $\bar{a}(x, y, z)$ можно представить в виде

$$\bar{a}(x, y, z) = a_x(x, y, z)\bar{i} + a_y(x, y, z)\bar{j} + a_z(x, y, z)\bar{k}.$$

Из этого следует, что для полного определения векторного поля требуются три скалярные функции трех независимых переменных x, y и z:

$$a_x(x, y, z); \quad a_y(x, y, z); \quad a_z(x, y, z) —$$

— проекции вектора $\bar{a}(x, y, z)$ на оси прямоугольной системы координат (во всех последующих формулах предполагается, что эти функции непрерывны, однозначны и имеют непрерывные частные производные).

1. Потенциальный вектор. Вектор $\bar{a}$ называется потенциальным, если он является градиентом некоторой скалярной функции $\varphi(x, y, z)$ ($\bar{a} = \operatorname{grad}\varphi$). Поле потенциального вектора $\bar{a} = \operatorname{grad}\varphi$ называется потенциальным, а скалярная функция φ — *потенциалом* этого поля. В дальнейшем предполагается, что функция φ и ее частные производные до второго порядка включительно непрерывны.

Необходимым и достаточным условием потенциальности вектора $\bar{a}$ является выполнение равенств:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} &= 0; \\ \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (12,1)$$

Пример. Потенциальным векторным полем является поле силы $\overline{F} = \frac{km}{r^3}\overline{r}$ тяготения, вызываемого материальной точкой массы m, помещенной в начале координат. Здесь $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ — расстояние произвольной точки пространства $A(x, y, z)$ с массой $m_1 = 1$ до начала координат ($r \neq 0$). Потенциалом этого поля является функция $v = \frac{km}{r}$ (см. задачу 11,3).

2. **Циркуляция вектора и линейный интеграл.** Циркуляцией Γ_L вектора $\overline{a} = \overline{a}(x, y, z)$ по замкнутой линии L называется интеграл вида

$$\Gamma_L = \oint_L a_x\,dx + a_y\,dy + a_z\,dz, \tag{12,2}$$

причем, обход замкнутого контура L в правой системе координат должен происходить против движения часовой стрелки.

Если L — незамкнутая кривая, то интеграл в формуле (12,2) называется линейным интегралом вектора $\overline{a}$ и обозначается буквой u

$$u = \int_{(AB)} a_x\,dx + a_y\,dy + a_z\,dz \tag{12,3}$$

или в векторной форме

$$u = \int_{(AB)} \overline{a} \cdot d\overline{r}, \tag{12,4}$$

где $\overline{dr}$ — дифференциал радиуса-вектора точки, движущейся по кривой AB

$$\overline{dr} = dx \cdot \overline{i} + dy \cdot \overline{j} + dz \cdot \overline{k}.$$

Если вектор $\overline{a}$ — сила, то формула (12,3) определяет работу этой силы при перемещении точки по дуге AB.

3. **Векторная линия.** Векторной линией векторного поля вектора $\overline{a}$ называется кривая, в каждой точке которой касательная совпадает с направлением вектора $\overline{a}$. Через каждую точку P векторного поля вектора $\overline{a}$ проходит по одной векторной линии.

Дифференциальные уравнения векторных линий записываются так:

$$\frac{dx}{a_x} = \frac{dy}{a_y} = \frac{dz}{a_z}. \tag{12,5}$$

4. **Вихрь вектора.** Вихрем вектора, или ротором вектора $\overline{a} = \overline{a}(x, y, z)$, обозначаемым $\operatorname{rot}\overline{a}$, называется вектор, определяемый формулой

$$\operatorname{rot}\overline{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\overline{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\overline{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\overline{k}. \tag{12,6}$$

Проекции этого вектора на координатные оси равны

$$\operatorname{rot}_x \bar{a} = \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z};$$
$$\operatorname{rot}_y \bar{a} = \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}; \qquad (12,7)$$
$$\operatorname{rot}_z \bar{a} = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}.$$

Модуль вектора $\operatorname{rot} \bar{a}$ определяется формулой

$$|\operatorname{rot} \bar{a}| = \sqrt{\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)^2}. \quad (12,8)$$

Формулу (12,6) можно записать в виде, удобном для запоминания

$$\operatorname{rot} \bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}. \qquad (12,9)$$

При этом произведения символов $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ и $\frac{\partial}{\partial z}$ на a_x, a_y, a_z следует понимать так:

$$\frac{\partial}{\partial x} \cdot a_y = \frac{\partial a_y}{\partial x}; \quad \frac{\partial}{\partial y} \cdot a_x = \frac{\partial a_x}{\partial y}.$$

и т. д.

Задача 12,1. Известно, что безвихревым движением жидкости называется движение, при котором в каждой точке жидкости выполняется условие

$$\operatorname{rot} \bar{v} = 0,$$

где вектор $\bar{v} = \bar{v}(x, y, z)$ — скорость жидкости в рассматриваемой точке.

Доказать, что при безвихревом движении жидкости и существовании однозначного потенциала скорости $\bar{v}$ циркуляция скорости $\bar{v}$, взятая по любой замкнутой кривой, равна нулю.

Решение. Обозначим проекции скорости $\bar{v}$ на оси прямоугольной системы координат через v_x, v_y, v_z. Равенство $\operatorname{rot} \bar{v} = 0$ на основании формулы (12,6) можно переписать в виде

$$\operatorname{rot} \bar{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\bar{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\bar{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\bar{k} = 0.$$

Из этого следует, что

$$\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0.$$

Выполнение этих равенств является необходимым и достаточным условием для того, чтобы вектор $\bar{v}$ был потенциальным — см. определение на стр. 286 и формулы (12,1).

Поскольку вектор $\bar{v}$ потенциальный, то существует такая скалярная функция $\varphi = \varphi(x, y, z)$ — потенциал скорости, что

$$\bar{v} = \operatorname{grad} \varphi$$

(см. определение на стр. 263).
Отсюда

$$v_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x}; \quad v_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y}; \quad v_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z}, \tag{A}$$

т. е. если скорость $\bar{v}$ — потенциальный вектор, а функция $\varphi = \varphi(x, y, z)$ — потенциал скорости, то проекция скорости на координатную ось прямоугольной системы координат равна частной производной от потенциала скорости по соответствующей этой оси координате.

Из (A) следует

$$v_x\,dx + v_y\,dy + v_z\,dz = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz = d\varphi.$$

Линейный интеграл (12,3) по кривой AB от выражения $v_x\,dx + v_y\,dy + v_z\,dz$

$$\int\limits_{(AB)} v_x\,dx + v_y\,dy + v_z\,dz = \int\limits_{(AB)} d\varphi = \varphi(B) - \varphi(A); \tag{B}$$

это значит, что он не зависит от вида кривой, а только от координат ее концов A и B, так как $\varphi(A)$ и $\varphi(B)$ — значение потенциала φ в точках A и B (предполагается однозначность потенциала скорости — функции φ).

Таким образом, линейный интеграл по кривой AB от потенциального вектора равен разности значений потенциала φ в концах кривой, вдоль которой ведется интегрирование.

Если кривая AB — замкнутая, то линейный интеграл в равенстве (B) есть циркуляция скорости, а $\varphi(B) - \varphi(A) = 0$, так как точки A и B в случае замкнутости кривой AB совпадут.

Отсюда следует вывод, что *циркуляция скорости по любой замкнутой кривой при наличии однозначного потенциала равна нулю*, т. е., если $\bar{v} = \operatorname{grad}\varphi$ и φ — однозначная функция, то

$$\oint\limits_L v_x\,dx + v_y\,dy + v_z\,dz = 0.$$

(Предположение об однозначности функции φ является весьма существенным. Если φ — неоднозначная функция, то сделанный вывод не всегда верен).

Замечание. Следует иметь в виду, что теорема о равенстве нулю криволинейного интеграла от потенциального вектора по замкнутому контуру верна только тогда, когда пространство односвязно.

Задача 12,2. Доказать, что если v — потенциальный вектор ($\bar{v} = \operatorname{grad} \varphi$), то вихрь этого вектора равен нулю, т. е. что

$$\operatorname{rot} (\operatorname{grad} \varphi) = 0.$$

Решение. В предыдущей задаче было показано, что из равенства $\operatorname{rot} \bar{v} = 0$ следует, что $\bar{v}$ есть вектор потенциальный, т. е. $\bar{v} = \operatorname{grad} \varphi$. Теперь решаем обратную задачу, т. е. хотим доказать, что если вектор $\bar{v}$ потенциальный, то его вихрь равен нулю.

Итак, дано, что $\bar{v} = \operatorname{grad} \varphi$. Отсюда

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

$$(\operatorname{rot} \bar{v})_x = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z\, \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y\, \partial z}.$$

Поскольку при ограничениях, наложенных на функцию φ, изменение порядка дифференцирования не изменяет величины ее второй смешанной частной производной, то $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z\, \partial y}$, поэтому $(\operatorname{rot} \bar{v})_x = 0$. Аналогично найдем, что $(\operatorname{rot} \bar{v})_y = 0$ и $(\operatorname{rot} \bar{v})_z = 0$, а отсюда

$$\operatorname{rot} \bar{v} = 0.$$

Так как $\bar{v} = \operatorname{grad} \varphi$, то $\operatorname{rot} (\operatorname{grad} \varphi) = 0$.

Заключение. Вихрь потенциального вектора равен нулю.

Задача 12,3. Проекции ускорения частицы жидкости на оси прямоугольной системы координат даются формулами

$$W_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z;$$

$$W_y = \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial v_y}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z} v_z;$$

$$W_z = \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial v_z}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_z}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_z}{\partial z} v_z.$$

Доказать, что при существовании потенциала скорости ускорение $\overline{W}$ также является потенциальным вектором.

Решение. По условию $\bar{v} = \operatorname{grad} \varphi$, где φ — потенциал скорости. Отсюда

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Дифференцирование обеих частей каждого из этих равенств по x, y, z и t дает

$$\frac{\partial v_x}{\partial t}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial t};\quad \frac{\partial v_y}{\partial t}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial t};\quad \frac{\partial v_z}{\partial t}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial t};$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2};\quad \frac{\partial v_x}{\partial y}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y};\quad \frac{\partial v_x}{\partial z}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial z};$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial x}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial x};\quad \frac{\partial v_y}{\partial y}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2};\quad \frac{\partial v_y}{\partial z}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial z};$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial x}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial x};\quad \frac{\partial v_z}{\partial y}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial y};\quad \frac{\partial v_z}{\partial z}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}.$$

Подставляя эти значения в выражения для W_x, W_y, W_z из условия задачи, получим

$$W_x=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial t}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial z}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial z}=$$
$$=\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]+\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\};$$

$$W_y=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial t}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial z}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial z}=$$
$$=\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]+\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\};$$

$$W_z=\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial t}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial x}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial y}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}=$$
$$=\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]+\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\}.$$

Замечая, что

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2=v_x^2+v_y^2+v_z^2=v^2,$$

предыдущие равенства перепишем в виде

$$W_x=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}v^2+\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right);$$

$$W_y=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}v^2+\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right);$$

$$W_z=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2}v^2+\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)$$

и, таким образом, проекции ускорения частиц жидкости являются частными производными по координатам одной и той же функции $\frac{1}{2}v^2+\frac{\partial\varphi}{\partial t}$, а отсюда на основании определения градиента функции заключаем, что

$$\overline{W}=\operatorname{grad}\left(\frac{1}{2}v^2+\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right).$$

Итак, вектор $\overline{W}$ есть градиент некоторой функции. Это значит, что он вектор потенциальный.

Задача 12,4. Дифференциальное уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости имеет вид

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

Доказать, что при потенциальном движении жидкости потенциал скорости — функция φ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Решение. Если предположить, что движение жидкости потенциальное, то скорость $\bar{v} = \bar{v}(x, y, z)$ жидкости является градиентом некоторой функции φ:

$$\bar{v} = \operatorname{grad}\varphi,$$

а отсюда проекции скорости на оси прямоугольной системы координат равны частным производным потенциала скорости φ по соответствующим этим осям координатам, т. е.

$$v_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x}; \quad v_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y}; \quad v_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Дифференцируя обе части первого равенства по x, второго — по y, третьего — по z, получим

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}; \quad \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}.$$

Складываем эти равенства почленно:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}.$$

По условию задачи левая часть этого равенства есть нуль, следовательно, и правая его часть равна нулю, т. е.

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0. \qquad (12,10)$$

Заключение. Потенциал скорости несжимаемой жидкости удовлетворяет уравнению Лапласа (12,10).

Обычно левая часть этого уравнения обозначается сокращенно через $\Delta\varphi$, поэтому (12,10) записывается так:

$$\Delta\varphi = 0. \qquad (12,11)$$

Функция* φ, *удовлетворяющая этому уравнению, называется гармонической. В случае плоского потенциального движения несжимаемой жидкости уравнение Лапласа (12,11) имеет вид

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0. \tag{12,12}$$

Задача 12,5 (для самостоятельного решения). Доказать, что функция $\varphi=\ln r$ удовлетворяет уравнению Лапласа (12,12) ($r=\sqrt{x^2+y^2}$).

Задача 12,6. Дано поле вектора

$$\bar{a}=2x\cdot\bar{i}-y\cdot\bar{j}+z\cdot\bar{k}$$

Найти уравнение векторных линий.

Решение. Дифференциальные уравнения векторных линий имеют вид (12,5). В нашем случае

$$a_x=2x;\quad a_y=-y;\quad a_z=z$$

и система дифференциальных уравнений (12,5) запишется так:

$$\frac{dx}{2x}=\frac{dy}{-y}=\frac{dz}{z}$$

или

$$1)\ \frac{dx}{2x}=-\frac{dy}{y};\quad 2)\ \frac{dx}{2x}=\frac{dz}{z}.$$

Интегрируя, получаем семейства векторных линий

$$1)\ \frac{1}{2}\ln x=-\ln y+\ln C$$

и

$$2)\ \frac{1}{2}\ln x=\ln z+\ln C_2,$$

а отсюда уже

1) $\ln(\sqrt{x}\,y)=\ln C$; $\sqrt{x}\,y=C$; $xy^2=C^2$; $y^2=\frac{C_1}{x}$, где $C_1=C^2$.

2) $\ln\sqrt{x}=\ln C_2 z$; $\sqrt{x}=C_2 z$; $x=C_2^2z^2$ или $z^2=C_3x$, где $C_3=\frac{1}{C_2^2}$.

Итак, имеем следующие уравнения семейства векторных линий:

$$y^2=\frac{C_1}{x}\ \text{ и }\ z^2=C_3x.$$

Надо иметь в виду, что начало координат является здесь особой точкой: если $x\to 0$, то $y\to\infty$ при $C_1\neq 0$.

Задача 12,7. Движение жидкости задано проекциями скорости

$$V_x = -ky; \quad V_y = kx,$$

где k — постоянная величина. Требуется найти линии тока и направление движения.

Решение. Если в уравнениях (12,5) a_x, a_y, a_z — проекции скорости частицы жидкости, то эти уравнения при установившемся движении жидкости называются дифференциальными уравнениями линий тока. В каждый данный момент времени каждая частица жидкости, находящаяся на линии тока, имеет скорость, совпадающую по направлению с касательной к этой линии (движение жидкости называется установившимся, если проекция скорости частицы жидкости не зависит от времени).

В нашем случае эти дифференциальные уравнения (12,5) запишутся так:

$$\frac{dx}{-ky} = \frac{dy}{kx}.$$

Отсюда

$$kx\,dx = -ky\,dy.$$

Сокращая на k и интегрируя, получаем

$$\frac{x^2}{2} = -\frac{y^2}{2} + \frac{C}{2}$$

или

$$x^2 + y^2 = C$$

— линии тока — семейство концентрических окружностей с центром в начале координат.

Теперь определим направление движения. У нас $V_x = -ky$; $V_y = kx$, поэтому

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{k^2y^2 + k^2x^2}; \quad V = k\sqrt{x^2 + y^2};$$

$$\cos(\bar{V}, x) = \frac{V_x}{V} = \frac{-ky}{k\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \cos(\bar{V}, x) = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$\cos(\bar{V}, y) = \frac{V_y}{V} = \frac{kx}{k\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \cos(\bar{V}, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Из равенства $\cos(\bar{V}, x) = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ следует, что если $x > 0$ и $y > 0$, то $\cos(\bar{V}, x) < 0$ и скорость $\bar{V}$ с положительным направлением оси Ox образует тупой угол. Это говорит о том, что движение происходит против хода часовой стрелки

Задача 12,7а. Движение жидкости задано проекциями скорости

$$V_x = -x + t; \quad V_y = y + t.$$

Определить:

1. Уравнение семейства линий тока, а также линию тока, проходящую через точку $A(-2, -3)$ в момент времени $t = 0$.

2. Траекторию частицы жидкости, которая в момент времени $t = 0$ находилась в точке $A(-2, -3)$.

Решение. 1. Дифференциальное уравнение семейства линий тока на основании (12,5) имеет вид

$$\frac{dx}{-x+t} = \frac{dy}{y+t}.$$

Считая t — фиксированным и интегрируя, получим

$$-\ln(-x+t) = \ln(y+t) - \ln C,$$

откуда

$$(t-x)(y+t) = C. \tag{A}$$

Линиями тока в каждый момент времеии является семейство гипербол. При $t = 0$ это семейство имеет уравнение

$$-xy = C.$$

Подставляя сюда на основании условия задачи координаты точки $A(-2, -3)$, получим $C = -6$. Искомым уравнением линии тока, соответствующим условию задачи, будет

$$xy = 6.$$

2. Чтобы ответить на второй вопрос задачи, надо знать следующее:

1. Движение жидкости называется неустановившимся, если проекции скорости V_x, V_y и V_z являются функциями не только координат, но и времени, т. е. если

$$V_x = V_x(x, y, z, t); \; V_y = V_y(x, y, z, t); \; V_z = V_z(x, y, z, t).$$

2. Дифференциальные уравнения траекторий жидкой частицы в этом случае имеют вид

$$\frac{dx}{V_x(x, y, z, t)} = \frac{dy}{V_y(x, y, z, t)} = \frac{dx}{V_z(x, y, z, t)} = dt.$$

Тогда, чтобы получить траекторию частицы жидкости, надо проинтегрировать такую систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= V_x(x, y, z, t); \\ \frac{dy}{dt} &= V_y(x, y, z, t); \\ \frac{dz}{dt} &= V_z(x, y, z, t). \end{aligned}\right\}$$

В нашем случае уравнения этой системы запишутся так

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -x + t; \\ \frac{dy}{dt} &= y + t. \end{aligned}\right\}$$

Каждое из них — линейное неоднородное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами.

Перепишем их в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} + x &= t; \\ \frac{dy}{dt} - y &= t. \end{aligned}\right\}$$

Интегрируем эти уравнения по правилам интегрирования линейных дифференциальных уравнений:

$$x = C_1 e^{-t} + t - 1; \quad y = C_2 e^{t} - t - 1. \tag{B}$$

Подставляем в эти уравнения $t = 0$, $x = -2$, $y = 3$. Получится, что $C_1 = -1$, $C_2 = -2$ и уравнения траектории примут вид

$$x = -e^{-t} + t - 1;$$
$$y = -2e^{t} - t - 1.$$

Замечание. Сравнивая уравнения (А) и (В), видим, что при неустановившемся движении жидкости линии тока не совпадают с траекториями жидкой частицы (при установившемся движении жидкости линии тока являются одновременно и траекториями частиц).

Задача 12,8. (для самостоятельного решения). Поле скоростей жидкости задано следующим образом:

$$V_x = \frac{Q}{4\pi} \cdot \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}};$$

$$V_y = \frac{Q}{4\pi} \cdot \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}};$$

$$V_z = \frac{Q}{4\pi} \cdot \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

где Q — постоянная величина.

Определить линии тока.

Ответ.

$y = C_1 x$ (семейство плоскостей, проходящих через ось Oz);

$z = C_2 x$ (семейство плоскостей, проходящих через ось Oy).

Линии пересечения плоскостей одного семейства с плоскостями другого семейства — прямые, проходящие через начало координат.

Задача 12,9. (для самостоятельного решения). Напряженность электростатического поля определяется вектором $\frac{e^2}{r^2}\bar{r}^\circ$, где e — положительный электрический заряд, r — расстояние точки поля до заряда, $\bar{r}^\circ$ — единичный вектор вектора $\bar{r}$, соединяющего точку поля с зарядом.

Определить векторные линии поля.

Ответ. Лучи, выходящие из заряда.

Задача 12,10. Твердое тело вращается с постоянной угловой скоростью $\bar{\omega}$ вокруг некоторой оси. Известно, что во вращательном движении линейная скорость $\bar{v}$ точек тела определяется по формуле

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r},$$

где $\bar{r}$ — радиус-вектор точки $A(x, y, z)$ тела. Найти $\operatorname{rot} \bar{v}$.

Решение. Направим вектор $\bar{\omega}$ по оси вращения, которую примем за ось Oz, в сторону, откуда вращение представляется происходящим против движения часовой стрелки. Проекции векторов $\bar{\omega}$ и $\bar{r}$ на координатные оси равны:

$$\omega_x = 0;\ \omega_y = 0;\ \omega_z = \omega;$$
$$r_x = x;\ r_y = y;\ r_z = z. \tag{A}$$

Так как вектор $\bar{v}$ равен векторному произведению векторов $\bar{\omega}$ и $\bar{r}$, то

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ r_x & r_y & r_z \end{vmatrix}.$$

Подставляя значения проекций векторов $\bar{\omega}$ и $\bar{r}$ из равенства (А), получаем

$$\bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\omega y\bar{i} + \omega x\bar{j},$$

откуда следует, что проекции вектора $\bar{v}$ равны:

$$v_x = -\omega y;\ v_y = \omega x;\ v_z = 0.$$

Чтобы воспользоваться формулой (12,6) для определения ротора вектора, найдем входящие в эту формулу частные производные от проекций вектора $\bar{v}$:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0;\quad \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\omega;\quad \frac{\partial V_x}{\partial z} = 0;$$
$$\frac{\partial v_y}{\partial x} = \omega;\quad \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0;\quad \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0;$$
$$\frac{\partial v_z}{\partial x} = \frac{\partial v_z}{\partial y} = \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

Подставляем эти значения в формулу (12,6):

$$\operatorname{rot}\bar{v} = \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\bar{k} = [\omega - (-\omega)]\cdot\bar{k} = 2\omega\bar{k}.$$

Итак,

$$\operatorname{rot}\bar{v} = 2\omega\bar{k}.$$

В связи с тем что вектор $\bar{\omega} = \omega\bar{k}$, приходим к заключению:

$$\operatorname{rot}\bar{v} = 2\bar{\omega},$$

а отсюда следует: *ротор линейной скорости точек вращающегося твердого тела имеет постоянное значение во всех точках тела и равен удвоенной угловой скорости его вращения.*

Задача 12,11 (для самостоятельного решения). Найти векторные линии поля вектора

$$\bar{a} = -\omega y\bar{i} + \omega x\bar{j} + h\bar{k},$$

где ω и h — величины постоянные.

Указания.

1. Уравнения векторных линий запишутся так:

$$\frac{dx}{-\omega y} = \frac{dy}{\omega x} = \frac{dz}{h} = dt$$

или

$$\frac{dx}{dt} = -\omega y; \quad \frac{dy}{dt} = \omega x; \quad \frac{dz}{dt} = h. \qquad (A)$$

2. Из первых двух уравнений получаем, дифференцируя обе части каждого из них по t,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y.$$

3. Общими решениями этих линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами будут:

$$x = A_1\cos\omega t + B_1\sin\omega t; \qquad (B)$$
$$y = A_2\cos\omega t + B_2\sin\omega t.$$

4. Учесть уравнения (A) и показать, что между произвольными постоянными существуют соотношения

$$B_1 = -A_2; \ B_2 = A_1$$

и тогда уравнения (B) перепишутся так:

$$x = A_1 \cos \omega t - A_2 \sin \omega t;$$
$$y = A_2 \cos \omega t + A_1 \sin \omega t. \qquad (C)$$

5. Если $A_1 = R\cos\alpha$, а $A_2 = R\sin\alpha$, т. е. $R = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{A_2}{A_1}$, то уравнения ($C$) запишутся так:

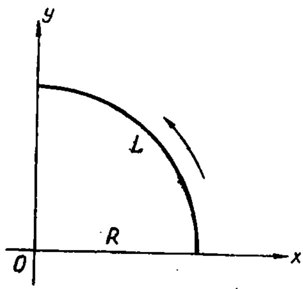
$$x = R\cos(\omega t + \alpha);$$
$$y = R\sin(\omega t + \alpha). \qquad (D)$$

Третье уравнение системы (A) дает

$$z = ht + A_3. \qquad (E)$$

Таким образом, введены только три произвольные R, α и A_3, как и должно быть.

Уравнения (D) и (E) определяют винтовые линии, расположенные на цилиндре радиуса R, ось которого совпадает с осью Oz.



К задаче 12,12

Задача 12,12. Найти линейный интеграл вектора $\bar{a} = x^4\bar{i} - y^4\bar{j}$ вдоль первой четверти окружности

$$x = R\cos t;\ \ y = R\sin t.$$

Решение. Чтобы найти значение вектора $\bar{a}$ на заданной окружности, заменим в его выражении x на $R\cos t$, а y — на $R\sin t$. Тогда

$$\bar{a} = R^4\cos^4 t \cdot \bar{i} - R^4 \sin^4 t\bar{j}.$$

Отсюда

$$a_x = R^4\cos^4 t;\ \ a_y = -R^4\sin^4 t. \qquad (A)$$

Чтобы воспользоваться формулой (12,3), найдем dx и dy из уравнения окружности

$$x = R\cos t;$$

$$y = R\sin t.$$

Отсюда

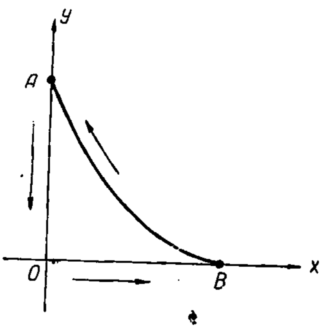
$$dx = -R\sin t\,dt;$$
$$dy = R\cos t\,dt. \qquad (B)$$

Подставляя значения (A) и (B) в формулу (12,3), получаем, учитывая, что при движении по дуге L параметр t изменяется от 0 до $\frac{\pi}{2}$:

$$u = \int_L a_x\,dx + a_y\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^4\cos^4 t\,(-R\sin t)\,dt -$$

$$- R^4\sin^4 tR\cos t\,dt = R^5\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\cos^4 t\cdot(-\sin t) - \sin^4 t\cos t]\,dt =$$

$$= R^5\left(\frac{\cos^5 t}{5} - \frac{\sin^5 t}{5}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = R^5\left(-\frac{1}{5} - \frac{1}{5}\right) = -\frac{2}{5}R^5.$$



К задаче 12,14

Задача 12,13 (для самостоятельного решения). Найти линейный интеграл вектора $\bar{a} = x^3\bar{i} - y^3\bar{j}$ вдоль первой четверти окружности $x = R\cos t$; $y = R\sin t$.

Ответ. $u = -\frac{1}{2}R^4$.

Задача 12,14. Найти циркуляцию вектора $\bar{a} = x\bar{i} - y\bar{j}$ вдоль замкнутой кривой, образованной осями координат и первой четвертью астроиды $x = a_1\cos^3 t$; $y = a_1\sin^3 t$.

Решение. Линия L в формуле (12,2) состоит из дуги AB астроиды и отрезков AO и OB координатных осей. Поэтому

$$\Gamma_L = \int_L a_x\,dx + a_y\,dy = \int_{BA} a_x\,dx + a_y dy + \int_{AO} a_x\,dx + a_y\,dy +$$

$$+ \int_{OB} a_x\,dx + a_y\,dy.$$

Каждый из этих интегралов вычислим отдельно: при вычислении первого интеграла по дуге астроиды AB следует учесть, что так как

$$\bar{a} = x\bar{i} - y\bar{j},\ \text{то}\ a_x = x;\ a_y = -y.$$

На астроиде $x = a_1\cos^3 t$; $y = a_1\sin^3 t$, поэтому

$$a_x = x = a_1\cos^3 t;\ a_y = -y = -a_1\sin^3 t.$$

Из уравнений астроиды определим dx и dy

$$dx = -3a_1\cos^2 t\sin t\,dt;\ dy = 3a_1\sin^2 t\cos t\,dt.$$

На дуге астроиды BA при движении от B к A параметр t изменяется от 0 до $\frac{\pi}{2}$, поэтому

$$\int\limits_{OA} a_x\,dx + a_y\,dy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} a_1 \cos^3 t\,(-3a_1 \cos^2 t \sin t)\,dt -$$

$$- a_1 \sin^3 t\,(3a_1 \sin^2 t \cos t)\,dt =$$

$$= 3a_1^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos^5 t \sin t - \sin^5 t \cos t)\,dt =$$

$$= 3a_1^2 \left(\frac{\cos^6 t}{6} - \frac{\sin^6 t}{6}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 3a_1^2\left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\right) = -a_1^2.$$

На отрезке AO оси Oy имеем: $x = 0$; $dx = 0$; вектор $\bar{a} = -y\bar{j}$; $a_x = 0$; $a_y = -y$, а y изменяется от a_1 до 0

$$\int\limits_{AO} a_x\,dx + a_y\,dy = \int\limits_{a_1}^{0} -y\,dy = -\frac{y^2}{2}\Bigg|_{a_1}^{0} = \frac{a_1^2}{2}.$$

На отрезке OB оси Ox $y = 0$; $dy = 0$; вектор $\bar{a} = x\bar{i}$; $a_x = x$.

$$\int\limits_{OB} a_x\,dx + a_y\,dy = \int\limits_0^{a_1} x\,dx = \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{a_1} = \frac{a_1^2}{2}$$

Таким образом,

$$\Gamma_L = -a_1^2 + \frac{a_1^2}{2} + \frac{a_1^2}{2} = 0.$$

Задача 12,15 (для самостоятельного решения). Найти циркуляцию вектора $\bar{a} = y^2\bar{i}$ по замкнутой кривой, составленной из верхней половины эллипса

$$x = a\cos t;\; y = b\sin t$$

и отрезка оси Ox.

Указание. На верхней половине эллипса параметр t при движении против хода часовой стрелки изменяется от 0 до π.

Промежуточный результат: $\int\limits_0^{\pi} \sin^3 t\,dt = -\frac{4}{3}$.

Ответ. $\frac{4}{3}ab^2$.

Задача 12,16. Найти $\operatorname{rot}\bar{a}$, если вектор

$$\bar{a} = (3x^2y^2z + 3x^2)\,\bar{i} + 2x^3yz\bar{j} + (x^3y^2 + 3z^2)\,\bar{k}.$$

Решение. Проекции вектора $\bar{a}$

$$a_x = 3x^2y^2z + 3x^2;\quad a_y = 2x^3yz;\quad a_z = x^3y^2 + 3z^2.$$

Применяя формулы (12,7) найдем, что $\operatorname{rot}\bar{a} = 0$

Задача 12,17 (для самостоятельного решения). Доказать, что поле сил тяготения точечной притягивающей массы, помещенной в начале координат

$$\bar{F} = -\gamma m\frac{x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

является безвихревым, т. е. что $\operatorname{rot}\bar{F} = 0$.

Указание.

$$F_x = -\gamma m\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}};$$

$$F_y = -\gamma m\frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}};$$

$$F_z = -\gamma m\frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$