ЧЕТЫРНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание. Свойства дивергенции. Упражнения, связанные с формулами Остроградского и Стокса.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

1. **Формула Стокса.** Эта формула связывает криволинейный интеграл по замкнутому контуру L с интегралом по поверхности, ограниченной данным контуром. Она записывается так:

$$\oint_L a_x\,dx + a_y\,dy + a_z\,dz =$$
$$= \iint_{(S)} \left[\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\cos(n,\ x) + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\cos(n,\ y) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\cos(n,\ z)\right] ds. \tag{14,1}$$

Здесь L — замкнутый контур, ограничивающий поверхность S. Направление нормали к поверхности S выбирается так: для наблюдателя, стоящего на поверхности и смотрящего на нее с конца нормали, обход контура L в правой системе координат должен происходить против движения часовой стрелки.

Формула (14,1) на основании формул (12,7) может быть записана так:

$$\oint_L a_x\,dx + a_y\,dy + a_z\,dz = \iint_{(S)} [\operatorname{rot}_x \bar{a}\cos(n,\ x) +$$
$$+ \operatorname{rot}_y \bar{a}\cos(n,\ y) + \operatorname{rot}_z \bar{a}\cos(n,\ z)]\,ds. \tag{14,2}$$

2. **Формула Стокса в векторной форме.** Учитывая, что выражение в квадратных скобках под интегралом в (14,2) есть проекция вектора $\operatorname{rot}\bar{a}$ на нормаль к поверхности, т. е. $(\operatorname{rot}\bar{a})_n$, формула (14,2) в векторной форме запишется так:

$$\oint_L \bar{a}\cdot\overline{dl} = \iint_{(S)} (\operatorname{rot}\bar{a})_n\,ds, \tag{14,3}$$

где $\overline{dl}$ — элемент дуги кривой L, рассматриваемый как малый вектор, проекции которого на координатные оси равны dx, dy и dz.

Из формулы Стокса (14,2) заключаем, что *циркуляция произвольного вектора по замкнутому контуру равна потоку ротора* *этого вектора через любую поверхность, опирающуюся на этот контур* (направление обхода контура L и направление нормали к поверхности S должны быть согласованы одно с другим).

Свойства дивергенции

Задача 14,1. Доказать что

$$\operatorname{div}(\bar{a}+\bar{b}) = \operatorname{div}\bar{a} + \operatorname{div}\bar{b},$$

где

$$\bar{a} = \bar{a}(x, y, z), \quad \bar{b} = \bar{b}(x, y, z).$$

Решение. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ определяются равенствами

$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k};$$

$$\bar{b} = b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k};$$

$$(\bar{a}+\bar{b})_x = a_x + b_x; \quad (\bar{a}+\bar{b})_y = a_y + b_y;$$

$$(\bar{a}+\bar{b})_z = a_z + b_z.$$

Согласно формуле (13,13)

$$\operatorname{div}\bar{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

Поэтому

$$\operatorname{div}(\bar{a}+\bar{b}) = \frac{\partial}{\partial x}(\bar{a}+\bar{b})_x + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{a}+\bar{b})_y + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{a}+\bar{b})_z =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(a_x+b_x) + \frac{\partial}{\partial y}(a_y+b_y) + \frac{\partial}{\partial z}(a_z+b_z) =$$

$$= \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y} + \frac{\partial b_z}{\partial z}\right).$$

Выражение, стоящее в первой скобке, есть $\operatorname{div} a$, а выражение, стоящее во второй скобке, есть $\operatorname{div}\bar{b}$.

Итак,

$$\operatorname{div}(\bar{a}+\bar{b}) = \operatorname{div}\bar{a} + \operatorname{div}\bar{b}.$$

Задача 14,2 (для самостоятельного решения). Доказать, что $\operatorname{div}(U\bar{a}) = \bar{a}\cdot\operatorname{grad}U$, где $\bar{a}$ — постоянный вектор, $U = U(x, y, z)$, а $\bar{a}\cdot\operatorname{grad}U$ — скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\operatorname{grad}U$.

Задача 14,3. Доказать, что, если $\bar{a} = \bar{a}(x, y, z)$, а функция $U = U(x, y, z)$, то

$$\operatorname{div}(U\bar{a}) = U\operatorname{div}\bar{a} + \bar{a}\cdot\operatorname{grad}U\ ^*$$

* В отличие от предыдущей задачи здесь $\bar{a}$ — переменный вектор.

Решение. Вектор $\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$;

$$U\bar{a} = (Ua_x)\,\bar{i} + (Ua_y)\,\bar{j} + (Ua_z)\,\bar{k};$$

$$\operatorname{div}(U\bar{a}) = \frac{\partial}{\partial x}(Ua_x) + \frac{\partial}{\partial y}(Ua_y) + \frac{\partial}{\partial z}(Ua_z) =$$

$$= \left(a_x\frac{\partial U}{\partial x} + U\frac{\partial a_x}{\partial x}\right) + \left(a_y\frac{\partial U}{\partial y} + U\frac{\partial a_y}{\partial y}\right) +$$

$$+ \left(a_z\frac{\partial U}{\partial z} + U\frac{\partial a_z}{\partial z}\right) = \underbrace{\left(a_x\frac{\partial U}{\partial x} + a_y\frac{\partial U}{\partial y} + a_z\frac{\partial U}{\partial z}\right)}_{\bar{a}\,\cdot\,\operatorname{drad} U} +$$

$$+ U\underbrace{\left(\frac{\partial a_z}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right)}_{\operatorname{div}\bar{a}} = U\operatorname{div}\bar{a} + \bar{a}\operatorname{grad}U.$$

(Сумма, стоящая в первой скобке, есть $\bar{a}\cdot\operatorname{grad}U$, так как проекции вектора $\operatorname{grad}U$ на координатные оси Ox, Oy и Oz равны соответственно $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$ и $\frac{\partial U}{\partial z}$, а проекции вектора $\bar{a}$ иа те же оси соответственно равны a_x, a_y и a_z).

Задача 14,4. Найти $\operatorname{div}(\operatorname{grad}U)$, где $U = U(x, y, z)$.

Решение. $\operatorname{div}(\operatorname{grad}U) =$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{grad}U)_x + \frac{\partial}{\partial y}(\operatorname{grad}U)_y + \frac{\partial}{\partial z}(\operatorname{grad}U_z) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} =$$

$= \Delta U$ (Δ — оператор Лапласа).

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}U = \Delta U.$$

Задача 14,5 (для самостоятельного решения). Доказать, что если $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, то

$$\operatorname{div}[\operatorname{grad}f(r)] = \frac{d^2f}{dr^2} + \frac{df}{dr}\cdot\frac{2}{r}.$$

Указание. Учесть, что

$$\frac{\partial}{\partial x}[f(r)] = \frac{df}{dr}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{df}{dr}\cdot\frac{x}{r}.$$

Задачи на формулу Остроградского

Задача 14,6. Применяя формулу Остроградского, преобразовать поверхностный интеграл

$$\iint\limits_{(S)} x^3\,dy\,dz + y^3\,dx\,dz + z^3\,dx\,dy,$$

если S — гладкая поверхность, ограничивающая объем V.

Решение. На основании формулы (13,8), полагая в ней $P = x^3$; $Q = y^3$; $R = z^3$, получаем

$$\iint\limits_{(S)} x^3\,dy\,dz + y^3\,dx\,dz + z^3\,dx\,dy =$$

$$\iiint\limits_{(V)} \left[\frac{\partial}{\partial x}(x^3) + \frac{\partial}{\partial y}(y^3) + \frac{\partial}{\partial z}(z^3)\right] dv = \iiint\limits_{(V)} (3x^2 + 3y^2 + 3z^2)\,dv =$$

$$= 3\iiint\limits_{(V)} (x^2 + y^2 + z^2)\,dv.$$

Задача 14,7. Применяя формулу Остроградского, преобразовать

$$I = \iint\limits_{(S)} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)\,ds,$$

где S — гладкая поверхность, ограничивающая объем V, $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$ — направляющие косинусы внешней нормали к поверхности S.

Решение. Полагая в формуле (13,7) $P = Q = R = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, получаем

$$I = \iiint\limits_{(V)} \left(\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2+z^2} + \frac{\partial}{\partial y}\sqrt{x^2+y^2+z^2} + \frac{\partial}{\partial z}\sqrt{x^2+y^2+y^2}\right) dv =$$

$$= \iiint\limits_{(V)} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) dv =$$

$$= \iiint\limits_{(V)} \frac{x+y+z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dv.$$

Задача 14,8 (для самостоятельного решения). Преобразовать по формуле Остроградского

$$\iint\limits_{(S)} \frac{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,ds,$$

сохраняя обозначения предыдущей задачи.

Ответ. $2\iiint\limits_{(V)} \frac{dv}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

Задача 14,9 (для самостоятельного решения). Доказать, что

$$\iint\limits_{(S)} x\,dy\,dz + y\,dx\,dz + z\,dx\,dy$$

равен утроенному объему тела, ограниченного поверхностью S.

Задача 14,10 (для самостоятельного решения). Применяя формулу Остроградского, преобразовать поверхностный интеграл

$$\iint\limits_{(S)}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)ds,$$

где S — гладкая поверхность, ограничивающая объем V, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы внешней нормали к поверхности S.

Ответ. $\iiint\limits_{(V)}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)dv$

или в другой записи

$$\iiint\limits_{(V)}\Delta u\cdot dv,$$

где $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ есть лапласиан функции u.

Задача 14,11 (для самостоятельного решения). Доказать, что если S — замкнутая простая поверхность, l — любое постоянное направление, а $\bar{n}$ внешняя нормаль к поверхности S, то

$$\iint\limits_{(S)}\cos(\bar{n},\ \bar{l})\,ds=0.$$

Указание. Заменить $\cos(\bar{n},\ \bar{l})$ по формуле

$$\cos(\bar{n},\ \bar{l})=\cos(\bar{n},\ x)\cos(\bar{l},\ x)+\cos(\bar{n},\ y)\cos(\bar{l},\ y)+$$
$$+\cos(\bar{n},\ z)\cos(\bar{l},\ z).$$

Задача 14,12. С помощью формулы Остроградского доказать, что поток вихря вектора $\bar{a}$ через замкнутую поверхность равен нулю.

Решение. Вихрь вектора $\bar{a}$ определяется формулой (12,6). Поток вектора $\operatorname{rot}\bar{a}$ через замкнутую поверхность S вычисляется по формуле (13,8)

$$\Pi=\iint\limits_{(S)}(\operatorname{rot}a)_n\,ds.$$

Нам следует найти проекцию вектора $\operatorname{rot}\bar{a}$ на нормаль к поверхности. Пользуясь формулами (12,7) и (13,9), определим

$$(\operatorname{rot}\bar{a})_n=\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\cos(\bar{n},\ x)+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\cos(\bar{n},\ y)+$$
$$+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\cos(\bar{n},\ z),$$

поэтому искомый поток

$$\Pi = \iint\limits_{(S)} \left[\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\cos(\bar{n},\ x) + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\cos(\bar{n},\ y) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\cos(\bar{n},\ z)\right] ds.$$

Теперь применим формулу Остроградского (13,15), полагая в ней

$$P = \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial y};\ Q = \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x};\ R = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y};$$

$$\Pi = \iiint\limits_{(V)} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\right] dv =$$

$$= \iiint\limits_{(V)} \left[\left(\frac{\partial^2 a_z}{\partial y\,\partial x} - \frac{\partial^2 a_y}{\partial z\,\partial x}\right) + \left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial z\,\partial y} - \frac{\partial^2 a_z}{\partial x\,\partial y}\right) + \left(\frac{\partial^2 a_y}{\partial x\,\partial z} - \frac{\partial^2 a_z}{\partial y\,\partial z}\right)\right] dv.$$

Легко убедиться, что выражение, стоящее в квадратной скобке, равно нулю:

$$\Pi = 0.$$

Задача 14,13. С помощью формулы Остроградского вычислить

$$I = \iint\limits_{(S)} x^3\,dy\,dz + y^3\,dx\,dz + z^3\,dx\,dy,$$

где S — внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Решение. В задаче 14,6 этот интеграл был преобразован к виду

$$3\iiint\limits_{(V)} (x^2 + y^2 + z^2)\,dv.$$

Наличие под знаком интеграла суммы квадратов координат указывает на целесообразность перехода к сферическим координатам, в которых

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2; \quad dv = \rho^2 \sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi;$$

$$I = 3\iiint\limits_{(V)} \rho^2 \cdot \rho^2 \sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi = 3\iiint\limits_{(V)} \rho^4 \sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi,$$

где V — объем шара, ограниченного поверхностью S.

$$I = 3\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta\,d\theta \int\limits_0^{R} \rho^4\,d\rho = 3 \cdot \frac{R^5}{5} \cdot 2 \cdot 2\pi = \frac{12}{5}\pi R^5,$$

так как

$$\int_0^R \rho^4\,d\rho = \frac{R^5}{5};\quad \int_0^\pi \sin\theta\,d\theta = -\cos\theta\Big|_0^\pi = 2;\quad \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi.$$

Задача 14,14 (для самостоятельного решения). С помощью формулы Остроградского вычислить

$$\iint\limits_{(S)} x^2\,dy\,dz + y^2\,dx\,dz + z^2\,dx\,dy,$$

где S — внешняя сторона куба $0 \leqslant x \leqslant a$; $0 \leqslant y \leqslant a$; $0 \leqslant z \leqslant a$.

Ответ. $\frac{3}{2}a^4$.

Указание. При вычислении тройного интеграла $\iiint\limits_{(V)} (x + y + z)\,dv$ имеет смысл представить его в виде суммы трех интегралов

$$\iiint\limits_{(V)} x\,dv + \iiint\limits_{(V)} y\,dv + \iiint\limits_{(V)} z\,dv,$$

причем каждый из них окажется равным $\frac{a^4}{2}$.

Например, $\iiint\limits_{(V)} x\,dv = \int_0^a x\,dx \iint\limits_{S_{yOz}} dy\,dz$, а $\iint\limits_{(S_{yOz})} dy\,dz = a^2$.

S_{yOz} — проекция поверхности S на плоскость yOz.

Задача 14,15 (для самостоятельного решения). Пользуясь формулой Остроградского, вычислить

$$\iint\limits_{(S)} x\cos(\bar{n},\ x)\,ds,$$

где S — поверхность эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Ответ. $\frac{4}{3}\pi abc$.

Задача 14,16. Вычислить по формуле Остроградского

$$\iint\limits_{(S)} [y^2 z\cos(\bar{n},\ z) - yz^2\cos(\bar{n},\ y)]\,ds,$$

где S — поверхность эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Решение. Полагаем в формуле (13,15) $P = 0$; $Q = -yz^2$; $R = y^2 z$; $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$; $\frac{\partial Q}{\partial y} = -z^2$; $\frac{\partial R}{\partial z} = y^2$, тогда

$$\iint\limits_{(S)} [y^2 z\cos(\bar{n},\ z) - yz^2\cos(\bar{n},\ y)]\,ds = \iiint\limits_{(V)} (y^2 - z^2)\,dv,$$

где V — объем эллипсоида.

Тройной интеграл вычислим по формуле (3,4 б), которую мы уже применяли на третьем практическом занятии в четвертой части этой книги.

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\,dv = \int\limits_{z_0}^{z_1} dz \iint\limits_{E_{xOy}} f(x, y, z)\,dx\,dy, \qquad (14,4)$$

где E_{xOy} — проекция на плоскость xOy фигуры, получающейся в сечении объема V, плоскостью, параллельной плоскости xOy, которая соответствует фиксированному значению z. При этом $z_0 < z < z_1$, а $z = z_0$ и $z = z_1$ — уравнения плоскостей, между которыми содержится объем V тела, причем фигура, получающаяся в сечении, проектируется без искажения. Применим эту формулу для вычисления интересующего нас тройного интеграла. Представим его в таком виде:

$$\iiint\limits_{(V)} (y^2 - z^2)\,dv = \iiint\limits_{(V)} y^2\,dx\,dy\,dz - \iiint\limits_{(V)} z^2\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \int\limits_{-b}^{b} y^2\,dy \iint\limits_{E_{xOz}} dx\,dz - \int\limits_{-c}^{c} z^2\,dz \iint\limits_{E_{xOy}} dx\,dy.$$

Здесь: 1) E_{xOz} — проекция на плоскость xOz сечения эллипсоида плоскостью, параллельной плоскости xOz, при фиксированном значении y; $\iint\limits_{E_{xOz}} dx\,dz$ равен площади этой проекции. Уравнение контура проекции получим из уравнения поверхности эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, считая, что в этом уравнении y — величина фиксированная.

Уравнение этого контура будет иметь вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}$$

или

$$\frac{x^2}{a^2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)} + \frac{z^2}{c^2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)} = 1.$$

Полуосями этого эллипса будут

$$a_1 = a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}; \quad b_1 = c\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}},$$

а его площадь равна $\pi a_1 b_1$, т. е.

$$E_{xOz} = \pi ac\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)$$

и тогда в правой части (A) интеграл.

$$\iint_{E_{xOz}} dx\,dz = \pi ac\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right),$$

$$\int_{-b}^{b} y^2\,dy \iint_{E_{xOz}} dx\,dz = \int_{-b}^{b} y^2 \cdot \pi ac\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) dy = \frac{4}{15}\pi acb^3.$$

2. Точно так же вычислим в правой части (A) интеграл $\iint_{E_{xOy}} dx\,dy$, учитывая, что E_{xOy} есть проекция на плоскость xOy сечения эллипсоида плоскостью, параллельной плоскости xOy.

Уравнение контура этого сечения получим из уравнения поверхности эллипсоида, считая, что z имеет в этом уравнении фиксированное значение.

Уравнение контура E_{xOy} будет

$$\frac{x^2}{a^2\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)} = 1,$$

а площадь эллипса

$$E_{xOy} = \iint_{E_{xOy}} dx\,dy = \pi ab\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right).$$

В правой части (A) второй интеграл

$$\int_{-c}^{c} z^2\,dz \iint_{E_{xOy}} dx\,dy = \frac{4}{15}\pi abc^3,$$

поэтому окончательно искомый интеграл

$$\iiint_{(V)} (y^2 - z^2)\,dv = \frac{4}{15}\pi acb^3 - \frac{4}{15}\pi abc^3 = \frac{4}{15}\pi abc\,(b^2 - c^2).$$

Задача 14,17. Вычислить интеграл Гаусса

$$G = \iint_{(S)} \frac{\cos(\bar{n}, \bar{r})}{r^2}\,ds,$$

где S — простая замкнутая гладкая поверхность, ограничивающая объем x; $\bar{n}$ — внешняя нормаль к поверхности S в ее точке $A(x, y, z)$; r — радиус-вектор, соединяющий фиксированную точку $B(a, b, c)$ с переменной точкой $A(x, y, z)$ поверхности.

Рассмотреть два случая:

1) когда поверхность S не окружает точку B и не проходит через нее;

2) когда поверхность S окружает точку B.

Решение. Косинус угла между нормалью $\bar{n}$ и радиусом-вектором $\bar{r}$ определяется по формуле

$$\cos(\bar{n}, \bar{r}) = \cos(\bar{n}, x)\cos(\bar{r}, x) + \cos(\bar{n}, y)\cos(\bar{r}, y) + \\ + \cos(\bar{n}, z)\cos(\bar{r}, z) \tag{A}$$

(обозначения не требуют пояснений).

Модуль радиуса-вектора $\bar{r}$

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}. \tag{B}$$

Косинусы углов между радиусом-вектором и координатными осями равны

$$\cos(\bar{r}, x) = \frac{x-a}{r};\ \cos(\bar{r}, y) = \frac{y-b}{r};\ \cos(r, z) = \frac{z-c}{r}. \tag{C}$$

Подставляя эти значения в формулу (A), имеем

$$\cos(\bar{n}, r) = \frac{x-a}{r}\cos(\bar{n}, x) + \frac{y-b}{r}\cos(\bar{n}, y) + \frac{z-c}{r}\cos(\bar{n}, z).$$

Теперь вычисляемый интеграл G перепишется так:

$$G = \iint\limits_{(S)} \left[\frac{x-a}{r^3}\cos(\bar{n}, x) + \frac{y-b}{r^3}\cos(\bar{n}, y) + \frac{z-c}{r^3}\cos(\bar{n}, z)\right] ds. \tag{D}$$

Для вычисления этого интеграла применим формулу Остроградского (13,7), в которой надо считать, что $P = \frac{x-a}{r^3}$; $Q = \frac{y-b}{r^3}$; $R = \frac{z-c}{r^3}$.

Определим $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$ и $\frac{\partial R}{\partial z}$.

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{r^3 - (x-a)\cdot 3r^2\frac{\partial r}{\partial x}}{r^6}.$$

Но из формулы (B) следует, что

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}} = \frac{x-a}{r}.$$

Поэтому

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{r^3 - 3\cdot\frac{(x-a)^2}{r}\cdot r^2}{r^6} = \frac{r^4 - 3(x-a)^2 r^2}{r^7};$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{r^2 - 3(x-a)^2}{r^5}$$

и аналогично

$$\frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{r^2-3(y-b)^2}{r^5};\quad \frac{\partial R}{\partial z}=\frac{r^2-3(z-c)^2}{r^5};$$

$$G=\iiint\limits_{(V)}\left[\frac{r^2-3(x-a)^2}{r^5}+\frac{r^2-3(y-b)^2}{r^5}+\frac{r^2-3(z-c)^2}{r^5}\right]dv \qquad (E)$$

или

$$G=\iiint\limits_{(V)}\frac{3r^2-3[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]}{r^5}\,dv.$$

Так как $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$, то

$$G=\iiint\limits_{(V)}\frac{3r^2-3r^2}{r^5}\,dv=0.$$

При этом существенно следующее: применять формулу Остроградского надо так, чтобы была соблюдена непрерывность функций P, Q и R и их производных $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$ и $\frac{\partial R}{\partial z}$. Их непрерывность будет соблюдена, когда $r \neq 0$, т. е. когда точка $B(a, b, c)$ находится вне поверхности S.

Итак, отвечая на первый вопрос задачи, можно сказать, что когда фиксированная точка B находится вне поверхности S, интеграл Гаусса $G=0$.

Теперь рассмотрим случай, когда поверхность S окружает точку $B(a, b, c)$. Преобразуя по формуле Остроградского (13,14) двойной интеграл по поверхности S к тройному интегралу, распространенному на объем V, ограниченный этой поверхностью, надо иметь в виду, что $\bar{r}$ — радиус-вектор, соединяющий точку $B(a, b, c)$ с любой точкой $A(x, y, z)$ уже не поверхности S, а области (V). Поэтому в самой точке B он равен нулю, а функции P, Q и R и их частные производные, в которых r находится в знаменателе, перестают быть непрерывными в этой единственной точке области V (во всех остальных точках этой области они непрерывны), и формулу Остроградского для преобразования интеграла Гаусса применить во всем объеме V нельзя (интеграл Гаусса в данном случае становится несобственным).

Изолируем точку B и тем самым получим возможность во всем оставшемся объеме применить к интегралу Гаусса формулу Остроградского.

Образуем вокруг точки $B(a, b, c)$ сферу S_ρ такого радиуса ρ, чтобы она целиком содержалась внутри объема X. Тогда для объема V_1, заключенного между поверхностью S и поверхностью сферы S_ρ, формула Остроградского применима и поэтому по формулам (D) и (E) получаем

$$\iint\limits_{(S)}\left[\frac{x-a}{r^3}\cos(\bar n,\ x)+\frac{y-b}{r^3}\cos(\bar n,\ y)+\frac{z-c}{r^3}\cos(\bar n,\ z)\right]ds-$$

$$-\iint\limits_{(S_\rho)}\frac{x-a}{r^3}\cos(\bar n,\ x)+\frac{y-b}{r^3}\cos(\bar n,\ y)+\frac{z-c}{r^3}\cos(\bar n,\ z)\Big]ds=$$

$$=\iiint\limits_{(V_1)'}\left[\frac{r^2-3(x-a)^2}{r^5}+\frac{r^2-3(y-b)^2}{r^5}+\frac{r^2-3(z-c)^2}{r^5}\right]dv=0.$$

Отсюда вычисляемый интеграл

$$G=\iint\limits_{(S)}\frac{\cos(\bar n,\ \bar r)}{r^2}ds=\iint\limits_{(S_\rho)}\Big[\frac{x-a}{r^3}\cos(\bar n,\ x)+\frac{y-b}{r^3}\cos(\bar n,\ y)+$$

$$+\frac{z-c}{r^3}\cos(\bar n,\ z)\Big]dv.$$

На сфере S_ρ рассматривается внешняя нормаль.

На поверхности сферы S_ρ $r=\rho$, нормаль к сфере $\bar n$ направлена по ее радиусу, а потому направляющие косинусы $\cos(\bar n,\ x)$, $\cos(\bar n,\ y)$, и $\cos(\bar n,\ z)$ нормали $\bar n$ равны направляющим косинусам радиуса-вектора $\bar\rho$, которые получаются из формул (C) заменой в них r на ρ.

Таким образом, последнее равенство перепишется так:

$$G=\iint\limits_{(S_\rho)}\left(\frac{x-a}{\rho^3}\cdot\frac{x-a}{\rho}+\frac{y-b}{\rho^3}\cdot\frac{y-b}{\rho}+\frac{z-c}{\rho^3}\cdot\frac{z-c}{\rho}\right)ds=$$

$$=\iint\limits_{(S_\rho)}\frac{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}{\rho^4}ds=\iint\limits_{(S_\rho)}\frac{\rho^2}{\rho^4}ds=$$

$$=\frac{1}{\rho^2}\iint\limits_{(S_\rho)}ds=\frac{1}{\rho^2}\cdot4\pi\rho^2=4\pi.$$

Здесь величина $\frac{1}{\rho^2}$, как постоянная, вынесена за знак двойного интеграла, а двойной интеграл $\iint\limits_{(S_\rho)}ds$ по поверхности (S_ρ) равен площади этой поверхности, т. е. $4\pi\rho^2$.

Итак, на второй вопрос задачи следует ответить так: если поверхность S окружает фиксированную точку $B(a,\ b,\ c)$, то интеграл Гаусса $G=4\pi$.

Укажем для справки, что, когда поверхность S проходит через точку B, то интеграл Гаусса $G=2\pi$. Доказывать этого мы не будем.

Задача 14,18. Доказать, что вихрь суммы векторных полей равен сумме вихрей этих полей

$$\operatorname{rot}(\bar{a} + \bar{b}) = \operatorname{rot}\bar{a} + \operatorname{rot}\bar{b}. \tag{14,5}$$

Решение. Из определения вихря вектора следует

$$\operatorname{rot}(\bar{a} + \bar{b}) = \left[\frac{\partial(a_z + b_z)}{\partial y} - \frac{\partial(a_y + b_y)}{\partial z}\right]\bar{i} +$$

$$+ \left[\frac{\partial(a_x + b_x)}{\partial z} - \frac{\partial(a_z + b_z)}{\partial x}\right]\bar{j} + \left[\frac{\partial(a_y + b_y)}{\partial x} + \frac{\partial(a_x + b_x)}{\partial y}\right]\bar{k} =$$

$$= \left[\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} + \frac{\partial b_z}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial a_y}{\partial z} + \frac{\partial b_y}{\partial z}\right)\right]\bar{i} + \left[\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} + \frac{\partial b_x}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial a_z}{\partial x} + \frac{\partial b_z}{\partial x}\right)\right]\bar{j} +$$

$$+ \left[\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial a_x}{\partial y} + \frac{\partial b_x}{\partial y}\right)\right]\bar{k} =$$

$$= \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\bar{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\bar{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\bar{k} +$$

$$+ \left(\frac{\partial b_z}{\partial y} - \frac{\partial b_y}{\partial z}\right)\bar{i} + \left(\frac{\partial b_x}{\partial z} - \frac{\partial b_z}{\partial x}\right)\bar{j} + \left(\frac{\partial b_y}{\partial x} - \frac{\partial b_x}{\partial y}\right)\bar{k}.$$

Первые три слагаемые есть $\operatorname{rot}\bar{a}$, а вторые три — $\operatorname{rot}\bar{b}$. Этим доказано требуемое:

$$\operatorname{rot}(\bar{a} + \bar{b}) = \operatorname{rot}\bar{a} + \operatorname{rot}\bar{b}.$$

Задача 14,19. *(вычисление вихря произведения скалярной функции на вектор).* Доказать, что

$$\operatorname{rot}(u\bar{a}) = \operatorname{grad} u \times \bar{a} + u \operatorname{rot}\bar{a}, \tag{14,6}$$

где u — скалярная функция от x, y, z.

Решение. Докажем, что проекции векторов, стоящих в левой и правой частях доказываемого равенства, равны между собой

$$(\operatorname{rot} u\bar{a})_x = \frac{\partial}{\partial y}(ua_z) - \frac{\partial}{\partial z}(ua_y) = \frac{\partial u}{\partial y}a_z + u\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial z}a_y - u\frac{\partial a_y}{\partial z} =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial y}a_z - \frac{\partial u}{\partial z}a_y + u\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right). \tag{A}$$

Векторное произведение векторов $\operatorname{grad} u$ и $\bar{a}$ равно:

$$\operatorname{grad} u \times \bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}.$$

Отсюда следует, что

$$(\operatorname{grad} u \times \bar{a})_x = \frac{\partial u}{\partial y}a_z - \frac{\partial u}{\partial z}a_y.$$

В равенстве (A) первые два слагаемых есть $(\operatorname{grad} u \otimes \bar{a})_x$, а выражение в круглых скобках есть проекция $\operatorname{rot} \bar{a}$ на ось Ox. Таким образом,

$$(\operatorname{rot} u\bar{a})_x = (\operatorname{grad} u \times \bar{a})_x + u(\operatorname{rot} \bar{a})_x. \qquad (A)$$

Аналогично

$$(\operatorname{rot} u\bar{a})_y = (\operatorname{grad} u \times \bar{a})_y + u(\operatorname{rot} \bar{a})_y \qquad (B)$$

$$(\operatorname{rot} u\bar{a})_z = (\operatorname{grad} u \times \bar{a})_z + u(\operatorname{rot} \bar{a})_z. \qquad (C)$$

Умножая (A), (B) и (C) соответственно на $\bar{i}$, $\bar{j}$ и $\bar{k}$ и почленно складывая, получим требуемую формулу.

Задача 14,20 *(градиент скалярного произведения)*. Доказать, что

$$\operatorname{grad}(\bar{a} \cdot \bar{b}) = \bar{a} \times \operatorname{rot} \bar{b} + \bar{b} \times \operatorname{rot} \bar{a} + \frac{d\bar{a}}{d\bar{b}} + \frac{d\bar{b}}{d\bar{a}}. \qquad (14,7)$$

Решение. В правой части доказываемого равенства последние два слагаемых являются производными одного вектора по другому вектору. Начнем с определения того, что называется производной вектора по другому вектору.

Определение. Производной вектора $\bar{a}$ по вектору $\bar{b}$ называется вектор

$$\frac{d\bar{a}}{d\bar{b}} = \frac{\partial \bar{a}}{\partial x} b_x + \frac{\partial \bar{a}}{\partial y} b_y + \frac{\partial \bar{a}}{\partial z} b_z.$$

Найдем проекции этого вектора на координатные оси:

$$\begin{array}{l|l}
\dfrac{\partial \bar{a}}{\partial x} = \dfrac{\partial a_x}{\partial x}\bar{i} + \dfrac{\partial a_y}{\partial x}\bar{j} + \dfrac{\partial a_z}{\partial x}\bar{k} & b_x \\
\dfrac{\partial \bar{a}}{\partial y} = \dfrac{\partial a_x}{\partial y}\bar{i} + \dfrac{\partial a_y}{\partial y}\bar{j} + \dfrac{\partial a_z}{\partial y}\bar{k} & b_y \\
\dfrac{\partial \bar{a}}{\partial z} = \dfrac{\partial a_x}{\partial z}\bar{i} + \dfrac{\partial a_y}{\partial z}\bar{j} + \dfrac{\partial a_z}{\partial z}\bar{k} & b_z.
\end{array}$$

Умножая каждое из этих равенств соответственно на b_x, b_y и b_z и почленно складывая, найдем, что вектор

$$\frac{d\bar{a}}{d\bar{b}} = \frac{\partial \bar{a}}{\partial x} b_x + \frac{\partial \bar{a}}{\partial y} b_y + \frac{\partial \bar{a}}{\partial z} b_z = \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} b_x + \frac{\partial a_x}{\partial y} b_y + \frac{\partial a_x}{\partial z} b_z\right)\bar{i} +$$
$$+ \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} b_x + \frac{\partial a_y}{\partial y} b_y + \frac{\partial a_y}{\partial z} b_z\right)\bar{j} + \left(\frac{\partial a_z}{\partial x} b_x + \frac{\partial a_z}{\partial y} b_y + \frac{\partial a_z}{\partial z} b_z\right)\bar{k}.$$

Отсюда следует, что проекции вектора $\frac{d\bar{a}}{d\bar{b}}$ на координатные оси равны:

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{d\bar{a}}{d\bar{b}}\right)_x &= \frac{\partial a_x}{\partial x}b_x + \frac{\partial a_x}{\partial y}b_y + \frac{\partial a_x}{\partial z}b_z\\ \left(\frac{d\bar{a}}{d\bar{b}}\right)_y &= \frac{\partial a_y}{\partial x}b_x + \frac{\partial a_y}{\partial y}b_y + \frac{\partial a_y}{\partial z}b_z\\ \left(\frac{d\bar{a}}{d\bar{b}}\right)_z &= \frac{\partial a_z}{\partial x}b_x + \frac{\partial a_z}{\partial y}b_y + \frac{\partial a_z}{\partial z}b_z\end{aligned}\right\}. \tag{14,8}$$

Спроектируем левую и правую части доказываемой формулы (14,7) на координатные оси (очевидно, что каждая из частей этой формулы есть вектор). Учитывая, что

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z,$$

получим

$$\operatorname{grad}(\bar{a}\cdot\bar{b}) = \frac{\partial}{\partial x}(a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z)\bar{i} +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial y}(a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z)\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}(a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z)\bar{k}.$$

Продифференцировав первое слагаемое правой части, найдем, что проекция $\operatorname{grad}(\bar{a}\cdot\bar{b})$ на ось Ox равна

$$[\operatorname{grad}(\bar{a}\cdot\bar{b})]_x = \frac{\partial a_x}{\partial x}b_x + a_x\frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial x}b_y + a_y\frac{\partial b_y}{\partial x} + \frac{\partial a_z}{\partial x}b_z + a_z\frac{\partial b_z}{\partial x},$$

или в более удобной записи,

$$[\operatorname{grad}(\bar{a}\cdot\bar{b})]_x = \frac{\partial a_x}{\partial x}b_x + \frac{\partial a_y}{\partial x}b_y + \frac{\partial a_z}{\partial x}b_z + \frac{\partial b_x}{\partial x}a_x + \frac{\partial b_y}{\partial x}a_y + \frac{\partial b_z}{\partial x}b_z. \tag{14,9}$$

Теперь спроектируем на ось Ox вектор, стоящий в правой части формулы (14,7),

$$\begin{aligned}(\bar{a}\times\operatorname{rot}\bar{b})_x &= a_y(\operatorname{rot}\bar{b})_z - a_z(\operatorname{rot}\bar{b})_y =\\ &= a_y\left(\frac{\partial b_y}{\partial x} - \frac{\partial b_x}{\partial y}\right) - a_z\left(\frac{\partial b_x}{\partial z} - \frac{\partial b_z}{\partial x}\right) =\\ &= \frac{\partial b_y}{\partial x}a_y - \frac{\partial b_x}{\partial y}a_y - \frac{\partial b_x}{\partial z}a_z + \frac{\partial b_z}{\partial x}a_z.\end{aligned} \tag{A}$$

Точно так же, меняя местами a и b, получаем:

$$(\bar{b}\times\operatorname{rot}\bar{a})_x = \frac{\partial a_y}{\partial x}b_y - \frac{\partial a_x}{\partial y}b_y - \frac{\partial a_x}{\partial z}b_z + \frac{\partial a_z}{\partial x}b_z; \tag{B}$$

$$\left(\frac{d\bar{a}}{d\bar{b}}\right)_x = \frac{\partial a_x}{\partial x}b_x + \frac{\partial a_x}{\partial y}b_y + \frac{\partial a_x}{\partial z}b_z; \tag{C}$$

$$\left(\frac{d\bar{b}}{d\bar{a}}\right)_x = \frac{\partial b_x}{\partial x}a_x + \frac{\partial b_x}{\partial y}a_y + \frac{\partial b_x}{\partial z}a_z. \tag{D}$$

Легко заметить, что от почленного сложения (A), (B), (C) и (D) получим $[\operatorname{grad}(\bar{a}\cdot\bar{b})]_x$. Точно так же мы прийдем к заключению, что и проекции левой и правой части (14,7) на оси Oy и Oz равны между собой. Но если проекции двух векторов соответственно равны, то и сами векторы равны. Значит, требуемое доказано.

Задача 14,21 *(дивергенция векторного произведения)*. Доказать, что

$$\operatorname{div}(\bar{a}\times\bar{b})=\bar{b}\operatorname{rot}\bar{a}-\bar{a}\operatorname{rot}\bar{b}$$

(вектор $\bar{a}=a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k}$; вектор $\bar{b}=b_x\bar{i}+b_y\bar{j}+b_z\bar{k}$, причем проекции векторов есть функции x, y и z).

Решение. Расписываем дивергенцию вектора по формуле (13,6):

$$\operatorname{div}(\bar{a}\times\bar{b})=\frac{\partial}{\partial x}(\bar{a}\times\bar{b})_x+\frac{\partial}{\partial y}(\bar{a}\times\bar{b})_y+\frac{\partial}{\partial z}(\bar{a}\times\bar{b})_z;$$

$$\operatorname{div}(\bar{a}\times\bar{b})=\frac{\partial}{\partial x}(a_yb_z-a_zb_y)+\frac{\partial}{\partial y}(a_zb_x-a_xb_z)+$$
$$+\frac{\partial}{\partial z}(a_xb_y-a_yb_x)=\frac{\partial a_y}{\partial x}b_z+\frac{\partial b_z}{\partial x}a_y-\frac{\partial a_z}{\partial x}b_y-\frac{\partial b_y}{\partial x}a_z+$$
$$+\frac{\partial a_z}{\partial y}b_x+\frac{\partial b_x}{\partial y}a_z-\frac{\partial a_x}{\partial y}b_z-\frac{\partial b_z}{\partial y}a_x+$$
$$+\frac{\partial a_x}{\partial z}b_y+\frac{\partial b_y}{\partial z}a_x-\frac{\partial a_y}{\partial z}b_x-\frac{\partial b_x}{\partial z}a_y=$$
$$=b_x\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)+b_y\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)+b_z\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)-$$
$$-\left[a_x\left(\frac{\partial b_z}{\partial y}-\frac{\partial b_y}{\partial z}\right)+a_y\left(\frac{\partial b_x}{\partial z}-\frac{\partial b_z}{\partial x}\right)+a_z\left(\frac{\partial b_y}{\partial x}-\frac{\partial b_x}{\partial y}\right)\right].$$

Выражения в скобках в первой строке есть проекции вектора $\operatorname{rot}\bar{a}$ соответственно на оси Ox, Oy, Oz, а во второй строке выражения в скобках являются проекциями на те же оси вектора $\operatorname{rot}\bar{b}$. Таким образом, правая часть есть разность скалярных произведений

$$\bar{b}\cdot\operatorname{rot}\bar{a}-\bar{a}\cdot\operatorname{rot}\bar{b}$$

и, следовательно, требуемое доказано.

Задача 14,22 *(дивергенция градиента)*. Доказать, что

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}f)=\Delta f,$$

где

$$\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \qquad (14,10)$$

(Δf называется лапласианом функции f).

Решение. Известно, что

$$\operatorname{grad}f=\frac{\partial f}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\bar{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\bar{k}.$$

По (13,6)

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)'_x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)'_y + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)'_z =$$
$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \Delta f,$$

что и требовалось.

Задача 14,23 *(дивергенция вихря)*. Доказать, что дивергенция вихря равна нулю, т. е.

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \bar{a}) = 0. \qquad (4,11).$$

Решение. По формуле (13,6)

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \bar{a}) = (\operatorname{rot}_x \bar{a})'_x + (\operatorname{rot}_y \bar{a})'_y + (\operatorname{rot}_z \bar{a})'_z.$$

Но

$$\operatorname{rot}_x \bar{a} = \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z};$$
$$\operatorname{rot}_y \bar{a} = \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x};$$
$$\operatorname{rot}_z \bar{a} = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y},$$

поэтому

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \bar{a}) = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)'_x + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)'_y +$$
$$+ \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)'_z = \frac{\partial^2 a_z}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 a_y}{\partial z\,\partial x} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial z\,\partial y} - \frac{\partial^2 a_z}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial x\,\partial z} - \frac{\partial^2 a_x}{\partial y\,\partial z} = 0.$$

Задача 14,24 *(дивергенция лапласиана)*. Доказать формулу

$$\operatorname{div}(\Delta \bar{a}) = \Delta(\operatorname{div} \bar{a}). \qquad (14,12)$$

Решение. Выше в формуле (14,10) уже употреблялся термин «лапласиан». Возвратимся к этому весьма важному понятию. Оператором Лапласа называется выражение вида

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Если его применить к скалярной функции f, то

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Применяя оператор Лапласа к вектору $\bar{a}$, имеем

$$\Delta \bar{a} = \frac{\partial^2 \bar{a}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{a}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{a}}{\partial z^2}. \qquad (14,13)$$

Так как

$$\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k},$$

то, применяя к вектору $\bar{a}$ оператор Лапласа, получаем

$$\Delta\bar{a} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}(a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}) =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2}\right)\bar{i} + \left(\frac{\partial^2 a_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial z^2}\right)\bar{j} + \left(\frac{\partial^2 a_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2}\right)\bar{k}. \qquad (A)$$

Отсюда, применяя оператор Лапласа к вектору $\bar{a}$, найдем

$$\Delta\bar{a} = \Delta a_x \cdot \bar{i} + \Delta a_y \cdot \bar{j} + \Delta a_z \cdot \bar{k}.$$

Используя формулу (A), докажем требуемое

$$\operatorname{div}(\Delta\bar{a}) = \left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2}\right)'_x + \left(\frac{\partial^2 a_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial z^2}\right)'_y + \left(\frac{\partial^2 a_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2}\right)'_z.$$

Выполняем в каждой скобке дифференцирование и почленно складываем:

$$\operatorname{div}(\Delta\bar{a}) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right).$$

Выражение в круглых скобках (оно во всех слагаемых одно и то же) есть дивергенция вектора $\bar{a}$, а потому из последней формулы заключаем, что требуемое доказано.

Задача 14,25 — для самостоятельного решения *(вихрь градиента)*. Доказать, что вихрь градиента равен нулю, т. е. что

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0. \qquad (14,14)$$

Задача 14,26 (для самостоятельного решения) *(ротор векторного произведения)*. Доказать, что

$$\operatorname{rot}(\bar{a} \times \bar{b}) = \bar{a}\operatorname{div}\bar{b} - \bar{b}\operatorname{div}\bar{a} + \frac{d\bar{a}}{d\bar{b}} - \frac{d\bar{b}}{d\bar{a}}. \qquad (14,15)$$

Указание. Использовать формулу (14,8) для определения проекций вектора $\frac{d\bar{a}}{d\bar{b}}$ на координатные оси и найти проекции левой и правой части доказываемой формулы на координатные оси. Окажется, что проекция левой части этой формулы на ось Ox

$$\operatorname{rot}_x(\bar{a} \times \bar{b}) = \frac{\partial}{\partial y}(a_x b_y - a_y b_x) - \frac{\partial}{\partial z}(a_z b_x - a_x b_z). \qquad (A)$$

Проекция же на ось Ox правой части

$$a_x\left(\frac{\partial b_x}{\partial x}+\frac{\partial b_y}{\partial y}+\frac{\partial b_z}{\partial z}\right)-b_x\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)+$$
$$+\frac{\partial a_x}{\partial x}b_x+\frac{\partial a_x}{\partial y}b_y+\frac{\partial a_x}{\partial z}b_z-\frac{\partial b_x}{\partial x}a_x-\frac{\partial b_x}{\partial y}a_y-\frac{\partial b_x}{\partial z}a_z.$$

Продифференцировав выражение (A), найдем, что оно равно выражению (B).

Задача 14,27 *(вихрь вихря)*. Доказать, что

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\bar{a})=\operatorname{grad}(\operatorname{div}\bar{a})-\Delta\bar{a}. \qquad (14,16)$$

Решение. Обозначим

$$\operatorname{rot}\bar{a}=\bar{b}. \qquad (A)$$

Тогда

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\bar{a})=\operatorname{rot}\bar{b}.$$

Проекция $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\bar{a})$ на ось Ox

$$[\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\bar{a})]_x=\operatorname{rot}_x\bar{b}=\frac{\partial b_z}{\partial y}-\frac{\partial b_y}{\partial z}. \qquad (B)$$

Но из (A) следует, что

$$b_y=\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x};$$
$$b_z=\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}.$$

Подставляя эти значения в формулу (B), получим

$$[\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\bar{a})]_x=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)=$$
$$=\frac{\partial^2 a_y}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 a_z}{\partial x\,\partial z}.$$

Прибавим и отнимем в правой части этого равенства $\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2}$. Тогда

$$[\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\bar{a})]_x=\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 a_y}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 a_z}{\partial x\,\partial z}-$$
$$-\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2}= \qquad (C)$$
$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)-\Delta a_x=\frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{div}\bar{a})-\Delta a_x.$$

Аналогично докажем, что проекции вектора $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\bar{a})$ на оси Oy и Oz равны

$$[\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\bar{a})]_y=\frac{\partial}{\partial y}(\operatorname{div}\bar{a})-\Delta a_y; \qquad (D)$$
$$[\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\bar{a})]_z=\frac{\partial}{\partial z}(\operatorname{div}\bar{a})-\Delta a_z \qquad (E)$$

Умножая обе части равенств (C), (D) и (E) соответственно на $\bar{i}$, $\bar{j}$ и $\bar{k}$ и почленно складывая, получим требуемое.