ТРИНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание. Поток векторного поля. Дивергенция вектора. Формула Остроградского.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

1. **Поверхностные интегралы.** Пусть S — гладкая или кусочно гладкая поверхность, ограниченная определенным контуром, который будем считать ее краем. На такой поверхности будем различать две стороны, понимая под этим следующее: движущаяся по поверхности точка может с одной стороны поверхности перейти на другую не иначе, как пересекая край поверхности.

Одну из этих сторон поверхности назовем внешней (верхней), другую — внутренней (нижней). *Внешней стороной* считается та, которая соответствует положительному направлению оси Oz, а *внутренняя сторона* соответствует отрицательному направлению оси Oz. На нормали к поверхности S можно рассматривать два возможных направления: одно, идущее в сторону возрастающих, другое — в сторону убывающих z-ов. Если на нормали выбрано направление в сторону возрастающих z-ов, то она называется внешней и связывается с внешней стороной поверхности. Нормаль, направленная в сторону убывающих z-ов, называется внутренней и связана с внутренней стороной поверхности S.

ПОВЕРХНОСТНЫЙ ИНТЕГРАЛ ПЕРВОГО ТИПА

(поверхностный интеграл по площади поверхности)

Пусть в каждой точке поверхности S задана функция $f(x, y, z)$. Поверхность S разобьем на n частей, площади которых обозначим через $\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots \Delta S_n$. На каждой такой площадке ΔS_k выберем произвольную точку $A_k(x_k, y_k, z_k)$, вычислим в ней значение заданной функции $f(x, y, z)$, т. е. найдем число $f(x_k, y_k, z_k)$ и составим сумму произведений (интегральную сумму)

$$f(x_1, y_1, z_1)\Delta S_1 + f(x_2, y_2, z_2)\Delta S_2 + \cdots + f(x_n, y_n, z_n)\Delta S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta S_k.$$

Если функция $f(x, y, z)$ непрерывна во всех точках поверхности S, то предел этой интегральной суммы при условии, что максимальный диаметр частей ΔS_k стремится к нулю, существует и не зависит от способа разбиения поверхности S на части и выбора точки A_k на каждой из этих частей. Этот предел называется поверхностным интегралом первого типа от $f(x, y, z)\,dS$, распространенным на поверхность S, и обозначается символом

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\,ds.$$

Таким образом,

$$\lim_{\substack{\max \Delta S_k \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\,\Delta S_k = \iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\,dS.$$

Формула для вычисления поверхностного интеграла первого рода

Если поверхность S определяется уравнением $z = \varphi(x, y)$, σ — ее проекция на плоскость xOy, а γ — угол между внешней нормалью к поверхности S и положительным направлением оси Oz, то имеет место формула

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\,dS = \iint\limits_{(\sigma)} f[x, y, \varphi(x, y)]\,\frac{d\sigma}{\cos\gamma}. \qquad (13,1)$$

Косинус угла γ между внешней нормалью к поверхности, определяемой уравнением $z = \varphi(x, y)$, и осью Oz вычисляется по формуле

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}.$$

Формула (13,1) с этим значением $\cos\gamma$ перепишется так:

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\,dS = \iint\limits_{(\sigma)} f[x, y, \varphi(x, y)]\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,d\sigma. (13,2)$$

Косинусы углов α и β между внешней нормалью к поверхности $z = \varphi(x, y)$ и осями Ox и Oy соответственно равны:

$$\cos\alpha = -\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}} \qquad (13,3)$$

$$\cos\beta = -\frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}. \qquad (13,4)$$

Если S — замкнутая поверхность, то поверхностный интеграл первого рода обозначается символом $\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\, ds$.

ПОВЕРХНОСТНЫЙ ИНТЕГРАЛ ВТОРОГО ТИПА

(поверхностный интеграл по координатам)

Пусть $f(x, y, z)$ — функция, заданная в каждой точке поверхности S. Разобьем поверхность S на n частей с площадями ΔS_1, $\Delta S_2, \ldots, \Delta S_n$.

На каждой из этих частей выберем произвольную точку $A_k(x_k, y_k, z_k)$ и вычислим в ней функцию $f(x, y, z)$, т. е. найдем число $f(x_k, y_k, z_k)$. Спроектируем все площади ΔS_k, на которые разбита поверхность S, на плоскость xOy и обозначим площади этих проекций соответственно через $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \ldots, \Delta\sigma_n$. Если была выбрана внешняя сторона поверхности S, то эти проекции будем брать со знаком плюс. Если же выбрана нижняя сторона поверхности S, то возьмем знак минус. Составим интегральную сумму $\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\, \Delta\sigma_k$.

Если функция $f(x, y, z)$ непрерывна в каждой точке поверхности S, то ее предел при условии, что $\max \Delta S_k \to 0$ существует, называется поверхностным интегралом второго типа от $f(x, y, z)\, d\sigma$, распространенным на выбранную сторону поверхности (S), и обозначается символом

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\, d\sigma \quad \text{или} \quad \iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\, dx\, dy.$$

Таким образом,

$$\lim_{\substack{\max \Delta S_k \to 0 \\ (n \to \infty)}} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k) = \iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\, dx\, dy.$$

При замене выбранной стороны поверхности S противоположной ее стороной знак интеграла поменяется на противоположный, а его абсолютная величина сохранится прежней.

Если элементы, на которые разбита поверхность S, проектировать на плоскость xOz и yOz, то получаются соответственно два интеграла

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\, dx\, dz \quad \text{и} \quad \iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\, dy\, dz.$$

Если $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$ — функции, определенные во всех точках поверхности S, то под составным поверхностным интегралом второго типа понимается интеграл вида

$$\iint\limits_{(S)} P(x, y, z)\, dy\, dz + Q(x, y, z)\, dz\, dx + R(x, y, z)\, dx\, dy.$$

Подчеркиваем еще раз, что поверхность S является двусторонней, а интеграл распространяется на ее определенную сторону, причем указание этой стороны следует всякий раз оговаривать.

Поверхностный интеграл второго типа вычисляют по формуле

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\,dx\,dy = \iint\limits_{(\sigma)} f[x, y, \varphi(x, y)]\,dx\,dy, \tag{13,5}$$

в которой $z = \varphi(x, y)$ — уравнение поверхности S, а (σ) — проекция поверхности S на плоскость xOy.

Если S — часть цилиндрической поверхности с образующими, параллельными осями Oz, то все ее элементы имеют проекции на плоскость xOy, равные нулю, поэтому

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\,dx\,dy = 0. \tag{13,6}$$

Общая формула, по которой поверхностный интеграл *второго типа сводится к поверхностному интегралу первого типа* записывается так:

$$\iint\limits_{(S)} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \iint\limits_{(S)} [P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma]\,dS, \tag{13,7}$$

где P, Q и R — ограниченные функции, определенные во всех точках поверхности S, а $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы нормали, направление которой соответствует выбранной стороне поверхности.

2. **Поток вектора.** Потоком вектора $\bar{a}$ через поверхность S называется скаляр, определяемый формулой

$$П = \iint\limits_{(S)} a_n\,ds, \tag{13,8}$$

где a_n — проекция вектора $\bar{a}$ на нормаль к поверхности S, причем нормаль берется определенная — внешняя или внутренняя.

Проекцию вектора $\bar{a}$ на нормаль к поверхности находят по формуле

$$a_n = a_x\cos(\bar{n}, x) + a_y\cos(\bar{n}, y) + a_z\cos(\bar{n}, z). \tag{13,9}$$

где $\cos(\bar{n}, x)$, $\cos(\bar{n}, y)$, $\cos(\bar{n}, z)$ — направляющие косинусы нормали к поверхности S, поэтому (13,8) можно записать в виде

$$П = \iint\limits_{(S)} [a_x\cos(\bar{n}, x) + a_y\cos(\bar{n}, y) + a_z\cos(\bar{n}, z)]\,ds. \tag{13,10}$$

Учитывая, что

$$\cos(\bar{n},\ x)\,ds = dy\,dz;\ \cos(\bar{n},\ y)\,ds = dz\,dx;\ \cos(\bar{n},\ z)\,ds = dx\,dy, \tag{13,10$_1$}$$

формулу (13,10) запишем так:

$$\Pi = \iint\limits_{(S)} a_x\,dy\,dz + a_y\,dz\,dx + a_z\,dx\,dy. \tag{13,11}$$

В векторной форме (13,10) запишется в виде

$$\Pi = \iint\limits_{(S)} (\bar{a}\cdot\bar{n})\,ds, \tag{13,12}$$

где $\bar{n}$ — единичный вектор нормали, направленной от отрицательной стороны поверхности к положительной (поверхность обыкновенно ориентируют так, что ее внешнюю сторону считают положительной, а внутреннюю — отрицательной). В случае замкнутой поверхности вектор $\bar{n}$ — единичный вектор внешней нормали.

3. **Дивергенция.** Дивергенцией (расхождением) поля вектора $\bar{a} = \bar{a}(x,\ y,\ z)$, обозначаемой $\operatorname{div}\bar{a}$, называется скалярная величина, определяемая формулой

$$\operatorname{div}\bar{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \tag{13,13}$$

Из этого определения видно, что дивергенция вектора $\bar{a}$ — величина скалярная и ее определение связано с выбором координатной системы. Ниже в связи с формулой Остроградского дается другое определение дивергенции вектора $\bar{a}$, которое устраняет этот недостаток.

Термин «поток вектора» имеет физическое происхождение. Укажем примеры физических величин, которые вычисляются при помощи формулы (13,11):

а) Если векторное поле рассматривать как поле скоростей движущейся жидкости, то поток ее Π через поверхность S равен количеству жидкости, протекающей через поверхность S в единицу времени в направлении от отрицательной к положительной стороне поверхности. Если поток через замкнутую поверхность S положителен, то это значит, что из части пространства, ограниченной поверхностью S, вытекает больше жидкости, чем втекает в нее. Это объясняется тем, что внутри S имеются и с т о ч н и к и, выделяющие жидкость.

Если поток отрицателен, то внутрь поверхности S втекает больше жидкости, чем вытекает из нее. Это означает, что внутри S имеются *стоки*, поглощающие жидкость.

б) Поток тепла имеет направление и является векторной величиной. Обозначим вектор потока тепла через $\bar{a}$. Его длина измеряет количество тепла, протекшего сквозь единицу площади в единицу времени. Полный тепловой поток наружу через поверхность S определяется также по формуле (13,11).

4. Формула Остроградского. Формулой Остроградского называется формула

$$\iiint\limits_{(v)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dv = \iint\limits_{(s)} [P\cos(\bar{n}, x) + Q\cos(\bar{n}, y) + R\cos(\bar{n}, z)]\, ds. \tag{13,14}$$

Здесь: $\cos(\bar{n}, x)$, $\cos(\bar{n}, y)$, $\cos(\bar{n}, z)$ — направляющие косинусы внешней нормали к поверхности s, ограничивающей объем v; P, Q, и R — сокращенное обозначеиие функций $P = P(x, y, z)$; $Q = Q(x, y, z)$; $R = R(x, y, z)$, которые предполагаются определенными в объеме v и непрерывными вместе с их частными производными первого порядка.

Формула (13,14) позволяет преобразовать интеграл, распространенный на некоторый объем v, в интеграл по поверхности s, которая ограничивает этот объем.

В другом виде с учетом ($13,10_1$) формула Остроградского записывается так:

$$\iiint\limits_{(v)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dv = \iint\limits_{(s)} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy. \tag{13,15}$$

Если $\bar{a} = \bar{a}(x, y, z)$ — вектор, проекции которого на координатные оси равны a_x, a_y, a_z и $a_x = P(x, y, z)$; $a_y = Q(x, y, z)$; $a_z = R(x, y, z)$, то формула (13,7) запишется так:

$$\iiint\limits_{(v)} \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right) dv = \iint\limits_{(s)} [a_x\cos(\bar{n}, x) + a_y\cos(\bar{n}, y) + a_z\cos(\bar{n}, z)]\, ds. \tag{13.16}$$

Формула Остроградского (13,14) в векторной форме (если ее прочесть справа налево):

$$\iint\limits_{(s)} a_n\, ds = \iiint\limits_{(v)} \operatorname{div} \bar{a}\, dv, \tag{13,17}$$

т. е. поток вектора $\bar{a}$, являющегося непрерывной функцией точки, через произвольную замкнутую поверхность равен интегралу от дивергенции этого вектора по объему, ограниченному этой поверхностью. Формула (13,17) выражает поток вектора через замкнутую поверхность через значения дивергенции этого вектора в точках, лежащих внутри поверхности.

В теории векторного поля формулы (13,16) и (13,17) имеют исключительно важное значение.

Левая часть формулы (13,17) определяет поток вектора $\bar{a}$ через замкнутую поверхность S — см. формулу (13,8).

Отсюда следует, что **поток вектора $\bar{a}$ через замкнутую поверхность S равен интегралу от дивергенции вектора**, взятому по объему, ограниченному поверхностью S.

Теперь мы можем дать определение дивергенции вектора в точке M объема V, не зависящее от выбора координатной системы.

Поток векторного поля через замкнутую поверхность S называют также производительностью той части пространства V, которая ограничена поверхностью S. Если найти отношение потока $П$ через поверхность S к величине объема V, ограниченного этой поверхностью, то мы получим среднюю производительность во всей области V. Чтобы оценить производительность в точке M объема V, необходимо вычислить среднюю производительность во все меньших и меньших областях, окружающих точку M. Переходя к пределу, стягивая объем такой малой области в точку, мы получим число, характеризующее производительность векторного поля в окрестности точки M. Это число и называется дивергенцией векторного поля в точке M.

Дивергенцией векторного поля вектора $\bar{a}$ в точке M называется предел, к которому стремится отношение потока через замкнутую поверхность, окружающую точку M, к объему области, органиченной этой поверхностью. Этот предел вычисляется при стягивании объема V в точку M.

Таким образом,

$$\operatorname{div}\bar{a} = \lim_{V\to M}\frac{\iint\limits_{(s)}(\bar{a}\cdot\bar{n})\,ds}{V}. \qquad (13{,}18)$$

В этой форме определение дивергенции не зависит от выбора координатной системы. Те точки векторного поля, в которых дивергенция положительна, называются *источниками*, а те, в которых она отрицательна, — *стоками*. Эти термины объясняются гидродинамическим истолкованием векторного поля. Если около точки, являющейся источником, описать достаточно малую поверхность, то поток через эту поверхность окажется положительным и жидкость будет вытекать наружу.

Задача 13,1. Вычислить интеграл $I = \iint\limits_{(s)}(x^2+y^2)\,z\,ds$, где S — верхняя половина сферы радиуса R с центром в начале координат.

Решение. Заданный интеграл принадлежит к поверхностным интегралам первого типа. Его следует вичислить по формуле (13,2). Поверхность S определяется уравнением $x^2+y^2+z^2=R^2$

$$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2} \qquad (A)$$

(перед корнем удержан знак плюс потому, что рассматривается верхняя часть поверхности сферы).

Теперь вычислим $\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$, входящий в формулу (13,2).

Из (А) следует, что

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}; \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}};$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{R^2-x^2-y^2}}.$$

Искомый интеграл после подстановки $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ перепишется по формуле (13,2) так:

$$I=\iint\limits_{(S)}(x^2+y^2)z\,ds=R\iint\limits_{(\sigma)}(x^2+y^2)\sqrt{R^2-x^2-y^2}\times$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\,d\sigma=R\iint\limits_{(\sigma)}(x^2+y^2)\,d\sigma.$$

Перейдем к полярным координатам. В них

$$x^2+y^2=\rho^2, \text{ а } d\sigma=\rho\,d\rho\,d\varphi.$$

Поэтому

$$I=\iint\limits_{(\sigma)}\rho^2\cdot\rho\,d\rho\,d\varphi.$$

Так как σ — проекция S на плоскость xOy, то σ — круг радиуса R, ограниченный окружностью $x^2+y^2=R^2$. Переменные ρ и φ изменяются в таких пределах: ρ от 0 до R, φ от 0 до 2π

$$0\leqslant\rho\leqslant R;$$
$$0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi.$$

Поэтому

$$I=R\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^R\rho^3\,d\rho=R\cdot\frac{R^4}{4}\cdot 2\pi=\frac{\pi R^5}{2}.$$

Задача 13,2. Вычислить поверхностный интеграл

$$I=\iint\limits_{(S)}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\,ds,$$

где S — часть параболоида $z=x^2+y^2$, ограниченная плоскостью $z=a$ $(a>0)$.

Решение. Заданный интеграл — поверхностный интеграл первого типа. Применим для его вычисления формулу (13,2). Из уравнения поверхности $z=x^2+y^2$ найдем $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ и вычислим $\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$, входящий в эту формулу:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x; \quad \frac{\partial z}{\partial y}=2y;$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+4x^2+4y^2}.$$

Подставляя это значение корня и заменяя z на x^2+y^2 в (13,2), получим

$$I=\iint\limits_{(\sigma)}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}\cdot\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,d\sigma,$$

где σ — проекция поверхности S на поскость xOy. Эта проекция — круг радиуса a. Его ограничивает окружность $x^2+y^2=a^2$.

$$I=\iint\limits_{(\sigma)}\frac{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,d\sigma=\iint\limits_{(\sigma)}\sqrt{\frac{1+4(x^2+y^2)}{x^2+y^2}}\,d\sigma.$$

И здесь выгодно перейти к полярным координатам, в которых

$$x^2+y^2=\rho^2; \quad d\sigma=\rho\,d\rho\,d\varphi.$$

Поэтому

$$I=\iint\limits_{(\sigma)}\sqrt{\frac{1+4\rho^2}{\rho^2}}\cdot\rho\,d\rho\,d\varphi=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^a\sqrt{1+4\rho^2}\,d\rho.$$

Внутренний интеграл

$$\int\limits_0^a\sqrt{1+4\rho^2}\,d\rho=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\sqrt{1+4a^2}+\frac{1}{2}\ln\left|2a+\sqrt{1+4a^2}\right|\right).$$

Указание.

$$\int\sqrt{1+4\rho^2}\,d\rho=\int\frac{1+4\rho^2}{\sqrt{1+4\rho^2}}\,d\rho=\int\frac{d\rho}{\sqrt{1+4\rho^2}}+4\int\frac{\rho^2}{\sqrt{1+4\rho^2}}\,d\rho,$$

а $\int\frac{\rho^2\,d\rho}{\sqrt{1+4\rho^2}}$ взять по частям, полагая $u=\rho$; $dv=\frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{1+4\rho^2}}$.

Ответ. $I=\pi\left(\frac{a}{2}\sqrt{1+4a^2}+\frac{1}{2}\ln\left|2a+\sqrt{1+4a^2}\right|\right)$.

Задача 13,3 (для самостоятельного решения). Вычислить поверхностный интеграл первого типа

$$I=\iint\limits_{(S)}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,ds,$$

где S — поверхность конуса $z^2 = x^2 + y^2$, ограниченного сверху плоскостью $z = h$.

Указание. Воспользоваться формулой (13,2). После замены под корнем z^2 на $x^2 + y^2$ и вычисления $\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$ (учесть, что $z = \sqrt{x^2 + y^2}$) должно получиться

$$I = 2 \iint\limits_{(\sigma)} (x^2 + y^2)\, d\sigma.$$

Перейти к полярным координатам.

Ответ. $I = \frac{4\pi h^3}{3}$.

Задача 13,4. Найти поверхностный интеграл первого типа

$$I = \iint\limits_{(S)} z^2\, ds,$$

где S — полная поверхность тетраэдра, отсекаемого от первого октанта плоскостью $x + y + z = 1$.

Решение. Здесь поверхность S составлена из четырех частей. Значение величины ds в формуле (13,2) ниже указано для каждой из этих частей:

S_1 — треугольник в плоскости xOy: $z = 0$; $ds = dx\, dy$. Он ограничен осями Ox, Oy и прямой $x + y = 1$.

S_2 — треугольник в плоскости xOz: $y = 0$; $dz = dx\, dz$. Он ограничен осями Ox, Oz и прямой $x + z = 1$; $z = 1 - x$.

S_3 — треугольник в плоскости yOz: $x = 0$; $ds = dy\, dz$. Он ограничен координатными осями Oy, Oz и прямой $y + z = 1$; $z = 1 - y$.

S_4 — заданная плоскостью, на которой $z = 1 - x - y$; $ds = \sqrt{3}\, dx\, dy$, так как $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = -1$, а $\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{3}$, поэтому

$$I = \iint\limits_{(S)} z^2\, ds = \iint\limits_{(S_1)} z^2\, ds + \iint\limits_{(S_2)} z^2\, ds + \iint\limits_{(S_3)} z^2\, ds + \iint\limits_{(S_4)} z^2\, ds.$$

Учитывая значение ds на каждой из частей и заменяя в последнем интеграле z на $1 - x - y$, а ds на $\sqrt{3}\, dx\, dy$ и вычисляя отдельно каждый из четырех этих интегралов, получаем:

$$1) \quad \iint\limits_{(S_1)} z^2\, ds = \iint\limits_{(S_1)} 0 \cdot dx\, dy = 0;$$

2) $$\iint\limits_{(S_2)} z^2\,ds = \iint\limits_{(S_2)} z^2\,dx\,dz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} z^2\,dz = \frac{1}{3}\int\limits_0^1 (1-x)^3\,dx = \frac{1}{12};$$

3) $$\iint\limits_{(S_3)} z^2\,ds = \iint\limits_{S_3} z^2\,dy\,dz = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{1-y} z^2\,dz = \frac{1}{3}\int\limits_0^1 (1-y)^3\,dy = \frac{1}{12};$$

4) $$\iint\limits_{(S_4)} z^2\,ds = \iint\limits_{(\sigma)} (1-x-y)^2\sqrt{3}\,dx\,dy =$$

$$= \sqrt{3}\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (1-x-y)^2\,dy = \frac{\sqrt{3}}{12}.$$

Окончательно

$$I = 0 + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{\sqrt{3}}{12} = \frac{2+\sqrt{3}}{12}.$$

Задача 13,5. Вычислить поверхностный интеграл второго типа

$$I = \iint\limits_{(S)} \frac{y^2}{z}\,dx\,dy$$

по верхней стороне нижней половины сферы радиуса a.

Решение. Уравнение сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$. На нижней половине сферы $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$. Проекция этой сферы на плоскость xOy есть круг радиуса a, ограниченный окружностью $x^2+y^2=a^2$. Применяя формулу (13,5) и заменяя под знаком интеграла z на $-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, получаем

$$I = -\iint\limits_{(\sigma)} \frac{y^2}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy,$$

где σ — проекция сферы на плоскость xOy. Перейдем в полярные координаты: $x=\rho\cos\varphi$; $y=\rho\sin\varphi$, элементы же площади $dx\,dy$ надо заменить на $\rho\,d\rho\,d\varphi$. Тогда

$$I = -\iint\limits_{(\sigma)} \frac{\rho^2\sin^2\varphi}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\rho\,d\rho\,d\varphi;$$

$$I = -\int\limits_0^{2\pi} \sin^2\varphi \int\limits_0^a \frac{\rho^3}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\,d\rho.$$

Внутренний интеграл вычисляем по частям

$$\int_0^a \frac{\rho^3 d\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}} d\rho = -\rho^2\sqrt{a^2-\rho^2}\Big|_0^a + \int_0^a 2\rho\sqrt{a^2-\rho^2}\,d\rho =$$

$$\left| \begin{array}{l|l} u=\rho^2 & du = 2\rho\,d\rho \\ dv = \dfrac{d\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}} & v = -\sqrt{a^2-\rho^2} \end{array} \right|$$

$$= -\frac{2(a^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\Big|_0^a = \frac{2}{3}a^3.$$

Поэтому

$$I = -\frac{2}{3}a^3\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi = -\frac{2}{3}a^3\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2\varphi}{2}d\varphi =$$

$$= -\frac{2}{3}a^3\left(\frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{2\pi} = -\frac{2}{3}a^3\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\pi = -\frac{2}{3}\pi a^3.$$

Задача 13,6. Вычислить поверхностный интеграл второго типа

$$I = \iint\limits_{(S)} \frac{x^2y^2}{z^2}dx\,dy,$$

где S — поверхность конуса $z^2 = x^2+y^2$, ограниченная плоскостью $z = h$.

Решение. Применяя формулу (13,5) и заменяя z^2 на x^2+y^2, получаем

$$I = \iint\limits_{(\sigma)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}dx\,dy,$$

где σ — круг, являющейся проекцией поверхности S на плоскость xOy, ограниченный окружностью $x^2+y^2=h^2$. После перехода к полярным координатам

$$I = \iint\limits_{(\sigma)} \frac{(\rho\cos\varphi)^2\cdot(\rho\sin\varphi)^2}{\rho^2}\rho\,d\rho\,d\varphi =$$

$$= \iint\limits_{(\sigma)} \sin^2\varphi\cdot\cos^2\varphi\cdot\rho^3\,d\rho\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi\int_0^h\rho^3\,d\rho.$$

Интеграл

$$\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\cdot\cos^2\varphi\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)^2 d\varphi = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\sin^2 2\varphi\,d\varphi =$$

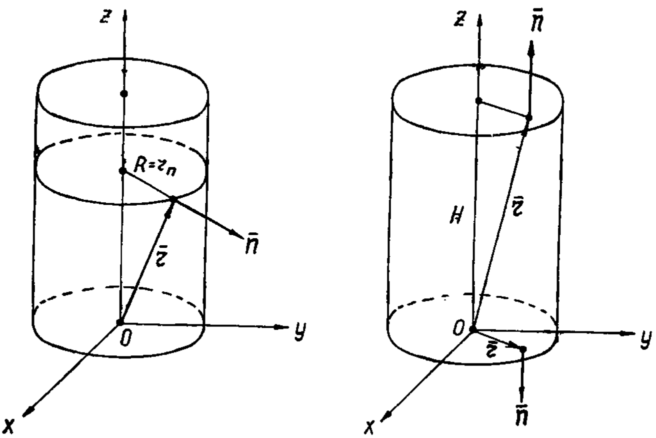
$$= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 4\varphi}{2}d\varphi = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\varphi - \frac{\sin 4\varphi}{8}\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\pi = \frac{\pi}{4}.$$

Ответ: $I = \dfrac{\pi h^4}{16}.$

Задача 13,7. Определить поток вектора $\bar{r}$ — радиуса-вектора точки через полную поверхность прямого кругового цилиндра, если нижнее основание цилиндра лежит в плоскости xOy, его центр находится в начале координат, радиус основания цилиндра равен R, высота его H.

Решение. При решении задачи воспользуемся формулой (13,8). Через полную поверхность цилиндра поток

$$П_{\text{полн. пов.}} = П_{\text{бок. пов.}} + П_{\text{нижн. осн.}} + П_{\text{верхн. осн.}} \tag{А}$$



К задаче 13,7

1. При вычислении потока через боковую поверхность цилиндра следует учесть, что внешняя нормаль к этой поверхности в любой ее точке перпендикулярна оси Oz, а потому проекция $r_п$ радиуса-вектора $\bar{r}$ на нормаль к боковой поверхности цилиндра равна радиусу цилиндра, т. е. $r_n = R$ и тогда

$$П_{\text{бок. пов.}} = \iint\limits_{\substack{(\text{бок.}\\ \text{пов.})}} r_п\, ds = \iint\limits_{\substack{(\text{бок.}\\ \text{пов.})}} R\, ds = R \iint\limits_{\substack{(\text{бок.}\\ \text{пов.})}} ds = R \cdot 2\pi RH,$$

так как $\iint\limits_{\substack{(\text{бок.}\\ \text{пов.})}} ds$ равен боковой поверхности цилиндра. Окончательно

$$П_{\text{бок. пов.}} = 2\pi R^2 H.$$

2. На нижнем основании цилиндра вектор $\bar{r}$ перпендикулярен вектору $\bar{n}$ — внешней нормали нижнего основания, а потому про-

екция вектора r на внешнюю нормаль n равна нулю, т. е. $r_n = 0$ и

$$\Pi_{\text{нижн. осн.}} = \iint\limits_{\substack{(\text{нижн.}\\ \text{осн.})}} r_n\, ds = 0.$$

3. На верхнем основании внешняя нормаль к нему параллельна оси Oz и имеет то же направление, что и ось Oz, поэтому проекция радиуса-вектора r точек верхнего основания цилиндра на внешнюю нормаль равна высоте цилиндра H и

$$\Pi_{\text{верхн. осн.}} = \iint\limits_{\substack{(\text{верхн.}\\ \text{осн.})}} r_n\, ds = \iint\limits_{\substack{(\text{верхн.}\\ \text{осн.})}} H\, ds = H \iint\limits_{\substack{(\text{верхн.}\\ \text{осн.})}} ds = H \cdot \pi R^2 = \pi R^2 H,$$

так как $\iint\limits_{\substack{(\text{верхн.}\\ \text{осн.})}} ds$ равен площади верхнего основания, т. е. πR^2.

Подставляя найденные значения потоков через боковую поверхность цилиндра, его нижнее и верхнее основание в (А), получим поток через полную поверхность цилиндра

$$\Pi = 3\pi R^2 H.$$

Задача 13,8. Определить поток радиуса-вектора $\bar{r}$ точки через прямой круговой конус, основание которого лежит в плоскости xOy, ось совпадает с осью Oz, радиус основания равен R, высота — H.

Решение. Через полную поверхность конуса поток

$$\Pi_{\text{полн. пов. кон.}} = \Pi_{\text{бок. пов. кон.}} + \Pi_{\text{осн. кон.}}.$$

Очевидно, что поток вектора $\bar{r}$ через основание конуса равен нулю, так как на основании конуса вектор $\bar{r}$ перпендикулярен к нормали основания.

Проекцию радиуса-вектора $\bar{r}$ на нормаль к боковой поверхности найдем по формуле (13,9). У нас

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k},$$

поэтому

$$r_n = x\cos(\bar{n}, x) + y\cos(\bar{n}, y) + z\cos(n, z)$$

и по формуле (13,10)

$$\Pi_{\text{бок. пов. кон}} = \iint\limits_{\substack{(\text{бок.}\\ \text{пов.}\\ \text{кон.})}} [x\cos(\bar{n}, x) + y\cos(\bar{n}, y) + z\cos(\bar{n}, z)]\, ds =$$

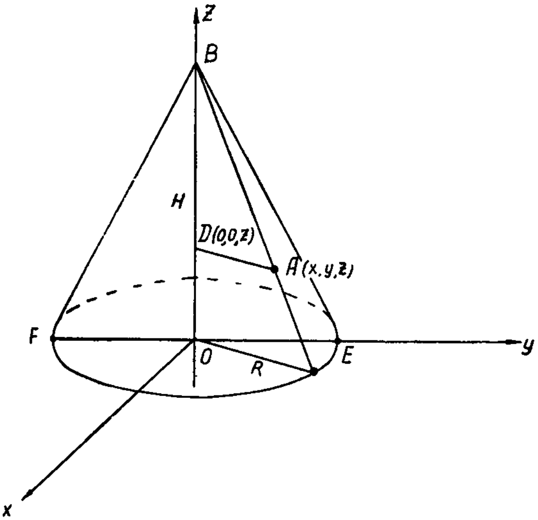
$$= \iint\limits_{\substack{(\text{бок.}\\ \text{пов.}\\ \text{кон})}} x\, dy\, dz + y\, dz\, dx + z\, dx\, dy.$$

Остается вычислить интегралы:

$$\iint\limits_{\substack{(\text{бок.}\\ \text{пов.}\\ \text{кон})}} x\,dy\,dz; \quad \iint\limits_{\substack{(\text{бок.}\\ \text{пов.}\\ \text{кон})}} y\,dz\,dx; \quad \iint\limits_{\substack{(\text{бок.}\\ \text{пов.}\\ \text{кон})}} z\,dx\,dy. \tag{A}$$

Найдем уравнение поверхности конуса. Если на конусе взять произвольную точку $A(x, y, z)$, то из подобия треугольников BOC и ABD следует, что

$$\frac{R}{H} = \frac{AD}{BD}, \text{ но } AD = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad BD = H - z$$



К задаче 13,8

и тогда

$$\frac{R}{H} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{H - z}.$$

Отсюда уравнение поверхности конуса:

$$z = H\left(1 - \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{R}\right). \tag{B}$$

Последний из интегралов в (A), если в него подставить z из уравнения (B), приведется к виду

$$\iint\limits_{\substack{(\text{бок.}\\ \text{пов.}\\ \text{кон})}} z\,dx\,dy = \iint\limits_{\substack{(\text{осн.}\\ \text{кон})}} H\left(1 - \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{R}\right) dx\,dy,$$

причем $dx\,dy$ есть проекция элемента ds поверхности конуса на плоскость xOy и интегрирование будет вестись по проекции поверхности конуса на эту плоскость, т. е. по основанию конуса.

Если перейти к полярным координатам, то, учитывая, что в них $\sqrt{x^2+y^2}=\rho$, а элемент площади $ds=\rho\,d\rho\,d\varphi$, получим

$$\iint\limits_{\substack{\text{(осн.}\\ \text{кон)}}} H\left(1-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{R}\right)dx\,dy = H\iint\limits_{\substack{\text{(осн}\\ \text{кон.)}}}\left(1-\frac{\rho}{R}\right)\rho\,d\rho\,d\varphi =$$

$$=H\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{R}\left(1-\frac{\rho}{R}\right)\rho\,d\rho = H\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{R^2}{2}-\frac{R^2}{3}\right)d\varphi = \frac{R^2H}{6}\cdot 2\pi = \frac{1}{3}\pi R^2H.$$

Два других интеграла (A) вычислить самостоятельно.

При вычислении $\iint\limits_{\substack{\text{(бок.}\\ \text{пов.}\\ \text{кон)}}} x\,dy\,dz$ учесть, что областью интегрирования явится проекция боковой поверхности конуса на плоскость yOz, т. е. треугольник BEF. Множитель x, входящий в подынтегральное выражение, определить из уравнения (B) поверхности конуса.

$$x=\pm\sqrt{R^2\left(1-\frac{z}{H}\right)^2-y^2}. \qquad \text{(C)}$$

Уравнения сторон BE и BF треугольника BEF получаются из уравнения (B) поверхности конуса как уравнения линий пересечения поверхности конуса с плоскостью yOz (уравнение этой плоскости $x=0$).

$$(BE)\ y=+R\left(1-\frac{z}{H}\right);$$

$$(BF)\ y=-R\left(1-\frac{z}{H}\right).$$

В выражении (C) для x возьмем знак плюс перед корнем. Желая вычислить $\iint\limits_{\substack{\text{(бок.}\\ \text{пов.}\\ \text{кон)}}} x\,dy\,dz$ по всей боковой поверхности конуса и считая $x=+\sqrt{R^2\left(1-\frac{z}{H}\right)^2-y^2}$, мы должны будем вследствие симметрии поверхности конуса относительно плоскости yOz полученный результат удвоить, т. е.

$$\iint\limits_{\substack{\text{(бок. пов.}\\ \text{кон)}}} x\,dy\,dz = 2\iint\limits_{\triangle BEF} x\,dy\,dz =$$

$$= 2\int\limits_0^H dz \int\limits_{-R\left(1-\frac{z}{H}\right)}^{R\left(1-\frac{z}{H}\right)} \sqrt{R^2\left(1-\frac{z}{H}\right)^2 - y^2}\,dy = \frac{1}{3}\pi R^2 H.$$

При вычислении внутреннего интеграла использована формула

$$\int \sqrt{a^2 - t^2}\,dt = \frac{t}{2}\sqrt{a^2 - t^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{t}{a} + C,$$

причем принято, что $a^2 = R^2\left(1-\frac{z}{H}\right)^2$. Вычисление последнего интеграла тем же путем даст

$$\iint\limits_{\substack{\text{(бок.}\\ \text{пов.}\\ \text{кон.)}}} y\,dx\,dz = \frac{1}{3}\pi R^2 H$$

и тогда окончательно поток

$$П_{\text{полн. пов. кон.}} = \frac{1}{3}\pi R^2 H + \frac{1}{3}\pi R^2 H + \frac{1}{3}\pi R^2 H,$$

т. е.

$$П_{\text{полн. пов. кон.}} = \pi R^2 H.$$

Мы решили эту задачу, не прибегая к формуле Остроградского. Используем ее и убедимся, что это значительно сэкономит вычисления. Поток вектора через замкнутую поверхность S находят по формуле Остроградского (13,17).

Применим эту формулу для случая, когда вектором является радиус-вектор точки $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$. На основании (13,13)

$$\operatorname{div}\bar{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z},$$

а потому

$$\operatorname{div}\bar{r} = \frac{\partial r_x}{\partial x} + \frac{\partial r_y}{\partial y} + \frac{\partial r_z}{\partial z}.$$

Но $r_x = x$; $r_y = y$; $r_z = z$, поэтому

$$\frac{\partial r_x}{\partial x} = 1; \quad \frac{\partial r_y}{\partial y} = 1; \quad \frac{\partial r_z}{\partial z} = 1.$$

Значит, для радиуса-вектора $\bar{r}$: $\operatorname{div} \bar{r} = 3$.

Интересующий нас поток радиуса-вектора $\bar{r}$ через замкнутую поверхность будет равен на основании формулы (13,17)

$$П = \iint\limits_{(S)} \bar{r}_n \, ds = \iiint\limits_{(v)} \operatorname{div} \bar{r} \, dv = \iiint\limits_{(v)} 3dv = 3 \iiint\limits_{(v)} dv = 3v, \quad (13,19)$$

т. е. поток радиуса-вектора точки через замкнутую поверхность S равен утроенному объему, ограниченному этой поверхностью.

Для потока через полную поверхность конуса, рассматриваемого в этой задаче, имеем, учитывая, что объем конуса $v = \frac{1}{3} \pi R^2 H$,

$$П_{\text{полн. пов. кон.}} = 3 \cdot \frac{1}{3} \pi R^2 H = \pi R^2 H.$$

Получен тот же результат, что и раньше, но со значительно меньшей затратой труда, притом получен и дополнительный результат.

В задаче 13,1 поток радиуса-вектора точки через полную поверхность прямого кругового цилиндра $П = 3\pi R^2 H$, *т. е. поток радиуса-вектора точки через полную поверхность прямого кругового цилиндра равен утроенному объему цилиндра*, как это следует и из формулы (13,19).

Формулу (13,19) можно истолковать так: если в установившемся потоке несжимаемой жидкости скорость любой частицы равна ее радиусу-вектору, то количество жидкости, вытекающее из какого-либо тела за единицу времени, равно утроенному объему этого тела.

Задача 13,9. Доказать, что если во всех точках некоторого объема v, ограниченного поверхностью S, дивергенция вектора $\bar{a}$ равна нулю, то поток вектора $\bar{a}$ через поверхность S равен нулю.

Р е ш е н и е. По формуле (13,10) поток вектора

$$П = \iint\limits_{(S)} a_n \, ds = \iiint\limits_{(v)} \operatorname{div} \bar{a} \, dv = \iiint\limits_{(v)} 0 \cdot dv = 0.$$

Вектор $\bar{a}$, для которого дивергенция равна нулю, называется соленоидальным.

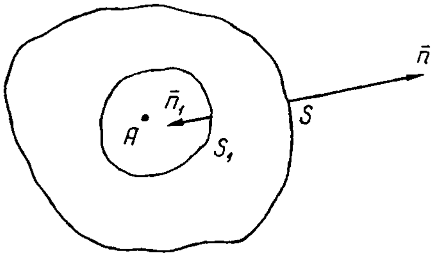
Задача 13,10. Доказать, что если во всех точках некоторого объема V, кроме одной точки A, дивергенция вектора равна нулю, то поток этого вектора через замкнутую поверхность, окружающую точку A, не зависит от формы этой поверхности.

Решение. Пусть во всех точках объема V, кроме точки A, дивергенция вектора $\bar{a}$ равна нулю: $\operatorname{div}\bar{a}=0$. Окружим точку A поверхностью (S_1) (см. чертеж). Тогда по условию задачи всюду в объеме, заключенном между поверхностями S и S_1, $\operatorname{div}\bar{a}=0$, а поток вектора $\bar{a}$ через поверхность $S+S_1$ равен нулю на основании результата предыдущей задачи, т. е.

$$\iint\limits_{S+S_1} a_n\,ds=0$$

или иначе

$$\iint\limits_{(S)} a_n\,ds+\iint\limits_{(S_1)} a_{n_1}\,ds=0. \tag{A}$$



К задаче 13,10

В этой формуле a_n — проекция вектора $\bar{a}$ на внешнюю нормаль $\bar{n}$ к поверхности S, а a_{n_1} — проекция вектора $\bar{a}$ на внешнюю нормаль $\bar{n}_1$ к поверхности S_1. Внешняя нормаль к поверхности S_1 направлена внутрь (противоположно направлению внешней нормали на поверхности S). Учитывая, что изменение направления нормали на противоположное изменяет знак интеграла, получим

$$\iint\limits_{(S_1)} a_{n_1}\,ds=-\iint\limits_{(S_1)} a_n\,ds. \tag{B}$$

Заменяем в (A) второе слагаемое в левой части равенства его значением из (B):

$$\iint\limits_{(S)} a_n\,ds-\iint\limits_{(S_1)} a_n\,ds=0$$

и окончательно

$$\iint\limits_{(S)} a_n\,ds=\iint\limits_{(S_1)} a_n\,ds,$$

что и требовалось доказать. Решим задачу на применение этого результата.

Задача 13,11. Напряженность $\bar{E}$ поля точечного электрического заряда e на расстоянии r от этого заряда

$$\bar{E} = \frac{e}{r^3}\bar{r}, \tag{A}$$

где $\bar{r}$ — радиус-вектор, проведенный из заряда в рассматриваемую точку поля A.

Определить поток вектора $\bar{E}$ через любую замкнутую поверхность в двух случаях:

1) когда эта поверхность не охватывает заряда e и

2) когда заряд e расположен внутри замкнутой поверхности.

Решение. 1. Для ответа на первый вопрос воспользуемся формулой (13,17). Поток вектора через замкнутую поверхность S

$$\Pi = \iint\limits_{(S)} a_n\, ds = \iiint\limits_{(V)} \operatorname{div} \bar{a}\, dv.$$

Будем считать, что заряд e помещен в начале координат, а точка A имеет координаты x, y и z. Тогда радиус-вектор $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$, а его модуль $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Поэтому равенство (A) перепишется так:

$$\bar{E} = \frac{e}{r^3}(x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}),$$

а

$$E_x = \frac{e}{r^3}x; \quad E_y = \frac{e}{r^3}y; \quad E_z = \frac{e}{r^3}z.$$

Найдем теперь $\frac{\partial E_x}{\partial x}$, $\frac{\partial E_y}{\partial y}$ и $\frac{\partial E_z}{\partial z}$.

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = e\frac{r^3 - 3r^2x\cdot\frac{\partial r}{\partial x}}{r^6}.$$

Но $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, а $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{r}$.

Поэтому

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = e\frac{r^3 - 3r^2x\cdot\frac{x}{r}}{r^6} = e\frac{r^4 - 3r^2x^2}{r^7} = e\frac{r^2 - 3x^2}{r^5}.$$

Аналогично

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} = e\frac{r^2 - 3y^2}{r^5}; \quad \frac{\partial E_z}{\partial z} = e\frac{r^2 - 3z^2}{r^5};$$

$$\operatorname{div}\bar{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z},$$

поэтому

$$\operatorname{div}\bar{E} = e\frac{(r^2-3x^2)+(r^2-3y^2)+(r^2-3z^2)}{r^5} = e\,\frac{3r^2-3(x^2+y^2+z^2)}{r^5}.$$

Но так как $x^2+y^2+z^2=r^2$, то числитель последней дроби равен нулю и в рассматриваемом случае $\operatorname{div} E = 0$.

Поскольку знаменатель последней дроби r^5, то это заключение является верным только тогда, когда $r \neq 0$, т. е. всюду, кроме начала координат. В рассматриваемом случае, когда поверхность S не охватывает заряда e, радиус-вектор r не может быть равен нулю, поэтому поток вектора $\bar{E}$

$$\Pi = \iint\limits_{(S)} E\ ds = \iiint\limits_{(V)} \operatorname{div}\ \bar{E}\,dv = \iiint\limits_{(V)} 0\,\mathrm{dv} = 0.$$

Заключение. Поток Π вектора E — напряженности электрического поля точечного заряда — через всякую замкнутую поверхность равен нулю, если эта поверхность не охватывает заряда e.

2. Когда заряд e расположен внутри замкнутой поверхности, т. е. когда начало координат находится внутри замкнутой поверхности сделанное выше заключение оказывается неверным, так как в этом случае радиус-вектор r в начале координат равен нулю.

Для ответа на второй вопрос задачи воспользуемся результатами задачи (13,10).

Поскольку в рассматриваемом случае во всех точках объема V, ограниченного поверхностью S, кроме начала координат, $\operatorname{div}\bar{E} = 0$, то поток вектора Π не зависит от формы поверхности S, в связи с чем за поверхность S примем сферу радиуса R с центром в начале координат.

Так как внешняя нормаль в любой точке сферы совпадает с направлением радиуса-вектора $\bar{r}$ этой точки, то вектор $\bar{E}$ имеет то же направление, что и внешняя нормаль к сфере, поэтому проекция E_n вектора $\bar{E}$ на внешнюю нормаль равна его модулю.

Так как $\bar{E} = \frac{e}{r^3}\bar{r} = \frac{e}{r^2}\cdot\frac{\bar{r}}{r}$, а $\frac{\bar{r}}{r}$ есть единичный вектор $\bar{r}_0$ радиуса-вектора $\bar{r}$ точки, то $\bar{E} = \frac{e}{r^2}\cdot\bar{r}_0$, а его модуль $E = \frac{e}{r^2}$. Поэтому

$$E_n = \frac{e}{r^2}.$$

Модуль радиуса-вектора точек сферы равен радиусу R сферы, поэтому $r = R$ и тогда $E_n = \frac{e}{R^2}$, а поток вектора $\bar{E}$

$$\Pi = \iint\limits_{(S)} E_n\,ds = \iint\limits_{(S)} \frac{e}{R^2}ds = \frac{e}{R^2}\iint\limits_{(S)} ds = \frac{e}{R^2}\cdot 4\pi R^2 = 4\pi e,$$

так как $\iint\limits_{(S)} ds$ равен поверхности сферы, т. е. $4\pi R^2$.

Заключение. Если точечный заряд e расположен внутри замкнутой поверхности, то поток вектора $\bar{E}$ — напряженности поля данного заряда — через эту поверхность равен $4\pi e$.

Задача 13,12. Найти поток вектора $\bar{a} = x^2\bar{i} + y^2\bar{j} + z^2\bar{k}$ через положительный октант сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ $(x > 0,\ y > 0,\ z > 0)$.

Решение. Воспользуемся формулой (13,11), в которой надо взять $a_x = x^2$; $a_y = y^2$; $a_z = z^2$. Тогда поток вектора

$$\Pi = \iint\limits_{(S)} x^2\,dy\,dz + y^2\,dx\,dz + z^2\,dx\,dy, \tag{A}$$

где под S понимается поверхность сферы, расположенная в первом октанте.

Представим интеграл в формуле (A) в виде суммы трех интегралов. Областями интегрирования при вычислении этих интегралов будут проекции поверхности S соответственно на координатные плоскости yOz, xOz и xOy. Это видно из наличия в первом интеграле произведения $dy\,dz$, во втором $dx\,dz$, в третьем $dx\,dy$

$$\Pi = \underbrace{\iint\limits_{S_{yOz}} x^2\,dy\,dz}_{I_1} + \underbrace{\iint\limits_{S_{xOz}} y^2\,dx\,dz}_{I_2} + \underbrace{\iint\limits_{S_{xOy}} z^2\,dx\,dy}_{I_3}.$$

При вычислении интеграла I_1 выразим x^2 через y^2 и z^2. Из уравнения сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ следует, что $x^2 = R^2 - (y^2 + z^2)$. Перейдем к полярным координатам, в которых $y^2 + z^2 = \rho^2$; $x^2 = R^2 - \rho^2$, а $dy\,dz$ надо заменить на $\rho d\rho d\varphi$.

Поэтому

$$I_1 = \iint\limits_{S_{yOz}} x^2\,dy\,dz = \iint\limits_{S_{yOz}} (R^2 - \rho^2)\,\rho\,d\rho\,d\varphi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^R (R^2 - \rho^2)\,\rho\,d\rho =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{R^2\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^R d\varphi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4}\right) d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R^4}{4}\,d\varphi = \frac{R^4}{4} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi R^4}{8}.$$

Вычисляя I_2 и I_3, найдем, что каждый из этих интегралов также равен $\frac{\pi R^4}{8}$, а потому поток

$$\Pi = \frac{\pi R^4}{8} + \frac{\pi R^4}{8} + \frac{\pi R^4}{8} = \frac{3}{8}\pi R^4.$$

Задача 13,13 (для самостоятельного решения). Найти поток вектора $\bar{a} = x^2\bar{i} + y^2\bar{j} + z^2\bar{k}$ через поверхность сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Указание. Воспользоваться формулой (13,11). Удобно начать с вычисления $\iint\limits_{S_{xOy}} z^2\,dx\,dy$. Из уравнения сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ найти $z^2 = R^2 - (x^2 + y^2)$. Перейти к полярным координатам.

Ответ. $\Pi = \frac{3}{2}\pi R^4$.

Задача 13,14. Найти поток вектора $\bar{a} = y\bar{i} + z\bar{j} + x\bar{k}$ через часть плоскости $x + y + z = a$, расположенную в первом октанте ($x > 0,\ y > 0,\ z > 0$).

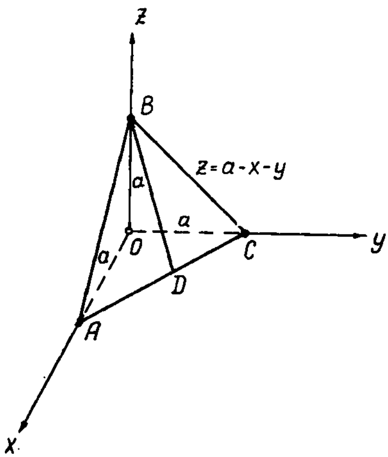
Решение. Воспользуемся формулой (13,8), по которой

$$\Pi = \iint\limits_{(S)} a_n\,ds,$$

и вычислим проекцию a_n вектора $\bar{a}$ на внешнюю нормаль к плоскости $x + y + z = a$ по формуле (13,9)

$$a_n = a_x \cos(\bar{n},\ x) + a_y \cos(\bar{n},\ y) + a_z \cos(\bar{n}, z).$$

Так как эта нормаль образует с осью Oz острый угол, в формуле для $\cos(\bar{n},\ z)$ возьмем знак плюс, а направляющие косинусы нормали найдем по формулам (13,3) и (13,4).



К задаче 13.14

$$\cos(\bar{n},\ x) = -\frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}};\ \cos(\bar{n},\ y) = -\frac{q}{\sqrt{1 + p^3 + q^2}};$$

$$\cos(\bar{n},\ z) = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}};$$

где

$$p = \frac{\partial z}{\partial x};\ q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Уравнение плоскости $x + y + z = a$ разрешим относительно z и получим $z = a - x - y$, откуда

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = -1; \quad q = \frac{\partial z}{\partial x} = -1;$$

$$\cos(\bar{n},\ x) = -\frac{-1}{\sqrt{1 + (-1)^2 + (-1)^2}} \text{ или } \cos(\bar{n},\ x) = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$\cos(\bar{n},\ y) = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \cos(\bar{n},\ z) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Из условия задачи $a_x = y$; $a_y = z$; $a_z = x$. Поток Π вектора $\bar{a}$ будет равен на основании (13,10)

$$\Pi = \iint\limits_{(S)} \left(y \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + z \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + x \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\right) ds = \frac{1}{\sqrt{3}} \iint\limits_{(S)} (x + y + z) ds,$$

где интеграл S распространен на часть плоскости $x + y + z = a$, расположенную в первом октанте. Но в последнем интеграле подынтегральную функцию $x + y + z$ можно заменить из уравнения поверхности на a, так как на поверхности S $x + y + z = a$,

$$\Pi = \frac{1}{\sqrt{3}} \iint\limits_{(S)} a\, ds = \frac{a}{\sqrt{3}} S_{\Delta ABC} \left(\iint\limits_{(S)} ds = S_{\Delta ABC}\right).$$

Треугольник ABC равносторонний ($AB = AC = BC$), значит, каждый его угол равен $60°$. Из равнобедренного прямоугольного треугольника AOC следует, что $AC = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$. Высота $BD = AC \cdot \sin 60° = AC \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$, а потому

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

и окончательно

$$\Pi = \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3}{2}.$$

Задача 13,15 (для самостоятельного решения). Определить поток вектора $\bar{a} = y\bar{i} + z\bar{j} + x\bar{k}$ из предыдущей задачи через полную поверхность пирамиды, ограниченной плоскостью $x + y + z = a$ и координатными плоскостями (см. чертеж к предыдущей задаче).

Указание. Искомый поток рассмотреть как сумму потоков через грани пирамиды AOB, BOC, AOC и ABC, причем использовать результат предыдущей задачи: через грань ABC поток вектора a $\Pi = \frac{a^3}{2}$. При вычислении потока этого вектора, например через грань AOB, учесть, что на этой грани $\cos(\bar{n}, x) = \cos(\bar{n}, z) = 0$, а $\cos(\bar{n}, y) = -1$ и вычисление потока через эту грань приведет к интегралу $-\iint\limits_{AOB} z\, ds$, в котором элемент ds площади треугольника AOB должен быть заменен на $dx\,dz$. Уравнение прямой AB: $x + z = a$. Отсюда $\Pi_{AOB} = -\frac{a^3}{6}$.

Поток через полную поверхность рассматриваемой пирамиды равен нулю.

Ответ. $\Pi = 0$.

Задача 13,16 (для самостоятельного решения). Найти поток вектора $a = x^2\bar{i} + y^2\bar{j} + z^2\bar{k}$ через сферу $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.

Указания. Искомый поток вычисляется по формуле (13,11).

1. Удобно перейти к сферическим координатам. Положим

$$\begin{aligned} x-a &= R\cos\varphi\sin\theta; \\ y-b &= R\sin\varphi\sin\theta; \\ z-c &= R\cos\theta; \\ (0 \leqslant \varphi &\leqslant 2\pi;\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi). \end{aligned} \tag{A}$$

Проверьте, действительно ли $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.

2. При вычислении, например $\iint\limits_{(S)} z^2\,dx\,dy$, рассмотреть его как сумму двух интегралов

$$\iint\limits_{(S)} z^2\,dx\,dy = \iint\limits_{(S_\text{в})} z^2\,dx\,dy + \iint\limits_{(S_\text{н})} z^2\,dx\,dy,$$

где $S_\text{в}$ — верхняя сторона верхней половины сферы, а

$S_\text{н}$ — нижняя сторона нижней половины сферы.

Тогда

$$\iint\limits_{(S)} z^2\,dx\,dy = \iint\limits_{S_\text{в}} z^2\cos(\bar{n},\ z)_\text{в}\,ds + \iint\limits_{(S_\text{н})} z^2\cos(\bar{n},\ z)_\text{н}\,ds,$$

где $\cos(\bar{n},\ z)_\text{в}$ и $\cos(\bar{n},\ z)_\text{н}$ — косинусы угла между внешней нормалью и осью Oz соответственно на верхней стороне верхней половины и на нижней стороне иижней половины сферы.

3. Разрешить уравнение поверхности относительно $z-c$

$$\begin{aligned} z-c &= \pm\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}; \\ z &= c \pm \sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}, \end{aligned} \tag{B}$$

где знак плюс надо взять для верхней половины сферы, а знак минус — для нижней.

На верхней стороне верхней половины сферы $\cos(\bar{n},\ z) > 0$

$$\cos(\bar{n},\ z) = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}, \tag{C}$$

а на нижней стороне нижней половины сферы $\cos(\bar{n},\ z) < 0$

$$\cos(\bar{n},\ z) = -\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}. \tag{D}$$

Вычисляя $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ из уравнений (B) и подставляя в (C) и (D), получим в двух случаях для $\cos(\bar{n},\ z)$ одно и то же выражение $\cos(\bar{n},\ z) =$

$= \frac{z-c}{R}$. Тогда, если учесть, что в сферических координатах элемент поверхности

$$ds = R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

(см. В. Смирнов. Курс высшей математики, т. II, стр. 190),

$$\iint\limits_{(S_B)} z^2 \cos(\bar{n}, z)_{\text{в}} \, ds + \iint\limits_{(S_H)} z^2 \cos(\bar{n}\ z)_{\text{н}} \, ds =$$

$$= \iint\limits_{(S)} z^2 \cdot \frac{z-c}{R} \cdot R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = R \iint\limits_{(S)} z^2 (z-c) \sin\theta \, d\theta \, d\varphi.$$

Так как $\cos(\bar{n}, z)$ имеет одно и то же выражение на поверхностях $(S_{\text{в}})$ и $(S_{\text{н}})$, мы от интегралов по этим поверхностям перешли к интегралу по всей поверхности сферы. Вычислить последний интеграл несложно. В нем на основании равенства (А) следует взять

$$z - c = R\cos\theta,$$

пределы интегрирования по θ будут 0 и π, а по φ они равны 0 и 2π.

После вычислений получим

$$\iint\limits_{(S)} z^2 \, dx \, dy = \frac{8}{3} \pi c R^3.$$

Аналогично вычисляются и два других интеграла:

$$\iint\limits_{(S)} x^2 \, dy \, dz \quad \text{и} \quad \iint\limits_{(S)} y^2 \, dx \, dz.$$

Ответ. $\Pi = \frac{8}{3} \pi R^3 (a + b + c)$.

Задача 13,17 (для самостоятельного решения). Найти поток вектора $\bar{a} = x^2\bar{i} + y^2\bar{j} + z^2\bar{k}$ через верхнюю сторону верхней половины сферы

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2.$$

Ответ. $\Pi = 2\pi R^2 \left(\frac{c^2}{2} + \frac{2}{3} cR + \frac{R^2}{4} \right)$.

Задача 13,18 (для самостоятельного решения). Вычислить поток вектора

$$\bar{a} = (x+y)\bar{i} + (y-x)\bar{j} + z\bar{k}$$

через поверхность шара единичного радиуса с центром в начале координат.

Указание. Вычислить дивергенцию вектора $\bar{a}$. Окажется, что

$$\operatorname{div} \bar{a} = 3,$$

и применить формулу Остроградского.

Ответ. $\Pi = 4\pi$.