ПЯТНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание. Гармонические функции. Формулы Грина.

Гармоническая функция. Функция $U = U(x, y, z)$, имеющая непрерывные частные производные по переменным x, y и z до второго порядка включительно, называется гармонической, если она удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0.$$

Левая часть этого уравнения обозначается символом ΔU и называется лапласианом функции U.

Задача 15,1. Показать, что из формулы Остроградского (13, 17) следует

$$\iiint\limits_{(v)} \Delta U \cdot dv = \iint\limits_{(s)} \frac{\partial U}{\partial n} ds,$$

причем $\bar{n}$ — внешняя нормаль к поверхности s, а ΔU — лапласиан функции U.

Решение. На основании формулы (13, 17), прочитывая ее справа налево, найдем

$$\iiint\limits_{(v)} \operatorname{div} \bar{a}\, dv = \iint\limits_{(s)} a_n\, ds. \tag{A}$$

Если вектор $\bar{a}$ является градиентом скалярной функции $U = U(x, y, z)$, то

$$a_x = (\operatorname{grad} U)_x = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad a_y = (\operatorname{grad} U)_y = \frac{\partial U}{\partial y};$$

$$a_z = (\operatorname{grad} U)_z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Учитывая, что $\operatorname{div} \bar{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$, получим

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} U = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)$$

или

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \Delta U$$

(эта формула уже была выведена в задаче 14,22).

Известно, что проекция a_n вектора $\bar{a} = \operatorname{grad} U$ на нормаль $\bar{n}$ равна $\frac{\partial U}{\partial n}$ — см. формулу (11,8).

Теперь, полагая в (А) вектор $\bar{a} = \operatorname{grad} U$, получаем требуемую формулу

$$\iiint\limits_{(v)} \Delta U dv = \iint\limits_{(s)} \frac{\partial U}{\partial n} ds.$$

Задача 15,2. (для самостоятельного решения). Основываясь на результатах предыдущей задачи, доказать, что если $U = U(x, y, z)$ — гармоническая функция во всех точках области v, ограниченной поверхностью s, то

$$\iint\limits_{(s)} \frac{\partial U}{\partial n} ds = 0,$$

т. е. поток градиента гармонической функции через любую замкнутую поверхность равен нулю.

Задача 15,3 (для самостоятельного решения). Доказать, что функция $U = \frac{1}{r}$ $\left(r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)$ — гармоническая функция во всех точках, где она и ее частные производные до второго порядка включительно непрерывны.

Задача 15,4 (для самостоятельного решения). Доказать, что если функция $\varphi(x, y, z)$ — гармоническая, то и функция $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ также гармоническая.

Указание. Продифференцировать по x уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Задача 15,5 (для самостоятельного решения). Доказать, что если $U(x, y, z)$ — гармоническая функция, то и выражение

$$x \frac{\partial U}{\partial x} + y \frac{\partial U}{\partial y} + z \frac{\partial U}{\partial z}$$

есть также функция гармоническая.

Указание. Учесть, что, например,

$$\Delta \left(x \frac{\partial U}{\partial x}\right) = 2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + x \Delta \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) = 2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + x \frac{\partial}{\partial x} \left(\Delta U\right),$$

где Δ оператор Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

а если U — гармоническая функция, то $\Delta U = 0$.

Задача 15,6 (для самостоятельного решения). Доказать, что если $U = U(x, y, z)$ — гармоническая функция, то выражение

$$\frac{1}{r} \cdot U\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right),$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, — также гармоническая функция.

Задача 15.7. Доказать, применяя формулу Остроградского, что

$$\iiint\limits_{(\tau)} \left(U\Delta V + \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right) d\tau = \iint\limits_{(s)} U \frac{\partial V}{\partial n}\, ds,$$

где τ — объем, S — ограничивающая его поверхность, $\frac{\partial V}{\partial n}$ — производная функции V по внешней нормали, а

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

Решение. Рассмотрим вектор $U \operatorname{grad} V$, где функция $U = U(x, y, z)$, и найдем его дивергенцию

$$\operatorname{div}(U \operatorname{grad} V) = \frac{\partial}{\partial x}(U \operatorname{grad} V)_x + \frac{\partial}{\partial y}(U \operatorname{grad} V)_y + \frac{\partial}{\partial z}(U \operatorname{grad} V)_z.$$

Учитывая, что

$$(U \operatorname{grad} V)_x = U\frac{\partial V}{\partial x}; \quad (U \operatorname{grad} V)_y = U\frac{\partial V}{\partial y}; \quad (U \operatorname{grad} V)_z = U\frac{\partial V}{\partial z},$$

получаем

$$\operatorname{div}(U \operatorname{grad} V) = \frac{\partial}{\partial x}\left(U\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(U\frac{\partial V}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(U\frac{\partial V}{\partial z}\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial U}{\partial x}\cdot\frac{\partial V}{\partial x} + U\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + U\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z} + U\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right).$$

Раскрывая скобки и учитывая, что $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \Delta V$, находим

$$\operatorname{div}(U \operatorname{grad} V) = U\Delta V + \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}. \tag{A}$$

Проекция на нормаль к поверхности S вектора $U \operatorname{grad} V$ равна

$$(U \operatorname{grad} V)_n = U\frac{\partial V}{\partial n}. \tag{B}$$

Полагая теперь в формуле (13, 17)

$$\bar{a} = \operatorname{grad} V,$$

получаем

$$\iiint\limits_{(\tau)} \operatorname{div}(U \operatorname{grad} V)\, d\tau = \iint\limits_{(S)} (U \operatorname{grad} V)_n\, ds,$$

а используя равенства (А) и (В), имеем доказываемое равенство

$$\iiint\limits_{(\tau)}\left(U\Delta V+\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right)=\iint\limits_{(S)}U\frac{\partial V}{\partial n}\,ds. \qquad (C)$$

Учитывая, что вектор

$$\operatorname{grad}U=\frac{\partial U}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\bar{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\bar{k},$$

а вектор

$$\operatorname{grad}V=\frac{\partial V}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial V}{\partial y}\bar{j}+\frac{\partial V}{\partial z}\bar{k},$$

для их скалярного произведения получаем

$$\operatorname{grad}U\cdot\operatorname{grad}V=\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Поэтому формула (C) может быть записана так:

$$\iiint\limits_{(\tau)}U\Delta V\,d\tau+\iiint\limits_{(\tau)}(\operatorname{grad}U\cdot\operatorname{grad}V)\,d\tau=\iint\limits_{(S)}U\frac{\partial V}{\partial n}ds.$$

Задача 15,8 (для самостоятельного решения). Основываясь на результате, полученном в предыдущей задаче, доказать, что

$$\iiint\limits_{(\tau)}U\Delta U\,d\tau+\iiint\limits_{(\tau)}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right]d\tau=\iint\limits_{(S)}U\frac{\partial U}{\partial n}\,ds.$$

Указание. В формуле (С) предыдущей задачи взять $V=U$.

Задача 15,9 (для самостоятельного решения). Из формулы предыдущей задачи, считая, что U — гармоническая функция, получить формулу

$$\iiint\limits_{(V)}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right]d\tau=\iint\limits_{(S)}U\frac{\partial U}{\partial n}\,ds.$$

(в гидродинамике эта формула используется при вычислении кинетической энергии в безвихревом движении жидкости).

Задача 15, 10. Исходя из результата задачи (15, 7), вывести первую формулу Грина

$$\iiint\limits_{(\tau)}(U\Delta V-V\Delta U)=\iint\limits_{(S)}\left(U\frac{\partial V}{\partial n}-V\frac{\partial U}{\partial n}\right)ds \qquad (15,1)$$

$\Bigl($производные $\frac{\partial U}{\partial n}$ и $\frac{\partial V}{\partial n}$ вычисляются по внешней нормали к поверхности $S\Bigr)$.

Решение. В указанной задаче была получена формула

$$\iiint\limits_{(\tau)} U\Delta V\,d\tau + \iiint\limits_{(\tau)} (\operatorname{grad} U\cdot\operatorname{grad} V)\,d\tau = \iint\limits_{(S)} U\,\frac{\partial V}{\partial n}\,ds. \qquad \text{(A)}$$

Поменяем в этой формуле местами функции U и V:

$$\iiint\limits_{\tau} V\Delta U\,d\tau + \iiint\limits_{(\tau)} (\operatorname{grad} V\cdot\operatorname{grad} U)\,d\tau = \iint\limits_{(S)} V\,\frac{\partial U}{\partial n}\,ds. \qquad \text{(B)}$$

Вычтем из равенства (A) равенство (B), учитывая, что скалярное произведение

$$\operatorname{grad} U\cdot\operatorname{grad} V = \operatorname{grad} V\cdot\operatorname{grad} U,$$

и получим первую формулу Грина:

$$\iiint\limits_{(\tau)} (U\Delta V - V\Delta U)\,d\tau = \iint\limits_{(S)} \left(U\,\frac{\partial V}{\partial n} - V\,\frac{\partial U}{\partial n}\right)ds.$$

Подчеркиваем, что эта формула имеет место для функций U и V, непрерывных вместе с их производными первого и второго порядка в области τ, ограниченной поверхностью S. Стоящие в правой части формулы производные $\frac{\partial U}{\partial n}$ и $\frac{\partial V}{\partial n}$ берутся по направлению внешней нормали к поверхности S. Формулу Грина можно записать в удобном для запоминания виде:

$$\iiint\limits_{(\tau)} \begin{vmatrix} U & V \\ \Delta U & \Delta V \end{vmatrix} d\tau = \iint\limits_{(S)} \begin{vmatrix} U & V \\ \frac{\partial U}{\partial n} & \frac{\partial V}{\partial n} \end{vmatrix} ds.$$

Задача 15, 11. Применить первую формулу Грина

$$\iiint\limits_{(\tau)} (U\Delta V - V\Delta U)\,d\tau = \iint\limits_{(S)} \left(U\,\frac{\partial V}{\partial n} - V\,\frac{\partial U}{\partial n}\right)ds$$

к функции $U = \frac{1}{r}$, где r — расстояние от постоянной точки $A(a, b, c)$ области τ до переменной в этой области точки $P(x, y, z)$.

Решение. Расстояние

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}.$$

Функция U будет непрерывной функцией со своими частными производными во всех точках области τ за исключением точки A, где $r = 0$. В этой точке сама функция $U = \frac{1}{r}$ и ее производные претерпевают разрыв непрерывности.

Известно, что функция $\frac{1}{r}$ — гармоническая функция всюду, где она непрерывна, вместе со своими частными производными до второго порядка включительно. Значит, в нашем случае эта функция будет гармонической во всей области τ за исключением точки A.

Выделим из объема τ сферу σ, описанную из точки A радиусом ρ, таким, что σ и τ не имеют общих точек. Часть области τ, полученную после этого выделения, назовем τ_1, причем в области τ_1 функция $U=\frac{1}{r}$ будет гармонической, а потому в ней $\Delta U = = \Delta\left(\frac{1}{r}\right)=0$. По формуле Грина (15,1) для тройного интеграла, распространенного на область τ_1, учитывая, что $U=\frac{1}{r}$ и в области τ_1 $\Delta U=0$, будем иметь

$$\iiint\limits_{(\tau_1)} \frac{1}{r}\Delta V\,d\tau = \iint\limits_{(S)}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\right)ds +$$

$$+\iint\limits_{(\sigma)}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n_1} - V\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n_1}\right)d\sigma, \qquad \text{(A)}$$

причем во втором интеграле правой части производные $\frac{\partial V}{\partial n_1}$ и $\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n_1}$ берутся по внутренней нормали к поверхности σ.

Рассмотрим предельное значение равенства (A), когда радиус ρ сферы σ стремится к нулю. В этом случае область τ_1 будет стремиться к области τ и тройной интеграл левой части равенства (A) будет стремиться к тройному интегралу, распространенному на область τ

$$\lim_{\rho\to 0}\iiint\limits_{(\tau)}\frac{1}{r}\Delta V\,d\tau = \iiint\limits_{(\tau)}\frac{1}{r}\Delta V\,d\tau.$$

Первый интеграл в правой части равенства (A) распространен на поверхность S, от ρ не зависит, поэтому при $\rho\to 0$ сохранит значение, которое имеет в равенстве (A). Остается рассмотреть предел второго интеграла правой части равенства (A) при $\rho\to 0$.

$$\lim_{\rho\to 0}\iint\limits_{(\sigma)}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n_1} - V\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n_1}\right)d\sigma =$$

$$=\lim_{\rho\to 0}\iint\limits_{(\sigma)}\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n_1}\,d\sigma - \lim_{\rho\to 0}\iint\limits_{(\sigma)}V\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n_1}\,d\sigma. \qquad \text{(B)}$$

Определим сначала первый предел в правой части этого равенства. На поверхности сферы σ $r = \rho$, поэтому $\frac{1}{r} = \frac{1}{\rho}$. Обозначим через $\left(\frac{\partial V}{\partial n_1}\right)_Q$ значение производной $\frac{\partial V}{\partial n_1}$ в некоторой точке Q на сфере σ. Тогда, используя теорему о среднем, получаем

$$\lim_{\rho\to 0} \iint\limits_{(\sigma)} \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial n_1}\, d\sigma = \lim_{\rho\to 0} \left\{\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial V}{\partial n_1}\right)_Q \iint\limits_{(\sigma)} d\sigma\right\} =$$

$$= \lim_{\rho\to 0}\left\{\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial V}{\partial n_1}\right)_Q \cdot 4\pi\rho^2\right\} = 4\pi\left(\frac{\partial V}{\partial n_1}\right)_Q \cdot \lim_{\rho\to 0} \rho = 0$$

(учтено, что $\iint\limits_{(\sigma)} d\sigma = 4\pi\rho^2$, т. е. равен площади поверхности сферы σ).

Что касается второго предела в правой части равенства (В), то прежде чем его вычислять, учтем, что нормаль к сфере σ и ее радиус совпадают, но направление нормали противоположно направлению радиуса-вектора $\bar{\rho}$ точек поверхности сферы. Поэтому вычисление производной по нормали n_1 можно заменить вычислением производной по ρ, но тогда

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n_1} = -\frac{\partial\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho^2}. \tag{C}$$

Если теперь обозначить через $(V)_{Q_1}$ значение функции V в некоторой точке Q_1 сферы σ и учесть (С), то для рассматриваемого предела найдем

$$-\lim_{\rho\to 0} \iint\limits_{(\sigma)} V \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n_1}\, d\sigma = -\lim_{\rho\to 0} (V)_{Q_1} \cdot \frac{1}{\rho^2} \iint\limits_{(\sigma)} d\sigma =$$

$$= -\lim (V)_{Q_1} \cdot \frac{1}{\rho^2} \cdot 4\pi\rho^2 = -4\pi \cdot \lim_{\rho\to 0} (V)_{Q_1} = -4\pi (V)_A,$$

так как при $\rho \to 0$ тогда Q_1 поверхности схеры σ будет стремиться к точке A.

Таким образом,

$$-\lim_{\rho\to 0} \iint\limits_{(\sigma)} \left(\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n_1} - V \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n_2}\right) d\sigma = -4\pi (V)_A$$

и равенство (A) дает

$$\iiint\limits_{(\tau)} \frac{1}{r}\Delta V\,d\tau = \iint\limits_{(S)} \left(\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\right) ds - 4\pi\,(V)_A.$$

Отсюда окончательно

$$(V)_A = -\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{(\tau)} \frac{1}{r}\Delta V\,d\tau + \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{(S)} \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n}\,ds - \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{(S)} V\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\,ds. \tag{D}$$

Замечание. Проведенные рассуждения понадобились нам в связи с тем, что точка A находилась внутри области τ, поэтому функция $U = \frac{1}{r}$ в этой точке претерпевала разрыв непрерывности. Если бы точка A находилась вне области τ, то функция $\frac{1}{r}$, как функция точки $P(x, y, z)$, была бы непрерывной и тогда, учитывая, что эта функция гармоническая, т. е. что $\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = 0$, мы из первой формулы Грина сразу бы получили

$$\iiint\limits_{(\tau)} \frac{1}{r}\Delta V\,d\tau = \iiint\limits_{(S)} \left(\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\right) ds.$$

Эта формула называется второй формулой Грина.

Если функция $V = V(x, y, z)$ — гармоническая в области τ, то $\Delta V = 0$ и тогда формула (D) запишется так:

$$V_A = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{(S)} \left[\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\right] ds. \tag{15,2}$$

Эта формула дает выражение гармонической функции внутри области через значения, принимаемые данной функцией и ее производной по нормали на границе этой области.

Задача 15, 12. Доказать, что если функция $V = V(x, y, z)$ — гармоническая функция в некоторой области, а S — сфера радиуса R с центром в точке $A(a, b, c)$, лежащая со своими внутренними точками в этой области, то

$$V_A = \frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{(S)} V\,ds.$$

Решение. Формулу (15,2), полученную в предыдущей задаче, применим к случаю, когда S — сфера радиуса R.

Вычисляя первый интеграл этой формулы, следует r заменить его значением на поверхности сферы, т. е. на R, а величину $\frac{1}{R}$, как постоянную, вынести за знак интеграла

$$\iint_{(S)} \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial n} ds = \frac{1}{R} \iint_{(S)} \frac{\partial V}{\partial n} ds = 0,$$

так как V — гармоническая функция, а поэтому $\iint_{(S)} \frac{\partial V}{\partial n} ds = 0$. (см. задачу 15,2).

Во втором интеграле производная от функции $\frac{1}{r}$, вычисленная по внешней нормали, будет равна производной от этой функции по R, так как нормаль к сфере совпадает с ее радиусом, причем направление внешней нормали совпадает с направлением радиуса вектора $\bar{R}$ точек сферы. Значение этой производной должно быть вычислено на поверхности сферы, т. е. при $r = R$. Итак,

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} = \frac{\partial\left(\frac{1}{R}\right)}{\partial R} = -\frac{1}{R^2}.$$

Учитывая эти рассуждения, получаем для значения функции V в центре сферы A

$$V_A = \frac{1}{4\pi} \iint_{(S)} -V \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} ds = \frac{1}{4\pi} \iint_{(S)} -V \cdot \left(-\frac{1}{R^2}\right) ds =$$

$$= \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{(S)} V\, dS,$$

что и требовалось доказать.

Это равенство выражает теорему Гаусса: *значение гармонической функции в центре сферы есть среднее арифметическое из ее значений на поверхности сферы.*

Если V — потенциал скорости жидкости, то эта формула выражает среднее значение потенциала скорости жидкости на любой сферической поверхности, которой ограничивается объем, целиком лежащий в жидкости, и показывает, что это среднее значение равно значению потенциала скорости в центре сферы.