СЕМНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание. Криволинейные координаты. Ортогональные криволинейные координаты. Запись в ортогональных криволинейных координатах основных дифференциальных операций теории поля: градиента, дивергенции, ротора и оператора Лапласа. Выражения градиента, дивергенции, ротора и оператора Лапласа в цилиндрической и сферической системах координат.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

На предыдущих практических занятиях мы пользовались такими пространственными системами координат: прямоугольной, цилиндрической и сферической. В каждой из этих систем положение точки в пространстве определяется тройкой чисел (u, v, w), причем различным точкам однозначно соответствуют различные тройки чисел по определенному закону, присущему данной системе координат. В прямоугольной системе координат такой тройкой чисел являются (x, y, z) — абсцисса, ордината и аппликата точки.

В цилиндрической системе координат положение точки в пространстве однозначно определяется тройкой чисел (r, φ, z), которые называются цилиндрическими координатами точки. Здесь r и φ — полярные координаты проекции точки на плоскость xOy

$$(0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi); \quad (0 \leqslant r < +\infty),$$

а z — ее аппликата $(-\infty < z < +\infty)$.

Между прямоугольными и цилиндрическими координатами точки существует зависимость, определяемая формулами

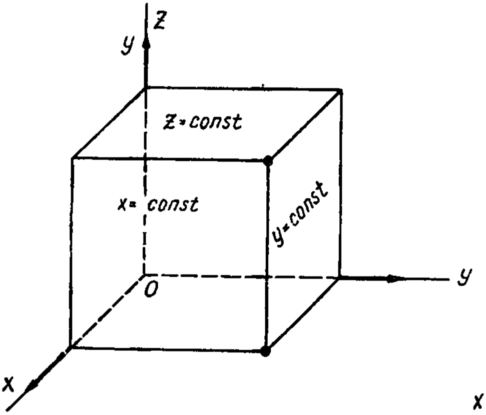
$$x = r\cos\varphi; \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z. \tag{17,1}$$

В сферической системе координат положение точки в пространстве однозначно определяется тройкой чисел (ρ, θ, φ), которые называются сферическими координатами точки. Здесь ρ — расстояние точки от начала координат $(0 \leqslant \rho < +\infty)$, θ — угол между радиусом-вектором точки и положительным направлением оси Oz $(0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$, φ — угол между положительным направлением оси Ox и проекцией радиуса-вектора точки на плоскость xOy $(0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$. Зависимость между прямоугольными и сферическими координатами дается формулами

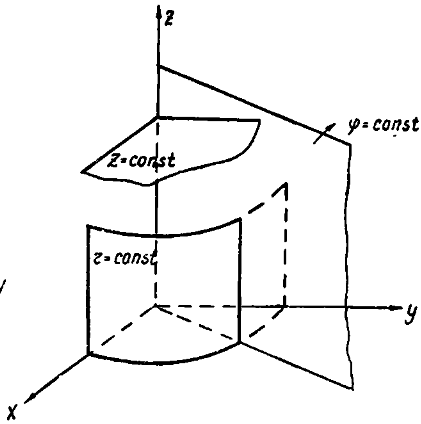
$$\begin{aligned} x &= \rho\sin\theta\cos\varphi; \\ y &= \rho\sin\theta\sin\varphi; \\ z &= \rho\cos\theta. \end{aligned} \tag{17,2}$$

Координатная поверхность. Координатной называется поверхность, на которой одна из координат точки остается постоянной. Координатными поверхностями в прямоугольной системе координат являются плоскости, параллельные координатным плоскостям xOy, xOz и yOz (фиг. 17,1). На каждой из этих плоскостей одна координата сохраняет постоянное значение.

Координатными поверхностями в *цилиндрической системе координат* являются: 1) плоскости, параллельные плоскости xOy, т. е. поверхности, на которых координата z остается постоянной; 2) поверхности прямых круговых цилиндров, общей осью которых является ось Oz; на этих поверхностях постоянное значение имеет



Фиг. 17,1



Фиг. 17,2

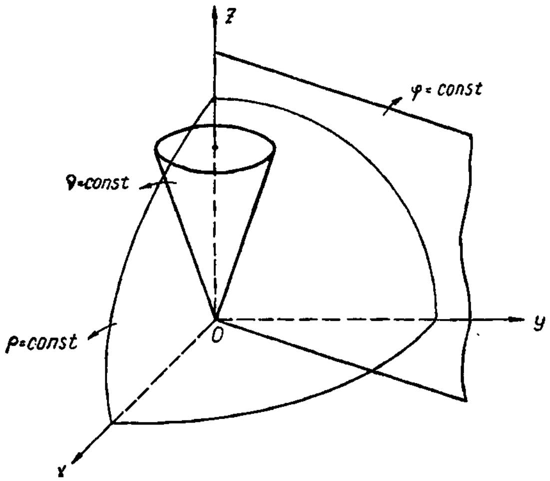
координата r; 3) полуплоскости, проходящие через ось Oz и ограниченные ею; на них координата φ сохраняет постоянное значение (фиг. 17,2).

Координатными поверхностями *в сферической системе координат* являются: 1) сферы с центром в начале координат; на них координата ρ сохраняет постоянное значение; 2) полуплоскости, проходящие через ось Oz и ограниченные ею; на этих кооодинатных поверхностях постоянное значение сохраняет координата φ и 3) круговые конусы, общей осью которых является ось Oz; на каждой из этих координатных поверхностей координата θ сохраняет постоянное значение (фиг. 17,3).

Координатные линии. Координатными называются такие линии, вдоль которых изменяется только одна координата, а две другие сохраняют постоянное значение. Каждые две координатные поверхности при пересечении образуют координатную линию.

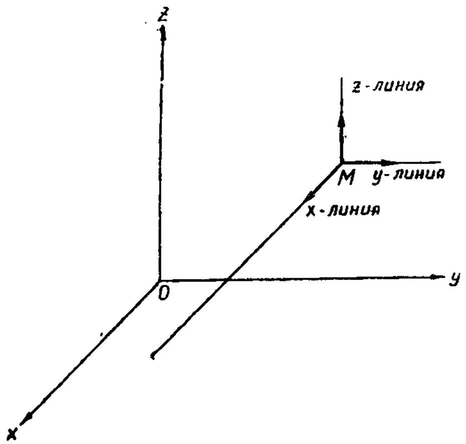
В прямоугольной системе координат такими линиями являются прямые, параллельные координатным осям. Например, координатная x-линия параллельна оси Ox (фиг. 17,4).

Координатными линиями в цилиндрической системе координат являются: z-линия — прямая, параллельная оси Oz, φ-линия — ок-

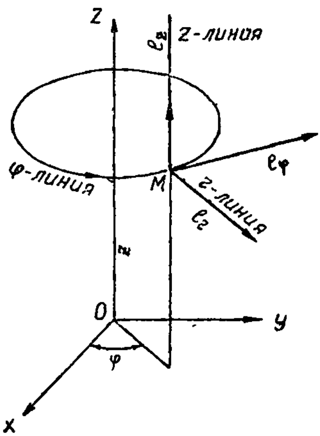


Фиг. 17,3

ружность, лежащая в горизонтальной плоскости с центром на оси Oz, r-линия — луч, выходящий из произвольной точки оси Oz, параллельный плоскости xOy (фиг. 17,5).



Фиг. 17,4

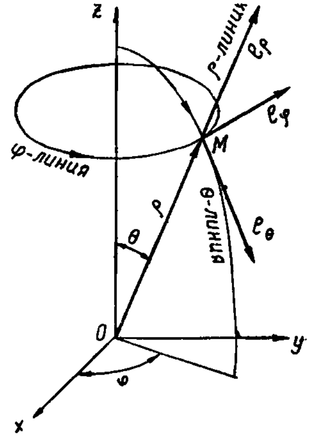


Фиг. 17,5

Координатными линиями в сферической системе координат являются: ρ-линия — луч, выходящий из начала координат, θ-линия — полуокружность с центром в начале координат, соединяющая две точки на оси Oz, и φ-линия — окружность с центром на оси Oz, лежащая в плоскости, параллельной плоскости xOy (фиг. 17,6).

Криволинейная ортогональная система координат. Криволинейная система координат называется ортогональной, если в любой точке касательные к координатным линиям, проходящим через эту точку, пересекаются под прямым углом. Например, цилиндрическая и сферическая системы координат являются ортогональными криволинейными системами координат. Кроме этих координатных систем, которые являются криволинейными ортогональными, существуют и другие.

Рассмотрим в общем виде систему ортогональных криволинейных координат (фиг. 17,7).



Фиг. 17,6

Из формул (17,1) и (17,2) видно, что прямоугольные координаты x, y, и z точки являются в цилиндрической системе координат функциями r, φ и z, т. е.

$$
\begin{aligned}
x &= x(r,\ \varphi);\\
y &= y(r,\ \varphi);\\
z &= z,
\end{aligned}
\qquad \text{(A)}
$$

а в сферической системе координат x, y и z является функциями ρ, θ и φ, т. е.

$$
\begin{aligned}
x &= x(\rho,\ \theta,\ \varphi);\\
y &= y(\rho,\ \theta,\ \varphi);\\
z &= z(\rho,\ \theta).
\end{aligned}
\qquad \text{(B)}
$$

Пусть в общем случае в трехмерном пространстве кроме прямоугольной системы координат введена также криволинейная система координат (u, v, w) и между ними и прямоугольными координатами x, y и z установлено взаимно однозначное соответствие, которое описывается формулами, аналогичными формулам (A) и (B):

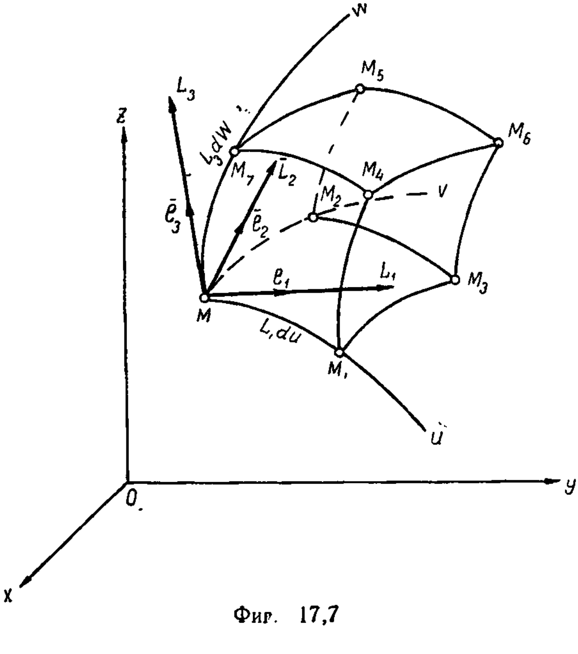
$$
\begin{aligned}
x &= x(u,\ v,\ w);\\
y &= y(u,\ v,\ w);\\
z &= z(u,\ v,\ w).
\end{aligned}
\qquad (17,3)
$$

Каждая пара координатных поверхностей, проходящих через фиксированную точку M, образует в пересечении координатную линию. В фиксированной точке M проведем касательные к координатным линиям Mu, Mv и Mw. Будем рассматривать только ортогональные системы криволинейных координат. Это означает, что векторы $\bar{L}_1$, $\bar{L}_2$, $\bar{L}_3$, лежащие на этих касательных, будут попарно перпендикулярны.

Выражения для элементов длины, площади объема в ортогональных криволинейных координатах

Элемент длины в ортогональных криволинейных координатах. Рассмотрим бесконечно малый криволинейный параллелепипед, вырезаемый тремя парами координатных поверхностей, соответствующими значениям координат u, v, w и $u+\Delta u$, $v+\Delta v$, $w+\Delta w$. Точка M имеет координаты u, v, $w : M(u, v, w)$. «Гранями» этого параллелепипеда являются координатные поверхности:

$$MM_1M_3M_2;\ MM_2M_5M_7;\ MM_1M_4M_7;$$
$$M_7M_4M_6M_5;\ M_1M_3M_6M_4;\ M_2M_3M_6M_5.$$



Фиг. 17,7

Его «ребрами» являются координатные линии, которые получаются в пересечении указанных «граней».

Квадрат элемента длины в прямоугольной системе координат

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \qquad (17,4)$$

Из формул (17,3) следует, что

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv + \frac{\partial x}{\partial w}dw;$$
$$dy = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv + \frac{\partial y}{\partial w}dw; \qquad (17,5)$$
$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv + \frac{\partial z}{\partial w}dw.$$

Возведем каждое из этих равенств в квадрат, почленно их сложим и подставим в (17,4). Тогда

$$ds^2 = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\right] du^2 + \left[\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\right] dv^2 + \left[\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^2\right] dw^2 + 2\left[\frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v}\right] du\, dv + 2\left[\frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial w} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial w}\right] du\, dw +$$

$$+ 2\left[\frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{\partial y}{\partial w} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial z}{\partial w}\right] dv\, dw.$$

Рассмотрим три вектора $\bar{L}_1$, $\bar{L}_2$, и $\bar{L}_3$, лежащие на касательных, проведенных из точки M к координатным линиям MM_1, MM_2 и MM_3 соответственно:

$$\begin{aligned} \bar{L}_1 &= \frac{\partial x}{\partial u}\bar{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\bar{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\bar{k}; \\ \bar{L}_2 &= \frac{\partial x}{\partial v}\bar{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\bar{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\bar{k}; \\ \bar{L}_3 &= \frac{\partial x}{\partial w}\bar{i} + \frac{\partial y}{\partial w}\bar{j} + \frac{\partial z}{\partial w}\bar{k}, \end{aligned} \tag{17,6}$$

где $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$ — проекции вектора $\bar{L}_1$, на оси Ox, Oy, Oz;

$\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial v}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$ — проекции вектора $\bar{L}_2$ на те же оси;

$\frac{\partial x}{\partial w}$, $\frac{\partial y}{\partial w}$, $\frac{\partial z}{\partial w}$ — проекции вектора $\bar{L}_3$ на те же оси;

а $\bar{i}$, $\bar{j}$, и $\bar{k}$ — орты этих осей.

Так как векторы $\bar{L}_1$, $\bar{L}_2$, и $\bar{L}_3$ попарно перпендикулярны, то их скалярные произведения $\bar{L}_1 \cdot \bar{L}_2$, $\bar{L}_2 \cdot \bar{L}_3$ и $\bar{L}_1 \cdot \bar{L}_3$ равны нулю. Но на основании (17,6)

$$\bar{L}_1 \cdot \bar{L}_2 = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} = 0;$$

$$\bar{L}_1 \cdot \bar{L}_3 = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial w} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial w} = 0;$$

$$\bar{L}_2 \cdot \bar{L}_3 = \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{\partial y}{\partial w} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial z}{\partial w} = 0,$$

поэтому в формуле для ds^2 три последние слагаемые равны нулю и тогда оказывается, что в случае ортогональных криволинейных координат квадрат элемента длины содержит только квадраты дифференциалов du^2, dv^2 и dw, а

$$ds^2 = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\right] du^2 + \left[\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\right] dv^2 + \left[\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^2\right] dw^2. \tag{17,7}$$

Выражения, стоящие здесь в квадратных скобках, есть квадраты длин векторов $\bar{L}_1$, $\bar{L}_2$ и $\bar{L}_3$, определенных формулами (17,6), т. е. эти выражения равны

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 &= L_1^2; \\ \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 &= L_2^2; \\ \left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^2 &= L_3^2, \end{aligned} \tag{17,8}$$

поэтому

$$ds^2 = L_1^2 du^2 + L_2^2 dv^2 + L_3^2 dw^2.$$

На основании формулы (17,8) длины «ребер» рассматриваемого бесконечно малого параллелепипеда следует принять равными:

$$\begin{aligned} (ds)_u &= \overset{\frown}{MM_1} = L_1 du; \\ (ds)_v &= \overset{\frown}{MM_2} = L_2\, dv; \\ (ds)_w &= \overset{\frown}{MM_7} = L_3\, dw. \end{aligned} \tag{17,9}$$

Эти формулы и выражают элементы длины в ортогональных криволинейных координатах.

Множители L_1, L_2, L_3, которые входят в эти формулы, есть длины векторов $\bar{L}_1$, $\bar{L}_2$ и $\bar{L}_3$, введенных формулами (17,6), равные

$$\begin{aligned} L_1 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2}; \\ L_2 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2}; \\ L_3 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^2}. \end{aligned} \tag{17,10}$$

Величины L_1, L_2, L_3 называются коэффициентами Ляме, отвечающими точке с координатами u, v и w. От точки к точке коэффициенты Ляме будут изменяться, поэтому они являются функциями координат точки. Вследствие этого коэффициенты Ляме называют также единицами локальной (местной) длины.

Элемент площади в ортогональных криволинейных координатах. Так как рассматриваемая система криволинейных координат ортогональна, то площадь «грани» $MM_1M_3M_2$, которую с точностью до бесконечно малых высшего порядка будем считать прямоугольником,

$$(d\sigma)_{uv} = (ds)_u \cdot (ds)_v = (L_1du) \cdot (L_2dv);$$
$$(d\sigma)_{uv} = L_1L_2du\,dv. \qquad (17,11)$$

Аналогично площади двух других граней $MM_2M_5M_7$ и $MM_1M_4M_7$ равны соответственно

$$(d\sigma)_{uw} = (ds)_v \cdot (ds)_w = L_2L_3dv\,dw; \qquad (17,12)$$
$$(d\sigma)_{uw} = (ds)_u \cdot (ds)_w = L_1L_3du\,dw. \qquad (17,13)$$

Формулы (17,11), (17,12) и (17,13) и определяют элемент площади в ортогональных криволинейных координатах.

Элемент объема в ортогональных криволинейных координатах. Чтобы определить элемент объема в ортогональных криволинейных координатах, найдем объем рассматриваемого бесконечно малого криволинейного параллелепипеда. Считая с точностью до бесконечно малых высшего порядка этот параллелепипед прямоугольным, определим, что его объем

$$dv = (ds)_u \cdot (ds)_v \cdot (ds)_w;$$
$$dv = (L_1du) \cdot (L_2dv) \cdot (L_3dw).$$

Окончательно элемент объема в ортогональных криволинейных координатах

$$dv = L_1L_2L_3du\,dv\,dw. \qquad (17,14)$$

Выражение проекций вектора $\bar{A}$ на касательные к координатным линиям M_u, M_v, M_w, проведенным в точке M (x, y, z) через его проекции на оси прямоугольной системы координат.

Проекции вектора $\bar{A}$ на оси прямоугольной системы координат обозначим через A_x, A_y, A_z, а на касательные к линиям Mu, Mv и Mw — через A_u, A_v и A_w.

Тогда по известным формулам векторной алгебры имеем

$$A_u = A_x \cos(x, u) + A_y \cos(y, u) + A_z \cos(z, u);$$
$$A_v = A_x \cos(x, v) + A_y \cos(y, v) + A_z \cos(z, v); \qquad (17,15)$$
$$A_w = A_x \cos(x, w) + A_y \cos(y, w) + A_z \cos(z, w).$$

Входящие сюда девять косинусов легко определятся из формул (17,6). Косинус угла между вектором $\bar{a}$ и осью $\bar{L}$ равен проекции вектора на эту ось, разделенной на модуль вектора, т. е.

$$\cos(a, \bar{L}) = \frac{a_L}{a}.$$

Так как косинус угла между касательной к линии Mu и осью Ox равен косинусу того угла, который вектор L_1 составляет с осью Ox, то, учитывая, что $L_{1x} = \frac{\partial x}{\partial u}$, имеем

$$\cos(x, u) = \frac{\frac{\partial x}{\partial u}}{L_1} = \frac{1}{L_1} \cdot \frac{\partial x}{\partial u}.$$

Аналогично получаем и значения остальных косинусов. Таким образом,

$$\cos(x, u) = \frac{1}{L_1} \cdot \frac{\partial x}{\partial u}; \ \cos(y, u) = \frac{1}{L_1} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}; \ \cos(z, u) = \frac{1}{L_1} \cdot \frac{\partial z}{\partial u};$$
$$\cos(x, v) = \frac{1}{L_2} \cdot \frac{\partial x}{\partial v}; \ \cos(y, v) = \frac{1}{L_2} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}; \ \cos(z, v) = \frac{1}{L_2} \cdot \frac{\partial z}{\partial v};$$
$$\cos(x, w) = \frac{1}{L_3} \cdot \frac{\partial x}{\partial w}; \ \cos(y, w) = \frac{1}{L_3} \cdot \frac{\partial y}{\partial w}; \ \cos(z, w) = \frac{1}{L_3} \cdot \frac{\partial z}{\partial w}.$$

В дальнейшем рассматриваются только ортогональные криволинейные координаты, которые для сокращения записей мы будем называть просто криволинейными, опуская слово «ортогональные».

Вывод формул для вычисления градиента, дивергенции, ротора и оператора Лапласа в криволинейных координатах

Задача 17,1. Найти коэффициенты Ляме L_1, L_2 и L_3 для цилиндрических координат.

Решение. В цилиндрических координатах криволинейные координаты u, v, w имеют значения $u = r$, $v = \varphi$, $w = z$, а по формулам (17,1)

$$x = r\cos\varphi; \quad y = r\sin\varphi; \quad z = z.$$

$$\begin{array}{l|l|l}
\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial r} = \cos\varphi; & \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\varphi; & \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial r} = 0; \\
\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r\sin\varphi; & \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial y}{\partial \varphi} = r\cos\varphi; & \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0; \\
\frac{\partial x}{\partial w} = \frac{\partial x}{\partial z} = 0; & \frac{\partial y}{\partial w} = \frac{\partial y}{\partial z} = 0; & \frac{\partial z}{\partial w} = \frac{\partial z}{\partial z} = 1.
\end{array}$$

По формулам (17,10) получим

$$\begin{aligned} L_1 &= \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1; \\ L_2 &= \sqrt{(-r\sin\varphi)^2 + (r\cos\varphi)^2} = r; \\ L_3 &= 1. \end{aligned} \qquad (17,16)$$

Итак, в цилиндрических координатах

$$L_1 = 1; \quad L_2 = r; \quad L_3 = 1. \qquad (17,17)$$

Задача 17,2. Найти коэффициенты Ляме для сферических координат.

Решение. В сферических координатах криволинейные координаты u, v и w имеют значения $u=\rho$; $v=\theta$; $w=\varphi$.
По формулам (17,2)

$$x=\rho\sin\theta\cos\varphi;$$
$$y=\rho\sin\theta\sin\varphi;$$
$$z=\rho\cos\theta;$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\partial x}{\partial\rho}=\cos\varphi\sin\theta; \quad \frac{\partial y}{\partial u}=\frac{\partial y}{\partial\rho}=\sin\varphi\sin\theta; \quad \frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial\rho}=\cos\theta;$$
$$\frac{\partial x}{\partial v}=\frac{\partial x}{\partial\theta}=\rho\cos\varphi\cos\theta; \quad \frac{\partial y}{\partial v}=\frac{\partial y}{\partial\theta}=\rho\sin\varphi\cos\theta; \quad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial\theta}=-\rho\sin\theta;$$
$$\frac{\partial x}{\partial w}=\frac{\partial x}{\partial\varphi}=-\rho\sin\varphi\sin\theta; \quad \frac{\partial y}{\partial w}=\frac{\partial y}{\partial\varphi}=\rho\cos\varphi\sin\theta; \quad \frac{\partial z}{\partial w}=\frac{\partial z}{\partial\varphi}=0.$$

$$L_1=\sqrt{(\cos\varphi\sin\theta)^2+(\sin\varphi\sin\theta)^2+(\cos\theta)^2}=1;$$
$$L_2=\sqrt{(\rho\cos\varphi\cos\theta)^2+(\rho\sin\varphi\cos\theta)^2+(-\rho\sin\theta)^2}=\rho;$$
$$L_3=\sqrt{(-\rho\sin\varphi\sin\theta)^2+(\rho\cos\varphi\sin\theta)^2}=\rho\sin\theta.$$

Итак, в сферических координатах

$$L_1=1;\quad L_2=\rho;\quad L_3=\rho\sin\theta. \tag{17,18}$$

Задача 17,3. Определить градиент функции $V=V(x, y, z)$ в криволинейных координатах, причем

$$x=x(u, v, w);\quad y=y(u, v, w);\quad z=z(u, v, w).$$

Решение. Известно, что

$$\operatorname{grad} V=\frac{\partial V}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial V}{\partial y}\bar{j}+\frac{\partial V}{\partial z}\bar{k}.$$

По формулам (17,15) проекция $\operatorname{grad}_u V$ на направление касательной в точке M к дуге MM_1 (фиг. 17,7) равна

$$\text{пр}_u \operatorname{grad} V=\text{пр}_x \operatorname{grad} V\cdot\cos(x, u)+\text{пр}_y \operatorname{grad} V\cdot\cos(y, u)+$$
$$+\text{пр}_z \operatorname{grad} V\cdot\cos(z, u). \tag{A}$$

Учитывая, что

$$\text{пр}_x \operatorname{grad} V=\frac{\partial V}{\partial x};\quad \text{пр}_y \operatorname{grad}\frac{\partial V}{\partial y};\quad \text{пр}_z \operatorname{grad} V=\frac{\partial V}{\partial z},$$

а на основании формул (17,16)

$$\cos(x, u)=\frac{1}{L_1}\cdot\frac{\partial x}{\partial u};\quad \cos(y, u)=\frac{1}{L_1}\cdot\frac{\partial y}{\partial u};\quad \cos(z, u)=\frac{1}{L_1}\cdot\frac{\partial z}{\partial u},$$

переписываем (A) в виде

$$\text{пр}_u \operatorname{grad} V = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{1}{L_1} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \frac{1}{L_1} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial V}{\partial z} \cdot \frac{1}{L_1} \cdot \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{L_1}\left(\frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial V}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial u}\right).$$

Выражение в скобках есть нечто иное, как производная по u от сложной функции $V(x, y, z)$, где

$$x = x(u, V, w); \ y = y(u, v, w); \ z = z(u, v, w),$$

т. е. $\frac{\partial V}{\partial u}$.

Поэтому

$$\text{пр}_u \operatorname{grad} V = \frac{1}{L_1} \cdot \frac{\partial V}{\partial u}. \qquad (17,19)$$

Точно так же найдем проекции градиента функции V на касательные, проведенные в точке M к дугам MM_2 и MM_3:

$$\text{пр}_v \operatorname{grad} = \frac{1}{L_2}\frac{\partial V}{\partial v}; \qquad (17,20)$$

$$\text{пр}_w \operatorname{grad} = \frac{1}{L_3}\frac{\partial V}{\partial w}. \qquad (17,21)$$

Поэтому $\operatorname{grad} V$ в криволинейных координатах

$$\operatorname{grad} V = \frac{1}{L_1}\frac{\partial V}{\partial u}\bar{e}_u + \frac{1}{L_2}\frac{\partial V}{\partial v}\bar{e}_v + \frac{1}{L_3}\frac{\partial V}{\partial w}\bar{e}_w \qquad (17,22)$$

где $\bar{e}_u$, $\bar{e}_v$, $\bar{e}_w$ — орты осей Ou, Ov и Ow соответственно.

Задача 17. Найти выражение дивергенции вектора $\bar{A}$ в криволинейных координатах.

Решение. Известно, что дивергенцией векторного поля вектора $\bar{A}$ в точке M называется предел, к которому стремится отношение потока этого вектора через замкнутую поверхность $\bar{S}$, окружающую точку M, к объему V области, ограниченной этой поверхностью, при условии, что объем V стягивается в точку M, т. е.

$$\operatorname{div} \bar{A} = \lim_{V \to M} \frac{\iint\limits_{(S)} A_n d\sigma}{V}. \qquad (17,23)$$

Поэтому мы можем дивергенцию вектора $\bar{A}$ в точке M вычислить, применяя формулу (17,23) к элементарному объему в криволинейных координатах, т. е. применяя ее к нашему бесконечно малому криволинейному параллелепипеду. Вектор $\bar{A}$ в криволинейных координатах запишется через его проекции на касательные в точке M к координатным линиям так:

$$\bar{A} = A_u e_u + A_v \bar{e}_v + A_w \bar{e}_w. \tag{17,24}$$

Вычислим поток вектора A через все шесть граней этого параллелепипеда.

Рассмотрим сначала две «грани», перпендикулярные к координатной линии MM_1 (напоминаем, что мы рассматриваем ортогональные криволинейные координаты), т. е. «грани» $MM_2M_5M_3$ и $M_1M_3M_6M_4$. Так как внешние нормали к этим граням имеют противоположные направления, то проекции вектора $\bar{A}$ на них будут отличаться только знаком. Единичные векторы этих нормалей будут $-\bar{e}_u$ на левой грани и $\bar{e}_u$ на правой, так как $\bar{e}_u$ направлен в сторону возрастающих значений координаты u. Из (17,24) следует, что проекция вектора $\bar{A}$ на нормаль к левой грани будет равна $-A_u$, а на нормаль правой грани эта проекция равна A_u.

Поток через «грань» $MM_2M_5M_3$ равен площади этой грани $d\sigma_1 = L_1L_2du\,dw$, умноженной на $-A_u$, т. е.

$$П_{MM_2M_5M_3} = -A_uL_1L_2dv\,dw.$$

Поток через противоположную «грань» $M_1M_3M_6M_4$ от только что определенного отличается на величину частного дифференциала по переменной u от величины $A_uL_1L_2$, т. е. на величину

$$\frac{\partial}{\partial u}(A_uL_1L_2)\,du,$$

так как на этой грани криволинейная координата равна не u, а $u + du$, а две другие координаты v и w имеют то же значение, что и на левой «грани». Таким образом, поток вектора $\bar{A}$ через правую грань

$$П_{M_1M_3M_6M_4} = \left[A_uL_1L_2 + \frac{\partial}{\partial u}(A_uL_1L_2)\,du\right]dv\,dw.$$

Складывая найденные потоки через две рассматриваемые грани, найдем, что поток через эти две грани равен

$$\left[A_uL_1L_2 + \frac{\partial}{\partial u}(A_uL_1L_2)\,du\right]dv\,dw + [-A_uL_1L_2dv\,dw] =$$
$$= \frac{\partial}{\partial u}(A_uL_1L_2)\,du\,dv\,dw.$$

Аналогично поток через две грани $MM_1M_4M_3$ и $M_3M_6M_5M_2$ равен

$$\frac{\partial}{\partial v}(A_vL_1L_3)\,du\,dv\,dw,$$

а через две грани $MM_1M_3M_2$ и $M_3M_4M_6M_5$

$$\frac{\partial}{\partial w}(A_w L_1 L_2)\,du\,dv\,dw.$$

Поток через весь объем бесконечно малого криволинейного параллелепипеда равен сумме этих потоков, т. е.

$$\left[\frac{\partial}{\partial u}(A_u L_2 L_3) + \frac{\partial}{\partial v}(A_v L_1 L_3) + \frac{\partial}{\partial w}(A_w L_2 L_3)\right] du\,dv\,dw.$$

Разделив это выражение на объем параллелепипеда, равный на основании формулы (17,14) $L_1L_2L_3\,du\,dv\,dw$, найдем по (17,23), что в точке M

$$\operatorname{div}\bar{A} = \frac{1}{L_1L_2L_3}\left[\frac{\partial}{\partial u}(A_u L_2 L_3) + \frac{\partial}{\partial v}(A_v L_1 L_3) + \frac{\partial}{\partial w}(A_w L_1 L_2)\right]. \qquad (17,25)$$

Задача 17,5 (для самостоятельного решения). Найти: 1) $\operatorname{div}\bar{e}_u$; 2) $\operatorname{div}\bar{e}_v$ и 3) $\operatorname{div}\bar{e}_w$.

Ответ. 1) $\operatorname{div}\bar{e}_u = \dfrac{1}{L_1L_2L_3}\dfrac{\partial}{\partial u}(L_2L_3)$;

2) $\operatorname{div}\bar{e}_v = \dfrac{1}{L_1L_2L_3}\dfrac{\partial}{\partial v}(L_1L_3)$;

3) $\operatorname{div}\bar{e}_w = \dfrac{1}{L_1L_2L_3}\dfrac{\partial}{\partial w}(L_1L_2)$.

Задача 17,6. Найти выражение для вихря вектора $\bar{A}$ в ортогональных криволинейных координатах.

Решение. Положим в формуле (17,22) $V = u$. Так как частные производные от u по v и w равны нулю, потому что u не зависит от v и w, получим

$$\operatorname{grad} u = \frac{1}{L_1}\bar{e}_u. \qquad (17,26)$$

Вычислим вихрь от обеих частей этого равенства

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = \operatorname{rot}\left(\frac{1}{L_1}\bar{e}_u\right).$$

Но на основании (16,34) $\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = 0$, а потому

$$\operatorname{rot}\left(\frac{1}{L_1}\bar{e}_u\right) = 0. \qquad (17,27)$$

По формуле (16,11)

$$\operatorname{rot} f\bar{a} = \operatorname{grad} f \times \bar{a} + f\operatorname{rot}\bar{a}.$$

На основании этого и учитывая (17,27), получаем

$$\operatorname{rot}\left(\frac{1}{L_1}\bar{e}_u\right) = \operatorname{grad}\left(\frac{1}{L_1}\right) \times \bar{e}_u + \frac{1}{L_1}\operatorname{rot}\bar{e}_u. \qquad (17,28)$$

Вычислим $\operatorname{grad}\left(\frac{1}{L_1}\right)$ по формуле (17,22)

$$\operatorname{grad}\left(\frac{1}{L_1}\right)=\frac{1}{L_1}\frac{\partial\left(\frac{1}{L_1}\right)}{\partial u}\bar{e}_u+\frac{1}{L_2}\frac{\partial\left(\frac{1}{L_1}\right)}{\partial v}\bar{e}_v+\frac{1}{L_3}\frac{\partial\left(\frac{1}{L_1}\right)}{\partial w}\bar{e}_w.$$

Выполняем дифференцирование в каждом слагаемом:

$$\operatorname{grad}\left(\frac{1}{L_1}\right)=-\frac{1}{L_1^2}\frac{1}{L_1}\frac{\partial L_1}{\partial u}\bar{e}_u-\frac{1}{L_1^2}\frac{1}{L_2}\frac{\partial L_1}{\partial v}\bar{e}_v-\frac{1}{L_1^2}\frac{1}{L_3}\frac{\partial L_1}{\partial w}\bar{e}_w.$$

Отсюда следует

$$\operatorname{grad}\left(\frac{1}{L_1}\right)=-\frac{1}{L_1^2}\left(\frac{1}{L_1}\frac{\partial L_1}{\partial u}\bar{e}_u+\frac{1}{L_2}\frac{\partial L_1}{\partial v}\bar{e}_v+\frac{1}{L_3}\frac{\partial L_1}{\partial w}\bar{e}_w\right).$$

Выражение, стоящее в скобках правой части последнего равенства, на основании формулы (17,22) равно $\operatorname{grad} L_1$, поэтому окончательно

$$\operatorname{grad}\left(\frac{1}{L_1}\right)=-\frac{1}{L_1^2}\operatorname{grad} L_1.$$

Тогда из (17,28) получаем

$$\begin{gathered}-\frac{1}{L_1^2}\operatorname{grad} L_1\times\bar{e}_u+\frac{1}{L_1}\operatorname{rot}\bar{e}_u=0;\\ \operatorname{rot}\bar{e}_u=\frac{1}{L_1}\operatorname{grad} L_1\times\bar{e}_u.\end{gathered}\qquad(17,29)$$

Вычислим теперь векторное произведение $\frac{1}{L_1}\operatorname{grad} L_1\times\bar{e}_u$:

$$\frac{1}{L_1}\operatorname{grad} L_1\times\bar{e}_u=\frac{1}{L_1}\begin{vmatrix}\bar{e}_u & \bar{e}_v & \bar{e}_w\\ (\operatorname{grad} L_1)_u & (\operatorname{grad} L_1)_v & (\operatorname{grad} L_1)_w\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}.$$

Заменяя элементы второй строки этого определителя по формулам (17.19), (17,20) и (17.21), получим

$$\frac{1}{L_1}\operatorname{grad} L_1\times\bar{e}_u=\frac{1}{L_1}\begin{vmatrix}\bar{e}_u & \bar{e}_v & \bar{e}_w\\ \frac{1}{L_1}\frac{\partial L_1}{\partial u} & \frac{1}{L_2}\frac{\partial L_1}{\partial v} & \frac{1}{L_3}\frac{\partial L_1}{\partial w}\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{L_1}\left(\frac{1}{L_3}\frac{\partial L_1}{\partial w}\bar{e}_v-\frac{1}{L_2}\frac{\partial L_1}{\partial v}\bar{e}_w\right),$$

а отсюда уже окончательно получаем из (17,29)

$$\operatorname{rot}\bar{e}_u=\frac{1}{L_1L_3}\frac{\partial L_1}{\partial w}\bar{e}_v-\frac{1}{L_1L_2}\frac{\partial L_1}{\partial v}\bar{e}_w.$$

Точно так же определим

$$\operatorname{rot} \bar{e}_v = \frac{1}{L_2 L_1} \frac{\partial L_2}{\partial u} \bar{e}_w - \frac{1}{L_2 L_3} \frac{\partial L_2}{\partial w} \bar{e}_u;$$

$$\operatorname{rot} \bar{e}_w = \frac{1}{L_3 L_2} \frac{\partial L_3}{\partial v} \bar{e}_u - \frac{1}{L_3 L_1} \frac{\partial L_3}{\partial u} \bar{e}_v.$$

После того как найдены вихри единичных векторов $\bar{e}_u$, $\bar{e}_v$ можно определить и вихрь вектора $\bar{A}$

$$\bar{A} = A_u \bar{e}_u + A_v \bar{e}_v + A_w \bar{e}_w,$$

где A_u, A_v, A_w — проекции векторов $\bar{A}$ по осям u, v и w.

$$\operatorname{rot} A = \operatorname{rot}(A_u \bar{e}_u) + \operatorname{rot}(A_v \bar{e}_v) + \operatorname{rot}(A_w \bar{e}_w)$$

Пользуясь тем, что на основании (16,11)

$$\operatorname{rot} f\bar{a} = \operatorname{grad} f \times \bar{a} + f \operatorname{rot} \bar{a},$$

получим

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} \bar{A} &= \operatorname{grad} A_u \times \bar{e}_u + \operatorname{grad} A_v \times \bar{e}_v + \operatorname{grad} A_w \times \bar{e}_w + \\
&+ A_u \operatorname{rot} \bar{e}_u + A_v \operatorname{rot} \bar{e}_v + A_w \operatorname{rot} \bar{e}_w = \\
&= \begin{vmatrix} \bar{e}_u & \bar{e}_v & \bar{e}_w \\ \frac{1}{L_1} \frac{\partial A_u}{\partial u} & \frac{1}{L_2} \frac{\partial A_u}{\partial v} & \frac{1}{L_3} \frac{\partial A_u}{\partial w} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{e}_u & \bar{e}_v & \bar{e}_w \\ \frac{1}{L_1} \frac{\partial A_v}{\partial u} & \frac{1}{L_2} \frac{\partial A_v}{\partial v} & \frac{1}{L_3} \frac{\partial A_v}{\partial u} \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \\
&+ \begin{vmatrix} \bar{e}_u & \bar{e}_v & \bar{e}_w \\ \frac{1}{L_1} \frac{\partial A_w}{\partial u} & \frac{1}{L_2} \frac{\partial A_w}{\partial v} & \frac{1}{L_3} \frac{\partial A_w}{\partial w} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + A_u \left(\frac{1}{L_1 L_3} \frac{\partial L_1}{\partial w} \bar{e}_v - \frac{1}{L_1 L_2} \frac{\partial L_1}{\partial u} \bar{e}_w \right) + \\
&+ A_v \left(\frac{1}{L_2 L_1} \frac{\partial L_2}{\partial u} \bar{e}_w - \frac{1}{L_2 L_3} \frac{\partial L_2}{\partial w} \bar{e}_u \right) + A_w \left(\frac{1}{L_3 L_2} \frac{\partial L_3}{\partial v} \bar{e}_u - \right. \\
&\left. - \frac{1}{L_3 L_1} \frac{\partial L_3}{\partial u} \bar{e}_v \right) = \left(\frac{1}{L_3} \frac{\partial A_u}{\partial w} \bar{e}_v - \frac{1}{L_2} \frac{\partial A_u}{\partial v} \bar{e}_w \right) + \left(\frac{1}{L_1} \frac{\partial A_v}{\partial w} \bar{e}_w - \right. \\
&\left. - \frac{1}{L_3} \frac{\partial A_v}{\partial w} \bar{e}_u \right) + \left(\frac{1}{L_2} \frac{\partial A_w}{\partial v} \bar{e}_u - \frac{1}{L_1} \frac{\partial A_w}{\partial u} \bar{e}_v \right) + \\
&+ A_u \left(\frac{1}{L_1 L_3} \frac{\partial L_1}{\partial w} \bar{e}_v - \frac{1}{L_1 L_2} \frac{\partial L_1}{\partial v} \bar{e}_w \right) + A_v \left(\frac{1}{L_2 L_1} \frac{\partial L_2}{\partial u} \bar{e}_w - \right. \\
&\left. - \frac{1}{L_2 L_3} \frac{\partial L_2}{\partial w} \bar{e}_u \right) + A_w \left(\frac{1}{L_3 L_2} \frac{\partial L_3}{\partial v} \bar{e}_u - \frac{1}{L_3 L_1} \frac{\partial L_3}{\partial u} \bar{e}_v \right) = \\
&= \left(\frac{1}{L_2} \frac{\partial A_w}{\partial v} - \frac{1}{L_3} \frac{\partial A_v}{\partial w} + \frac{1}{L_3 L_2} A_w \frac{\partial L_3}{\partial v} - \frac{1}{L_2 L_3} A_v \frac{\partial L_2}{\partial w} \right) \bar{e}_u + \\
&+ \left(\frac{1}{L_3} \frac{\partial A_u}{\partial w} - \frac{1}{L_1} \frac{\partial A_w}{\partial u} + \frac{1}{L_1 L_3} A_u \frac{\partial L_1}{\partial \varphi} - \frac{1}{L_3 L_1} A_w \frac{\partial L_3}{\partial u} \right) \bar{e}_v +
\end{aligned}$$

$$+\left(\frac{1}{L_1}\frac{\partial A_v}{\partial u}-\frac{1}{L_2}\frac{\partial A_u}{\partial v}+\frac{1}{L_2L_1}A_v\frac{\partial L_2}{\partial u}-\frac{1}{L_1L_2}A_u\frac{\partial L_1}{\partial v}\right)\bar{e}_w=$$

$$=\frac{1}{L_3L_2}\left[\left(L_3\frac{\partial A_w}{\partial v}+A_w\frac{\partial L_3}{\partial v}\right)-\left(L_2\frac{\partial A_v}{\partial w}+A_v\frac{\partial L_2}{\partial w}\right)\bar{e}_u+\right.$$

$$+\frac{1}{L_1L_3}\left[\left(L_1\frac{\partial A_u}{\partial w}+A_u\frac{\partial L_1}{\partial w}\right)-\left(L_3\frac{\partial A_w}{\partial u}+A_w\frac{\partial L_3}{\partial u}\right)\right]\bar{e}_v+$$

$$+\frac{1}{L_2L_1}\left[\left(L_2\frac{\partial A_v}{\partial u}+A_v\frac{\partial L_2}{\partial u}\right)-\left(L_1\frac{\partial A_u}{\partial v}+A_u\frac{\partial L_1}{\partial v}\right)\right]\bar{e}_w=$$

$$=\frac{1}{L_3L_2}\left(\frac{\partial(A_wL_3)}{\partial v}-\frac{\partial(A_vL_2)}{\partial w}\right]\bar{e}_u+\frac{1}{L_1L_3}\left[\frac{\partial(A_uL_1)}{\partial w}-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial(A_wL_3)}{\partial u}\right]\bar{e}_v+\frac{1}{L_2L_1}\left[\frac{\partial(A_vL_2)}{\partial u}-\frac{\partial(A_uL_1)}{\partial v}\right]\bar{e}_w.$$

И окончательно для вихря вектора $\bar{A}$ в криволинейных ортогональных координатах

$$\operatorname{rot}\bar{A}=\frac{1}{L_2L_3}\left[\frac{\partial(A_wL_3)}{\partial v}-\frac{\partial(A_vL_2)}{\partial w}\right]\bar{e}_u+\frac{1}{L_1L_3}\left[\frac{\partial(A_uL_1)}{\partial w}-\right.$$
$$\left.-\frac{\partial(A_wL_3)}{\partial u}\right]\bar{e}_v+\frac{1}{L_1L_2}\left[\frac{\partial(A_vL_2)}{\partial u}-\frac{\partial(A_uL_1)}{\partial v}\right]\bar{e}_w. \tag{17,30}$$

Задача (17,7). Найти выражение оператора Лапласа ΔV в ортогональных криволинейных координатах.

Решение. Из формулы (16,32) известно, что

$$\Delta V=\operatorname{div}\operatorname{grad}V.$$

Проекции $\operatorname{grad}V$ вычисляются по формулам (17,19), (17,20), (17,21)

$$\operatorname{grad}_uV=\frac{1}{L_1}\cdot\frac{\partial V}{\partial u};$$
$$\operatorname{grad}_vV=\frac{1}{L_2}\cdot\frac{\partial V}{\partial v};$$
$$\operatorname{grad}_wV=\frac{1}{L_3}\cdot\frac{\partial V}{\partial w}.$$

Заменяем в формуле (17,25) проекции вектора A проекциями $\operatorname{grad}V$

$$\Delta V=\operatorname{div}\operatorname{grad}V=\frac{1}{L_1L_2L_3}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{L_2L_3}{L_1}\cdot\frac{\partial V}{\partial u}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{L_1L_3}{L_2}\frac{\partial V}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{L_1L_2}{L_3}\frac{\partial V}{\partial w}\right)\right].$$

Значит, в ортогональных криволинейных координатах оператор Лапласа

$$\Delta V=\frac{1}{L_1L_2L_3}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{L_2L_3}{L_1}\frac{\partial V}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{L_1L_3}{L_2}\frac{\partial V}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{L_1L_2}{L_3}\frac{\partial V}{\partial w}\right)\right]. \tag{17,31}$$

Определение градиента, дивергенции, ротора и оператора Лапласа в цилиндрических и сферических координатах

Задача 17,8. Найти выражение градиента, дивергенции, ротора и оператора Лапласа в цилиндрических координатах.

Решение. Из задач (17,1) и (17,2) известны значения коэффициентов Ляме в цилиндрических и сферических координатах.

В цилиндрических координатах

$$\begin{gathered} u = r;\ v = \varphi;\ w = z; \\ L_1 = 1;\ L_2 = r;\ L_3 = 1. \end{gathered} \qquad (17,32)$$

1. Внося эти значения и в формулу (17,22), получим выражение градиента в цилиндрических координатах

$$\operatorname{grad} V = \frac{\partial V}{\partial r}\bar{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\bar{e}_\varphi + \frac{\partial V}{\partial z}\bar{e}_z.$$

2. Из формулы (17,25)

$$\operatorname{div}\bar{A} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(A_r r) + \frac{\partial}{\partial \varphi}(A_\varphi) + \frac{\partial (A_z r)}{\partial z}\right].$$

Окончательно

$$\operatorname{div}\bar{A} = \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} + \frac{A_r}{r}.$$

3. Внося значения (17,32) в формулу (17,30), находим виражение ротора в цилиндрических координатах

$$\operatorname{rot}\bar{A} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial (A_\varphi r)}{\partial z}\right)\bar{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\bar{e}_\varphi + \\ + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (A_\varphi r)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi}\right)\bar{e}_z.$$

Выполняя дифференцирование, получаем окончательно в цилиндрических координатах

$$\operatorname{rot}\bar{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\bar{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial Az}{\partial r}\right)\bar{e}_\varphi + \\ + \left(\frac{1}{r}A_\varphi + \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi}\right)\bar{e}_z.$$

4. Выражение оператора Лапласа в цилиндрических координатах находим, внося значения (17,32) в формулу (17,31)

$$\Delta V = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(r\frac{\partial V}{\partial z}\right)\right].$$

Выполняем дифференцирование:

$$\Delta V = \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2};$$

оператор Лапласа в цилиндрических координатах

$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

В полярных координатах на плоскости выражение оператора Лапласа получим, опуская в нем последнее слагаемое, так как в этом случае функция V зависит только от r и φ. Таким образом, в полярных координатах оператор Лапласа

$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Задача 17,9 (для самостоятельного решения). Определить градиент, дивергенцию, ротор и оператор Лапласа в сферических координатах.

Указание. Воспользоваться результатами задачи (17,2), в которой было найдено

$$L_1 = 1;\; L_2 = \rho;\; L_3 = \rho\sin\theta;\; u = \rho;\; v = \theta;\; w = \varphi.$$

Ответ.

$$1)\ \operatorname{grad} V = \frac{\partial V}{\partial \rho}\bar{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \theta}\bar{e}_\theta + \frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{dV}{d\varphi}\bar{e}_\varphi.$$

$$2)\ \operatorname{div}\bar{A} = \frac{2}{\rho}A_\rho + \frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho\operatorname{tg}\theta}A_\theta + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi};$$

$$3)\ \operatorname{rot}_\rho\bar{A} = \frac{1}{\rho\operatorname{tg}\theta}A_\varphi + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi};$$

$$\operatorname{rot}_\theta\bar{A} = \frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} - \frac{1}{\rho}A_\varphi + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \rho};$$

$$\operatorname{rot}_\varphi\bar{A} = \frac{1}{\rho}A_\theta + \frac{\partial A_\theta}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\rho}{\partial \theta};$$

$$4)\ \Delta V = \frac{2}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2\operatorname{tg}\theta}\frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}.$$