ШЕСТНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание. Оператор Гамильтона

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Студентам рекомендуется изучать этот вопрос по книге Н. Е. Кочина «Векторное исчисление и начало тензорного исчисления».

Под оператором Гамильтона понимается символический дифференциальный оператор, обозначаемый знаком ∇ (набла) и определяемый в декартовой системе координат равенством

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k}, \qquad (16,1)$$

где $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ — единичные векторы координатных осей Ox, Oy, Oz. Этот оператор в дальнейшем называется «Оператор ∇».

Основная цель введения оператора ∇ состоит в упрощении таких операций над векторами и скалярами, как получение градиента скалярной функции, образование дивергенции и ротора вектора, образование оператора Лапласа.

Следует запомнить, что оператор ∇ является символическим вектором.

Оператор ∇ часто встречается в приложениях векторного анализа и усвоение правил обращения с ним значительно облегчает изучение, например, такого предмета, как электротехника.

Хотя вектор ∇ является символическим вектором, а не реальным, мы будем формально считать, что он обладает свойствами реального вектора, и рассматривать его произведение на скалярную функцию, скалярное и векторное произведение его на векторы, а также и другие операции с ним.

Это не должно смущать читателя, так как из дальнейшего видно, что в результате воздействия оператора ∇ на скаляры и векторы получаются величины, имеющие не символический, а вполне реальный определенный смысл. (Однако укажем, что недопустимо употреблять, например, такие термины: «вектор $\bar{\nabla}$ параллелен вектору $\bar{a}$» или «вектор ∇ перпендикулярен вектору $\bar{a}$». Бессмысленно также, например, говорить, что «вектор ∇ равен вектору $\bar{a}$», так как символический вектор ∇ не может быть равен реальному вектору $\bar{a}$, как он не может быть ему параллелен или перпендикулярен).

В дальнейшем приняты такие обозначения:

1. Для численного произведения вектора $\bar{a}$ на функцию $\varphi(x, y, z)$

$$\bar{a}\varphi(x, y, z).$$

2. Для скалярного произведения векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$

$$\bar{a} \cdot \bar{b}.$$

3. Для векторного произведения двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$

$$\bar{a} \times \bar{b}.$$

4. Из (16,1) видно, что проекции оператора ∇ на оси прямоугольной системы координат равны

$$\nabla_x = \frac{\partial}{\partial x}; \quad \nabla_y = \frac{\partial}{\partial y}; \quad \nabla_z = \frac{\partial}{\partial z}.$$

Сводка правил обращения с оператором

1. Оператор ∇ действует на величины, стоящие за ним, и не действует на величины, которые стоят перед ним. Так, в записи $(\bar{a} \cdot \nabla)\varphi$ оператор ∇ действует на φ и не действует на $\bar{a}$.

Иногда для того, чтобы указать величину, на которую не распространяется действие оператора ∇, у этой величины ставится индекс, показывающий, что данная величина рассматривается как постоянная Например, в записи $(\nabla \cdot \bar{a}_c)\varphi$ следует считать, что ∇ на $\bar{a}_c$ не действует, а на φ действует.

Выражение такого вида надо, если это возможно, преобразовать так, чтобы величины с индексом c стали впереди ∇. Как только это будет достигнуто, индекс c можно опустить, поскольку оператор ∇ на величины, стоящие перед ним, не действует.

2. Численное произведение оператора ∇ на сумму двух функций вычисляется по формуле

$$\nabla(\varphi + \psi) = \nabla\varphi + \nabla\psi. \qquad (16,2)$$

3. Скалярное произведение оператора ∇ на сумму двух векторов вычисляется по формуле

$$\nabla \cdot (\bar{a} + \bar{b}) = \nabla \cdot \bar{a} + \nabla \cdot \bar{b}. \qquad (16,3)$$

4. Векторное произведение оператора ∇ на сумму двух векторов вычисляется по формуле

$$\nabla \times (\bar{a} + \bar{b}) = \nabla \times \bar{a} + \nabla \times \bar{b}. \qquad (16,4)$$

5. Произведение $\nabla\varphi$ оператора ∇ на скалярную функцию φ равно градиенту функции φ, так как

$$\nabla\varphi = \left(\frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial x}\bar{k}\right)\varphi =$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}(\bar{i}\varphi) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{j}\varphi) + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{k}\varphi) =$$
$$= \bar{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \bar{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \bar{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \operatorname{grad}\varphi,$$

$$\boxed{\nabla\varphi = \operatorname{grad}\varphi} \qquad (16,5)$$

При вычислении, например $\frac{\partial}{\partial x}(\bar{i}\varphi)$, постоянный вектор $\bar{i}$ вынесен за знак производной. Так же было сделано и при вычислении $\frac{\partial}{\partial y}(\bar{j}\varphi)$ и $\frac{\partial}{\partial z}(\bar{k}\varphi)$.

6. Скалярное произведение оператора ∇ на вектор
$\bar{a}(x, y, z) = a_x(x, y, z)\bar{i} + a_y(x, y, z)\bar{j} + a_z(x, y, z)\bar{k}$
равно дивергенции вектора $\bar{a}$.

Действительно, так как $\nabla_x = \frac{\partial}{\partial x}$; $\nabla_y = \frac{\partial}{\partial y}$; $\nabla_z = \frac{\partial}{\partial z}$, то скалярное произведение $\nabla \cdot \bar{a}$, равное алгебраической сумме произведений одноименных проекций, можно записать в виде

$$\nabla \cdot \bar{a} = \frac{\partial}{\partial x}a_x + \frac{\partial}{\partial y}a_y + \frac{\partial}{\partial z}a_z.$$

Если теперь условиться под произведением $\frac{\partial}{\partial x}a_x$ понимать частную производную от a_x по x, т. е. $\frac{\partial a_x}{\partial x}$, и аналогично считать, что $\frac{\partial}{\partial y}a_y = \frac{\partial a_y}{\partial y}$ и $\frac{\partial}{\partial z}a_z = \frac{\partial a_z}{\partial z}$,
то

$$\nabla \cdot \bar{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \operatorname{div}\bar{a}.$$

$$\boxed{\nabla \cdot \bar{a} = \operatorname{div}\bar{a}} \qquad (16,6)$$

7. Векторное произведение оператора ∇ на вектор

$$\bar{a}(x, y, z) = a_x(x, y, z)\bar{i} + a_y(x, y, z)\bar{j} + a_z(x, y, z)\bar{k}.$$

равно ротору вектора $\bar{a}$.

Действительно, так как векторное произведение двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ вычисляется по формуле

$$\bar{b} \times \bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix},$$

то, заменяя здесь вектор $\bar{b}$ оператором $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k}$ и учитывая, что проекции оператора ∇ на координатные оси

$$\nabla_x = \frac{\partial}{\partial x}; \quad \nabla_y = \frac{\partial}{\partial y}; \quad \nabla_z = \frac{\partial}{\partial z},$$

будем иметь

$$\nabla \times \bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\bar{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\bar{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\bar{k} = \operatorname{rot}\bar{a}.$$

$$\boxed{\nabla \times \bar{a} = \operatorname{rot}\bar{a}} \qquad (16,7)$$

8. Оператор ∇ применяется к скалярному и векторному произведению двух множителей так, как к ним применяется производная, т. е. для того чтобы применить оператор к произведению двух множителей, надо образовать сумму двух слагаемых, в каждом из которых оператор действует только на один из сомножителей, в то время как другой остается постоянным. Например,

$$\boxed{\nabla(\bar{a} \times \bar{b}) = \nabla(\bar{a} \times \bar{b}_c) + \nabla(\bar{a}_c \times \bar{b})} \qquad (16,8)$$

причем наличие у вектора индекса c, как указывалось выше, означает, что на этот вектор оператор ∇ не действует.

Выражения, полученные от воздействия оператора ∇ на произведение двух сомножителей, надо преобразовать так, чтобы постоянные сомножители были поставлены перед оператором ∇.

Дифференциальные операции первого порядка

Задача 16,1. Найти градиент произведения двух функций f_1 и f_2.

Решение. По правилу 8 из сводки правил, применяя формулу (16,5), имеем

$$\operatorname{grad}(f_1 f_2) = \nabla(f_1 f_2) = \nabla(f_{1c} f_2) + \nabla(f_1 f_{2c}).$$

В первом слагаемом правой части равенства оператор ∇ не действует на постоянный множитель f_{1c}, а во втором — на постоянный множитель f_{2c}. Поэтому эти множители в каждом слагаемом правой части могут быть вынесены за знак оператора и мы получаем

$$\operatorname{grad}(f_1 f_2) = f_{1c}\nabla f_2 + f_{2c}\nabla f_1.$$

Применяя теперь в правой части этого равенства формулу (16,5) и опуская индекс c за ненадобностью, получаем окончательно

$$\boxed{\operatorname{grad}(f_1 f_2) = f_1\nabla f_2 + f_2\nabla f_1} \qquad (16,9)$$

Задача 16,2. Найти дивергенцию произведения $\varphi\bar{a}$, где φ — функция.

Решение. По формуле (16,6)

$$\operatorname{div}(\varphi\bar{a}) = \nabla\cdot(\varphi\bar{a}).$$

В правой части этого равенства оператор ∇ применяется к численному произведению функции на вектор, поэтому на основании правила 8 из сводки правил

$$\nabla\cdot(\varphi\bar{a}) = \nabla\cdot(\varphi_c\bar{a}) + \nabla\cdot(\varphi\bar{a}_c) = \varphi_c(\nabla\cdot a) + a_c\nabla\varphi.$$

Запись второго слагаемого правой части в виде $\bar{a}_c\cdot(\nabla\cdot\varphi)$ была бы неверной, так как под $(\nabla\cdot\varphi)$ следует понимать скалярное произведение вектора-оператора ∇ на функцию φ, чего быть не может, поскольку понятие скалярного произведения относится к произведению двух векторов.

Замечая на основании (16,6), что $\nabla\cdot\bar{a} = \operatorname{div}\bar{a}$, а на основании (16,5) $\nabla\varphi = \operatorname{grad}\varphi$ и опуская индекс c, получаем окончательно

$$\boxed{\operatorname{div}(\varphi\bar{a}) = \varphi\operatorname{div}\bar{a} + \bar{a}\cdot\operatorname{grad}\varphi} \qquad (16,10)$$

Эта формула была уже получена в задаче 14,2.

Задача 16,3 (для самостоятельного решения). Найти дивергенцию поля $\varphi(r)\bar{r}$, где $\bar{r}$ — радиус-вектор.

Указание. Использовать формулу (16,10) и учесть, что если $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$, то $\operatorname{div}\bar{r} = 3$, а на основании результата задачи 11,3 $\operatorname{grad}\varphi(r) = \varphi'(r)\bar{r}^{\circ}$, где $\bar{r}^0$ — единичный вектор вектора $\bar{r}$.

Ответ. $\operatorname{div}[\varphi(r)\bar{r}] = 3\varphi(r) + \bar{r}\bar{r}^{\circ}\varphi'(r)$.

Задача 16,4. Найти ротор произведения $\varphi\bar{a}$.

Решение. На основании формулы (16,7) и правила 8 из сводки правил

$$\operatorname{rot}(\varphi\bar{a}) = \nabla\times(\varphi\bar{a}) = \nabla\times(\varphi_c\bar{a}) + \nabla\times(\varphi\bar{a}_c) =$$
$$= \varphi_c(\nabla\times a) - a_c\times(\nabla\varphi).$$

Изменение между слагаемыми плюса на минус объясняется тем, что в случае векторного произведения перестановка сомножителей влечет за собой изменение знака векторного произведения.

Замечая, что на основании формулы (16,7) $\nabla \times \bar{a} = \operatorname{rot}\bar{a}$, а по формуле (16,5) $\nabla\varphi = \operatorname{grad}\varphi$, получаем окончательно, опуская индексы в последнем равенстве

$$\boxed{\operatorname{rot}(\varphi a) = \varphi \operatorname{rot}\bar{a} - \bar{a} \times \operatorname{grad}\varphi} \qquad (16,11)$$

Эта формула также была получена в задаче 14,19.

Задача 16,5 (для самостоятельного решения). Вычислить ротор поля $\varphi(r) \cdot r$, где $\bar{r}$ — радиус-вектор.

Указание. Использовать формулу (16,11) и учесть, что векторы r и $\operatorname{grad}\varphi(r)$ — коллинеарны, так как $\operatorname{grad}\varphi(r) = \varphi'(r)\bar{r}^{\circ}$, $\bar{r}^{\circ}$ — для вектора $\bar{r}$ является единичным вектором, а также то, что векторное произведение двух коллинеарных векторов равно нулю. Установить, что ротор радиуса вектора $\bar{r}$ равен нулю ($\operatorname{rot}\bar{r} = 0$).

Ответ.

$$\boxed{\operatorname{rot}[\varphi(r) \cdot \bar{r}] = 0} \qquad (16,12)$$

Задача 16,6. Найти $\operatorname{div}(\bar{a} \times \bar{b})$.

Решение. На основании формулы (16,6) и правила 8 из сводки правил

$$\operatorname{div}(\bar{a} \times \bar{b}) = \nabla \cdot (\bar{a} \times \bar{b}) = \nabla \cdot (a_c \times \bar{b}) + \nabla \cdot (\bar{a} \times \bar{b}_c). \qquad (A)$$

Дальнейшее преобразование сводится к тому, чтобы постоянные множители в каждом из слагаемых правой части оказались перед оператором ∇. В данном случае следует использовать свойство цикличности смешанного произведения трех векторов, согласно которому

$$\boxed{a \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = b \cdot (\bar{c} \times \bar{a}) - c \cdot (\bar{a} \times \bar{b})} \qquad (16,13)$$

Преобразуем отдельно на основании этой формулы каждое слагаемое правой части равенства (А)

$$\nabla \cdot (\bar{a}_c \times \bar{b}) = \bar{a}_c \cdot (\bar{b} \times \nabla).$$

Теперь в векторном произведении $\bar{b} \times \nabla$ переставим местами векторы $\bar{b}$ и ∇ и так как от такой перестановки знак векторного произведения изменяется на обратный, то

$$\bar{b} \times \nabla = -\nabla \times \bar{b}.$$

Замечая, что по (16,7) $-\nabla \times \bar{b} = -\operatorname{rot}\bar{b}$ и опуская индекс c у $\bar{a}_c$, получим окончательно для первого слагаемого

$$\nabla \cdot (\bar{a}_c \times \bar{b}) = -\bar{a} \cdot \operatorname{rot}\bar{b}.$$

Используя снова формулу (16.13), преобразуем второе слагаемое в равенстве (A)

$$\nabla \cdot (\bar{a} \times \bar{b}_c) = \bar{b}_c \cdot (\nabla \times \bar{a}) = \bar{b}_c \cdot \operatorname{rot}\bar{a} = \bar{b} \operatorname{rot}\bar{a},$$

так как $\nabla \times \bar{a} = \operatorname{rot} a$, а индекс c у $\bar{b}_c$ может быть опущен.

Итак, окончательно

$$\boxed{\operatorname{div}(a \times \bar{b}) = \bar{b} \cdot \operatorname{rot} a - \bar{a} \cdot \operatorname{rot}\bar{b}} \qquad (16,14)$$

Эта формула также была получена выше, в задаче 14,21.

При решении следующих задач придется пользоваться формулой для вычисления двойного векторного произведения*.

$$\bar{A} \times (\bar{B} \times \bar{C}) = \bar{B}\,(\bar{A} \cdot \bar{C}) - \bar{C}\,(\bar{A} \cdot \bar{B}), \qquad (16,15)$$

согласно которой *двойное векторное произведение* $\bar{A} \times (\bar{B} \times \bar{C})$ *равно произведению среднего вектора* $\bar{B}$ *на скалярное произведение двух других минус правый крайний вектор* $\bar{C}$, *умноженный на скалярное произведение двух других.*

Формула (16,15) может быть записана в удобном для запоминания виде и так:

$$\bar{A} \times (\bar{B} \times \bar{C}) = \begin{vmatrix} \bar{B} & \bar{C} \\ \bar{A} \cdot \bar{B} & \bar{A} \cdot \bar{C} \end{vmatrix}, \qquad (16,16)$$

т. е. двойное векторное произведение равно определителю второго порядка, в первой строке которого элементами являются векторы, стоящие во внутренней скобке, написанные в том же порядке, а во второй строке элементами являются скалярные произведения этих векторов на первый вектор.

Задача 16,7. Определить $\operatorname{rot}(\bar{a} \times \bar{b})$.

Решение. На основании правила 8 из сводки правил и формулы (16,7)

$$\operatorname{rot}(\bar{a} \times \bar{b}) = \nabla \times (\bar{a} \times \bar{b}) = \nabla \times (\bar{a}_c \times \bar{b}) + \nabla \times (\bar{a} \times \bar{b}_c).$$

Каждое слагаемое в правой части представляет собой двойное векторное произведение, которое вычислим по формуле (16,16) и

---

* Вывод формулы (16,15) можно найти, например, в учебнике И. И. Привалова «Аналитическая геометрия».

преобразуем так, чтобы постоянные множители стояли перед знаком ∇:

$$\nabla \times (\bar{a}_c \times \bar{b}) = \begin{vmatrix} \bar{a}_c & \bar{b} \\ \nabla \cdot \bar{a}_c & \nabla \cdot \bar{b} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{a}_c & \bar{b} \\ \bar{a}_c \cdot \nabla & \operatorname{div} \bar{b} \end{vmatrix}.$$

Очевидно, что $\nabla \cdot \bar{a}_c = \bar{a}_c \cdot \nabla$, так как скалярное произведение двух векторов не зависит от их порядка, а постоянный множитель должен стоять перед знаком ∇, скалярное же произведение $\nabla \cdot \bar{b}$ на основании (16,6) равно $\operatorname{div} \bar{b}$.

Раскрывая последний определитель и опуская теперь за ненадобностью индекс c, получаем

$$\nabla \times (\bar{a}_c \times \bar{b}) = \bar{a} \operatorname{div} \bar{b} - (\bar{a} \cdot \nabla) \bar{b}.$$

Точно так же

$$\nabla \times (\bar{a} \times \bar{b}_c) = \begin{vmatrix} \bar{a} & \bar{b}_c \\ \nabla \cdot \bar{a} & \nabla \cdot \bar{b}_c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{a} & \bar{b}_c \\ \nabla \cdot \bar{a} & \bar{b}_c \cdot \nabla \end{vmatrix} =$$
$$= (\bar{b} \cdot \nabla) \bar{a} - \bar{b} \operatorname{div} \bar{a}.$$

(индекс c опущен, $\nabla \cdot \bar{a} = \operatorname{div} \bar{a}$).

Складывая полученные результаты, окончательно имеем

$$\operatorname{rot} (\bar{a} \times \bar{b}) = \bar{a} \operatorname{div} \bar{b} - \bar{b} \operatorname{div} \bar{a} + (\bar{b} \cdot \nabla) \bar{a} - (\bar{a} \cdot \nabla) \bar{b}. \qquad (16,17)$$

Дополнительные сведения из теории

Выясним теперь смысл выражений вида $\bar{a} \cdot \nabla$, встретившихся в формуле (16,17), т. е. смысл скалярного произведения вектора $\bar{a}$ на оператор ∇, стоящий справа от него, (следует отличать выражение $\bar{a} \cdot \nabla$ от выражения $\nabla \cdot \bar{a}$)

Так как

$$\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}; \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k},$$

то

$$\boxed{\bar{a} \cdot \nabla = a_x \frac{\partial}{\partial x} + a_y \frac{\partial}{\partial y} + a_z \frac{\partial}{\partial z}}. \qquad (16,18)$$

Проекции a_x, a_y, a_z вектора $\bar{a}$ определяются по формулам

$$a_x = a \cos (\widehat{\bar{a}, x}); \quad a_y = a \cos (\widehat{\bar{a}, y}); \qquad (\text{В})$$
$$a_z = a \cos (\bar{a}, z),$$

поэтому по формуле (16,18)

$$\boxed{\bar{a} \cdot \nabla = a \cos (\widehat{\bar{a}, x}) \frac{\partial}{\partial x} + a \cos (\widehat{\bar{a}, y}) \frac{\partial}{\partial y} + a \cos (\bar{a}, z) \frac{\partial}{\partial z}} \qquad (16,19)$$

Выполним теперь операцию $\bar{a} \cdot \nabla$ над функцией φ:

$$(\bar{a} \cdot \nabla)\varphi = a\cos(\widehat{\bar{a}, x})\frac{\partial\varphi}{\partial x} + a\cos(\widehat{\bar{a}, y})\frac{\partial\varphi}{\partial y} + a\cos(\widehat{\bar{a}, z})\frac{\partial\varphi}{\partial z} =$$
$$= a\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos(\widehat{\bar{a}, x}) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos(\widehat{\bar{a}, y}) + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cos(\widehat{\bar{a}, z})\right].$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках на основании (11,3) равно производной $\frac{\partial\varphi}{\partial a}$ от функции φ по направлению вектора $\bar{a}$, поэтому

$$\boxed{(\bar{a} \cdot \nabla)\varphi = a\frac{\partial\varphi}{\partial a}} \tag{16,20}$$

т. е. *результат применения операции $\bar{a} \cdot \nabla$ к функции φ равен произведению длины вектора $\bar{a}$ на производную от функции φ по направлению вектора $\bar{a}$.*

На основании (16,20) операция $\bar{a} \cdot \nabla$ может быть записана в виде

$$\boxed{\bar{a} \cdot \nabla = a\frac{\partial}{\partial a}} \tag{16,21}$$

Выполнение операции $\bar{a} \cdot \nabla$ над вектором $\bar{b}$ на основании (16,18) приводит к вектору

$$(\bar{a} \cdot \nabla)\bar{b} = a_x\frac{\partial\bar{b}}{\partial x} + a_y\frac{\partial\bar{b}}{\partial y} + a_z\frac{\partial\bar{b}}{\partial z}, \tag{16,22}$$

откуда следует, если учесть равенство (B),

$$(\bar{a} \cdot \nabla)\bar{b} = a\cos(\widehat{\bar{a}, x})\frac{\partial\bar{b}}{\partial x} + a\cos(\widehat{\bar{a}, y})\frac{\partial\bar{b}}{\partial y} + a\cos(\widehat{\bar{a}, z})\frac{\partial\bar{b}}{\partial z} =$$
$$= a\left[\frac{\partial\bar{b}}{\partial x}\cos(\bar{a}, x) + \frac{\partial\bar{b}}{\partial y}\cos(a, y) + \frac{\partial\bar{b}}{\partial z}\cos(\widehat{a, z})\right]. \tag{16,23}$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках, есть производная вектора $\bar{b}$ по направлению вектора $\bar{a}$, т. е. $\frac{\partial\bar{b}}{\partial a}$. Получаем окончательно

$$\boxed{(\bar{a} \cdot \nabla)\bar{b} = \bar{a}\frac{\partial\bar{b}}{\partial a}} \tag{16,24}$$

Задача 16,8. Определить grad $(\bar{a} \cdot \bar{b})$.

Решение. На основании (16,5) и правила 8 из сводки правил имеем

$$\text{grad}\,(a \cdot \bar{b}) = \nabla(\bar{a} \cdot \bar{b}) = \nabla(\bar{a}_c \cdot \bar{b}) + \nabla(\bar{a} \cdot \bar{b}_c). \tag{16,25}$$

Перепишем (16,15) в виде

$$\bar{C}(\bar{A}\cdot\bar{B})=\bar{B}(\bar{A}\cdot\bar{C})-\bar{A}\times(\bar{B}\times\bar{C}). \qquad (16,26)$$

Для вычисления $\nabla(\bar{a}_c\cdot\bar{b})$ положим в (16,26), что

$$\bar{C}=\nabla;\ \bar{A}=\bar{a}_c;\ \bar{B}=\bar{b}.$$

Тогда

$$\nabla(\bar{a}_c\cdot\bar{b})=\bar{b}(\bar{a}_c\cdot\nabla)-\bar{a}_c\times(\bar{b}\times\nabla);$$

$$\nabla(\bar{a}_c\cdot\bar{b})=(\bar{a}_c\cdot\nabla)\bar{b}-a_c\times(\bar{b}\times\nabla). \qquad (16,27)$$

Так как в случае векторного произведения перестановка сомножителей изменяет знак векторного произведения, то в последнем равенстве

$$-a_c\times(\bar{b}\times\nabla)=\bar{a}_c\times(\nabla\times\bar{b}).$$

Но на основании (16,7)

$$\nabla\times b=\operatorname{rot}\bar{b},$$

а потому

$$-a_c\times(\bar{b}\times\nabla)=a_c\times\operatorname{rot}\bar{b}. \qquad (A)$$

Окончательно из (16,27)

$$\nabla(\bar{a}_c\cdot\bar{b})=(\bar{a}_c\cdot\nabla)\bar{b}+\bar{a}_c\times\operatorname{rot}\bar{b}.$$

Теперь преобразуем второе слагаемое (16,25) с помощью (16,26), полагая там

$$\bar{C}=\nabla;\ \bar{A}=\bar{b}_c;\ \bar{B}=\bar{a};$$

$$\nabla(\bar{a}\cdot\bar{b}_c)=\bar{a}(\bar{b}_c\cdot\nabla)-\bar{b}_c\times(\bar{a}\times\nabla)=$$

$$=(\bar{b}_c\cdot\nabla)\bar{a}+\bar{b}_c\times(\nabla\times\bar{a})=(\bar{b}_c\cdot\nabla)\bar{a}+\bar{b}_c\times\operatorname{rot}\bar{a}. \qquad (B)$$

Складывая полученные результаты (A) и (B) и опуская за ненадобностью индекс c, окончательно имеем

$$\operatorname{grad}(\bar{a}\cdot\bar{b})=(\bar{a}\cdot\nabla)\bar{b}+(\bar{b}\cdot\nabla)\bar{a}+\bar{a}\times\operatorname{rot}\bar{b}+b\times\operatorname{rot}\bar{a}. \qquad (16,28)$$

Задача 16.9 (для самостоятельного решения). Доказать, что для всякого постоянного вектора $\bar{a}$ имеет место соотношение

$$\nabla(\bar{a}\cdot\bar{b})=(\bar{a}\cdot\nabla)\bar{b}+\bar{a}\times\operatorname{rot}\bar{b}.$$

Задача 16,10 (для самостоятельного решения). Доказать, что из (16,28) при $\bar{a}=\bar{b}$ следует

$$\frac{1}{2}\operatorname{grad}a^2=(\bar{a}\cdot\nabla)\bar{a}+\bar{a}\times\operatorname{rot}\bar{a}. \qquad (16,29)$$

Задача 16,11. Рассмотреть ∇^2 — квадрат оператора ∇, понимая под этим скалярное произведение вектора ∇ на самого себя.

Решение. Помня, что скалярное произведение двух векторов равно алгебраической сумме произведений одноименных проекций и что проекции оператора ∇ на оси прямоугольной системы координат равны $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$, получаем

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \frac{\partial}{\partial z};$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{16,30}$$

Но так как $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа Δ, то

$$\nabla^2 = \Delta, \tag{16,31}$$

т. е. *квадрат оператора* ∇ *равен оператору Лапласа.* Поэтому уравнение Лапласа $\Delta\varphi = 0$ может быть записано в виде $\nabla^2\varphi = 0$.

Задача 16,12 (для самостоятельного решения). Доказать, что

$$(\nabla\varphi)^2 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2.$$

Задача 16,13. С помощью оператора ∇ найти

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi.$$

Решение. На основании (16,5) $\operatorname{grad}\varphi = \nabla\varphi$, а на основании (16,6) $\operatorname{div}\bar{a} = \nabla \cdot \bar{a}$. Поэтому

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \nabla \cdot \nabla\varphi$$

Из результата задачи (16,11) $\nabla \cdot \nabla = \nabla^2$ и поэтому

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \nabla^2\varphi. \tag{16,32}$$

Учитывая (16,30), получаем

$$\boxed{\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}} \tag{16,33}$$

Задача 16.14. Найти вихрь градиента скалярного поля, т. е. $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi$.

Решение. На основании (16,7) $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = \nabla \times \operatorname{grad}\varphi$, а так как по (16,5) $\operatorname{grad}\varphi = \nabla\varphi$, то

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = \nabla \times \nabla\varphi.$$

Скалярный множитель φ можно вынести за знак векторного произведения, поэтому

$$\nabla \times \nabla\varphi = (\nabla \times \nabla)\varphi.$$

Но векторное произведение двух равных векторов равно нулю, а потому $\nabla \times \nabla = 0$ и окончательно

$$\boxed{\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = 0} \qquad (16,34)$$

т. е. *вихрь градиента любого скалярного поля равен нулю*.

Задача 16,15. Найти $\operatorname{grad}\operatorname{div}\bar{a}$, где $\bar{a} = \bar{a}(x, y, z)$.

Решение. На основании (16,5) и (16,6)

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\bar{a} = \nabla(\nabla\cdot\bar{a}) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k}\right)\left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right).$$

Было бы ошибкой считать, что $\nabla(\nabla\cdot\bar{a}) = \nabla^2\bar{a}$, так как и при действиях с обыкновенными векторами умножение вектора $\bar{b}$ на скалярное произведение $\bar{b}\cdot\bar{c}$, т. е. $\bar{b}\cdot(\bar{b}\cdot\bar{c}) \neq b^2\cdot\bar{c}$.

(Выражение $\nabla^2\bar{a}$ есть вектор, имеющий такой смысл: $\nabla^2\bar{a} = \frac{\partial^2\bar{a}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\bar{a}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\bar{a}}{\partial z^2}$. Не следует смешивать $\nabla^2\bar{a}$ с $(\nabla\bar{a})^2$, как нельзя смешивать $\nabla^2\varphi$ с $(\nabla\varphi)^2$)

Задача 16,16. Определить $\operatorname{div}\operatorname{rot}\bar{a}$, где $\bar{a} = \bar{a}(x, y, z)$.

Решение. По формулам (16,6) и (16,7)

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\bar{a} = \nabla\cdot(\nabla\times\bar{a}).$$

Здесь мы имеем дело с векторно-скалярным произведением трех векторов. Из векторной алгебры известно, что это произведение обращается в нуль, если в него входят два равных вектора.

Таким образом

$$\boxed{\operatorname{div}\operatorname{rot}\bar{a} = 0} \qquad (16,35)$$

Более сложным путем получен этот результат в задаче (14,23).

Задача 16,17. Определить $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\bar{a}$, где $\bar{a} = \bar{a}(x, y, z)$.

Решение. На основании (16,7) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\bar{a} = \nabla\times(\nabla\times\bar{a})$. Используя теперь формулу (16,16) для двойного векторного произведения, получаем

$$\nabla\times(\nabla\times\bar{a}) = \begin{vmatrix} \nabla & \bar{a} \\ \nabla\cdot\nabla & \nabla\cdot\bar{a} \end{vmatrix} = \nabla(\nabla\cdot\bar{a}) - (\nabla\cdot\nabla)\bar{a}.$$

Но на основании (16,6) $\nabla \cdot \bar{a} = \operatorname{div} \bar{a}$, а по (16,5) $\nabla(\operatorname{div} \bar{a}) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{a}$. На основании задачи 16,11 $\nabla \cdot \nabla = \nabla^2$, поэтому окончательно

$$\boxed{\nabla \times (\nabla \times \bar{a}) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{a} - \nabla^2 \bar{a}} \tag{16,36}$$

В задаче 14,27 эта формула была получена значительно более сложными выкладками.