ВОСЕМНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание. **Интегрирование линейных дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка.**

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Чтобы выяснить происхождение линейных уравнений с частными производными первого порядка, прежде всего найдем уравнения поверхностей цилиндрических, конических и поверхностей вращения, а потом покажем, что найденные уравнения эквивалентны некоторым уравнениям с частными производными первого порядка.

1. Цилиндрические поверхности.

Найдем уравнение цилиндрической поверхности в том случае, когда образующая ие параллельна ни одной из координатных осей, а ее направляющей является линия, определяемая уравнениями

$$\left.\begin{aligned} F(x,\ y,\ z) &= 0; \\ F_1(x,\ y,\ z) &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{18,1}$$

причем вовсе не обязательно, чтобы эта линия лежала в одной из координатных плоскостей.

Цилиндрическая поверхность, или цилиндр, — *поверхность, описываемая прямой, которая движется, оставаясь параллельной данной прямой, пересекая при этом данную кривую, называемую направляющей.*

Уравнение образующей, если предположить, что она пересекает плоскость xOy и проходит через точку $(a,\ b,\ 0)$, имеет вид

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-0}{p}, \tag{18,2}$$

где a и b — переменные параметры, а m, n и p — постоянные величины, так как по определению образующая сохраняет постоянное направление в пространстве.

Из (18,2)

$$\frac{x-a}{m}=\frac{z}{p};\quad \frac{y-b}{n}=\frac{z}{p}.$$

Из этого следует, что уравнение образующей может быть записано в виде

$$\begin{aligned} x &= kz+a; \\ y &= lz+b, \end{aligned} \tag{18,3}$$

где

$$k = \frac{m}{p}; \quad l = \frac{n}{p}.$$

Так как прямая (18,2) пересекает направляющую (18,1), то, подставляя в (18,1) значения x и y из (18,3), получаем

$$\left.\begin{aligned} F(kz + a, \ lz + b, \ z) = 0; \\ F_1(kz + a, \ lz + b, \ z) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{18,3$_1$}$$

Если из этой системы исключить z, то получится соотношение вида

$$\varphi(a, \ b) = 0, \tag{18,4}$$

которое связывает переменные a и b.

Из системы (18,3) следует, что

$$a = x - kz;$$
$$b = y - lz$$

и потому соотношение (18,4) перепишется в виде

$$\varphi(x - kz, \ y - lz) = 0. \tag{18,5}$$

Этому уравнению будут удовлетворять координаты любой точки образующей цилиндрической поверхности.

Замечание. Если образующая не пересекает плоскость xOy (т. е. параллельна ей), то вместо точки (a, b, 0) надо взять точку пересечения ее с другой координатной плоскостью.

Пример. Найти уравнение цилиндрической поверхности, для которой направляющей служит окружность

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 = 25; \\ z = 4, \end{aligned}\right\}$$

а направление образующей дано отношениями $m : n : p = 2 : 3 : 1$.

Решение. Выполним решение рассмотренным способом.

1. Уравнение образующей запишется в виде

$$\frac{x - a}{2} = \frac{y - b}{3} = \frac{z - 0}{1}.$$

2. Выразим x и y из этого уравнения через z

$$\frac{x - a}{2} = z; \quad \frac{y - b}{3} = z, \tag{A}$$

откуда

$$x = 2z + a; \quad y = 3z + b.$$

3. Эти значения x и y подставим в уравнение направляющей и получим уравнения вида

$$\left.\begin{aligned} (2z + a)^2 + (3z + b)^2 = 25; \\ z = 4. \end{aligned}\right\} \tag{B}$$

4. Теперь из этой системы уравнений исключим z и будем иметь соотношение вида (18,4), связывающее a и b.

В первое уравнение системы (B) подставим из второго $z = 4$.

$$(8 + a)^2 + (12 + b)^2 = 25. \tag{C}$$

5. Из (A) определим a и b

$$a = x - 2z; \; b = y - 3z.$$

Подставляя эти значения в (C), получим уравнение искомой поверхности в виде

$$(8 + x - 2z)^2 + (12 + y - 3z)^2 = 25$$

или, раскрывая скобки, найдем

$$x^2 + y^2 + 13z^2 - 4xz - 6yz + 16x + 24y - 88z + 183 = 0.$$

2. Конические поверхности.

Конической поверхностью, или конусом, называется поверхность, описываемая непрерывным движением прямой (образующей), которая проходит через неподвижную точку $A(a, b, c)$ — вершину конуса и пересекает данную линию (направляющую).

Пусть точка $A(a, b, c)$ — вершина конуса, а уравнения направляющей

$$\left.\begin{aligned} F(x, y, z) &= 0; \\ F_1(x, y, z) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{A}$$

Уравнения образующей конуса, как уравнения прямой, проходящей через точку $A(a, b, c)$, запишутся в виде

$$\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{p}. \tag{B}$$

Переменные параметры m, n и p в этих уравнениях связаны требованием, чтобы образующая пересекала направляющую. Уравнения (B) решим относительно x и y:

$$x = k(z - c) + a; \; y = l(z - c) + b, \tag{C}$$

где

$$k = \frac{m}{p}; \; l = \frac{n}{p}.$$

Так как образующая конической поверхности пересекает направляющую, то эти значения x и y должны удовлетворять уравнениям (A). Подставляя эти значения x и y в каждое из уравнений направляющей (A), мы получим систему двух уравнений, из которых можно исключить переменную z. В результате будет уравнение вида

$$f(k,\ l) = 0, \tag{D}$$

связывающее переменные параметры k и l.

Из уравнений (С) следует

$$k = \frac{x-a}{z-c};\ l = \frac{y-b}{z-c}.$$

Заменяя в уравнении (D) k и l этими их значениями, получим уравнение вида

$$f\left(\frac{x-a}{x-c},\ \frac{y-b}{z-c}\right) = 0, \tag{18,6}$$

которому будут удовлетворять координаты любой точки образующей во все время ее движения; таким образом, уравнение (18,6) и будет уравнением конической поверхности.

Решим задачу, связанную с определением уравнения конической поверхности.

Пример. Найти уравнение конуса с вершиной в начале координат и направляющей

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1; \\ z &= c \end{aligned}\right\}$$

(эллипс, лежащий в плоскости $z = c$).

Решение. Выполним решение в соответствии с указанным способом. Образующая, как прямая, проходящая через начало координат, будет иметь уравнения

$$\frac{x-0}{m} = \frac{y-0}{n} = \frac{z-0}{p}$$

или

$$\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p}.$$

Определим из последних уравнений x и y через z

$$x = kz;\ y = lz\quad \left(k = \frac{m}{p};\ l = \frac{n}{p}\right) \tag{E}$$

и, подставив эти значения в уравнения направляющей, получим

$$\left.\begin{aligned} \frac{k^2z^2}{a^2} + \frac{l^2z^2}{b^2} &= 1; \\ z &= c. \end{aligned}\right\}$$

Теперь из этих двух уравнений исключим z. Этого легко достичь, подставляя в первое уравнение системы $z = c$. Получаем уравнение

$$k^2\frac{c^2}{a^2} + l^2\frac{c^2}{b^2} = 1,$$

т. е. уравнение вида (18, 6). Из соотношений (E) следует

$$k=\frac{x}{z};\quad l=\frac{y}{z}.$$

Подставляем эти значения k и l в последнее уравнение:

$$\frac{x^2}{z^2}\cdot\frac{c^2}{a^2}+\frac{y^2}{z^2}\cdot\frac{c^2}{b^2}=1.$$

Преобразуем его к более удобному виду. Обе части уравнения умножим на $\frac{z^2}{c^2}$:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$$

или

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Полученное уравнение есть уравнение конуса. Заметим, что оно не содержит свободного члена, а все текущие координаты входят в одной и той же степени — второй.

3. Уравнение поверхностей вращения.

Эти поверхности образуются при вращении кривой AB, называемой образующей, около неподвижной прямой OR.

Поместим начало координат на неподвижной прямой OR, называемой осью вращения. Каждая точка M образующей AB описывает окружность, центр которой находится на OR, а плоскость, в которой она лежит, перпендикулярна OR: образованную так поверхность можно рассматривать как геометрическое место этих окружностей.

Пусть

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c} \tag{A}$$

будут уравнения оси OR. Тогда уравнение плоскости, перпендикулярной к ней,

$$ax+by+cz=\alpha.$$

Поэтому уравнения переменного круга

$$ax+by+cz=\alpha;\qquad x^2+y^2+z^2=\beta, \tag{B}$$

так как круг можно рассматривать как пересечение плоскости, перпендикулярной к OR, со сферой, имеющей центр в точке O.

Для того чтобы выразить, что этот круг пересекает кривую AB, нужно исключить x, y и z из уравнений (B) и уравнений кривой AB, а это приводит к соотношению

$$\varphi(\alpha,\ \beta)=0,$$

откуда

$$\alpha = \Phi(\beta). \qquad (C)$$

Уравнение поверхности вращения получим, исключив α и β из (B) и (C), заменив в (C) α на $ax+by+cz$, а β — на $x^2+y^2+z^2$

$$ax+by+cz = \Phi(x^2+y^2+z^2). \qquad (18,7)$$

Это и есть общее уравнение поверхностей вращения вокруг прямой $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ при произвольной функции Φ.

Найдем те дифференциальные уравнения с частными производными, которые эквивалентны полученным уравнениям цилиндрической и конической поверхностей и поверхности вращения.

Введем обозначения

$$\frac{\partial z}{\partial x}=p; \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=q.$$

а) Из уравнения (18,5) цилиндрической поверхности следует

$$y-bz=\Phi(x-az). \qquad (18,8)$$

Это уравнение определяет при произвольной функции Φ цилиндрическую поверхность, образующие которой параллельны данной прямой (18,2), какова бы ни была направляющая.

Продифференцируем обе части (18,8) сначала по x, а потом по y и получим с учетом введенных обозначений

$$-bp=\Phi'(x-az)\cdot(1-ap);$$

$$1-bq=\Phi'(x-az)\cdot(-aq).$$

Исключая из этих уравнений Φ', найдем

$$ap+bq=1 \qquad (18,9)$$

(или $a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=1$).

Это уравнение уже не содержит произвольной функции и имеет такую же степень общности, как и уравнение (18,8). Оно является дифференциальным уравнением в частных производных цилиндрических поверхностей.

б) Теперь обратимся к определению дифференциального уравнения *конических поверхностей*. Из (18,6) следует, что

$$\frac{y-b}{z-c}=\Phi\left(\frac{x-a}{z-c}\right). \qquad (18,10)$$

Это уравнение при произвольной функции Φ определяет коническую поверхность с вершиной в точке (a, b, c). Продифференцируем обе части этого уравнения по x и по y, рассматривая z как функцию независимых переменных x и y. Получаем при дифференцировании по x

$$-\frac{y-b}{(z-c)^2}\cdot p=\Phi'\left(\frac{x-a}{z-c}\right)\cdot\frac{z-c-p(x-a)}{(z-c)^2}.$$

При дифференцировании по y

$$\frac{z-c-q(y-b)}{(z-c)^2}=-\Phi'\left(\frac{x-a}{z-c}\right)\cdot\frac{(x-a)q}{(z-c)^2}.$$

Исключаем из этих двух соотношений Φ':

$$(x-a)p+(y-b)q=z-c, \tag{18,11}$$

иначе: $(x-a)\frac{\partial z}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial z}{\partial y}=z-c.$

Это уравнение не содержит произвольных функций. Оно является дифференциальным уравнением конических поверхностей.

в) Нам следует теперь определить дифференциальное уравнение поверхностей вращения. Дифференцируя обе части уравнения (18,7) сначала по x, а потом по y, получим

$$a+cp=\Phi'(x^2+y^2+z^2)\cdot(2x+2zp);$$
$$b+cq=\Phi'(x^2+y^2+z^2)\cdot(2y+2zq).$$

Исключаем из этих двух уравнений Φ':

$$(cy-bz)p+(az-cx)q=bx-ay, \tag{18,12}$$

иначе: $(cy-bz)\frac{\partial z}{\partial x}+(az-cx)\frac{\partial z}{\partial y}=bx-ay.$

Уравнение (18,12) и есть уравнение с частными производными поверхностей вращения. Выпишем полученные уравнения:

уравнение цилиндрических поверхностей

$$ap+bq=1;$$

уравнение конических поверхностей

$$(x-a)p+(y-b)q=z-c;$$

уравнение поверхностей вращения

$$(cy-bz)p+(az-cx)q=bx-ay.$$

ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Линейное однородное уравнение с частными производными первого порядка имеет такой вид:

$$X_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial z}{\partial x_2}+\cdots+X_n\frac{\partial z}{\partial x_n}=0. \tag{18,13}$$

Здесь z—искомая функция от n независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — коэффициенты, которые являются функциями тех же n независимых переменных, причем ни в один из коэффициентов искомая функция не входит.

Задачу интегрирования этого уравнения сводят к задаче интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Уравнение (18,13) заменяют такой системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n}. \tag{18,14}$$

Если проинтегрировать эту систему уравнений, то получим ее $(n-1)$ решений, которые содержат $(n-1)$ различных произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$. Разрешив эти решения относительно произвольных постоянных, найдем выражения вида

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= C_1; \\ u_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= C_2; \\ &\cdots\cdots\cdots \\ u_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= C_{n-1}, \end{aligned} \tag{18,15}$$

где функции $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ есть известные функции независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, причем все эти функции различны и соотношения между ними не существует.

Укажем следующие теоремы:

Теорема 1. Всякий интеграл системы (18,14) есть интеграл уравнения (18,13) и наоборот: всякий интеграл уравнения (18,13) есть интеграл системы (18,14).

Теорема 2. Уравнение (18,13) или система (18,14) допускают $n-1$ различных интегралов $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$, все остальные интегралы заключены в формуле

$$u_n = \varphi(u_1, u_2, \ldots, u_n),$$

где φ — произвольная функция.

На основании этих теорем заключают, что всякое выражение вида

$$\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_n),$$

какова бы ни была функция φ, будет интегралом системы (18,14), а потому и уравнения (18,13).

Общий интеграл уравнения (18,13) имеет вид

$$z = \varphi(u_1, u_2, \ldots, u_n). \tag{18,16}$$

Из всего этого следует такое правило интегрирования линейного однородного уравнения первого порядка с частными производными:

Правило. Чтобы проинтегрировать уравнение (18,13), надо составить систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида (18,14) и проинтегрировать ее. Полученные $n-1$ соотношения разрешить относительно произвольных постоянных. Полученные функции $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ будут интегралами уравнения (18,13), а его общий интеграл следует записать в виде (18,16)

$$z = \varphi(u_1, u_2, \ldots, u_n),$$

где φ — произвольная функция.

Подчеркнем, что общие решения обыкновенных дифференциальных уравнений содержат произвольные постоянные, а общие решения дифференциальных уравнений с частными производными — произвольные функции.

Примечание. Это правило сохраняется и тогда, когда коэффициенты X_i в уравнении (18,13) содержат, кроме независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, также и искомую функцию z.

К решению (18,16) следует присоединить и самоочевидное (тривиальное) решение уравнения (18,13)

$$z = C_n. \tag{18,17}$$

Задача Коши. Эту задачу для уравнения (18,13) рассмотрим только для того случая, когда искомая функция z является функцией двух независимых переменных, которые обозначим через x и y. Уравнение (18,13) запишется в виде

$$X_1 \frac{\partial z}{\partial x} + X_2 \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \tag{18,13'}$$

а система (18,14) запишется в виде одного обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{X_1} = \frac{dy}{X_2}. \tag{18,14'}$$

Разрешая его интеграл относительно произвольной постоянной, получим

$$u_1(x, y) = C_1, \tag{18,15'}$$

а общий интеграл уравнения (18,13') запишется так:

$$z = \varphi(u_1), \tag{18,16'}$$

К этому общему интегралу следует присоединить и самоочевидное решение (18,17)

$$z = C_2. \tag{18,17'}$$

Общий интеграл (18,16') уравнения (18,13') определяет семейство поверхностей, которые называются интегральными поверхностями этого уравнения.

Задача Коши состоит в том, что требуется найти в этом семействе такую поверхность, которая проходит через заданную кривую, определяемую уравнениями

$$\left.\begin{aligned} f(x,\ y,\ z) &= 0, \\ f_1(x,\ y,\ z) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{18,18}$$

Для того чтобы эту поверхность найти, поступают так: из уравнений (18,15'); (18,17') и (18,18) исключают x, y и z и получают уравнение, связывающее C_1 и C_2; после этого C_1 заменяют на u_1, а C_2 на z. Полученное уравнение и определит ту интегральную поверхность из семейства (18,16'), которая проходит через кривую (18,18).

Выделенную таким путём из общего интеграла (18,16') интегральную поверхность будем называть частным решением уравнения (18,13').

Задача 18,1. Найти общий интеграл уравнения

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

и его частные решения, предполагая, что определяемая этим уравнением поверхность проходит через:

1) окружность $y^2 + z^2 = R^2$; $x = 0$; (A)

2) эллипс $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$; $x = 0$; (B)

3) гиперболу $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$; $x = 0$; (C)

4) параболу $y^2 = 2pz$; $x = 0$. (D)

Решение. Заданное уравнение есть линейное однородное уравнение с частными производными первого порядка.

Составляем уравнение (18,14')

$$\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x}.$$

Интегрируя его, получим

$$x^2 + y^2 = C_1. \tag{E}$$

Присоединяем к этому решению самоочевидное решение (18,17')

$$z = C_2. \tag{F}$$

Общий интеграл в виде (18,16') запишется так:

$$z = \varphi(x^2 + y^2).$$

Это уравнение определяет поверхности вращения — см. формулу (18,7).

Теперь найдем частные решения.

1. Исключив x, y и z из уравнений (A), (E) и (F), получим уравнение, связывающее C_1 и C_2;

$$C_1 + C_2^2 = R^2.$$

Заменяя C_1 и C_2 их значениями из (E) и (F), получим

$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

Таким образом, искомой поверхностью является сфера.

2. Исключив x, y и z из уравнений (B), (E) и (F), найдем уравнение, связывающее C_1 и C_2:

$$\frac{C_1}{b^2}+\frac{C_2^2}{c^2}=1.$$

Заменяем C_1 и C_2 их значениями из (E) и (F)

$$\frac{x^2+y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

т. е. эллипсоид вращения. Поступаем так же в третьем и четвертом случаях: в третьем случае

$$\frac{C_1}{b^2}-\frac{C_2^2}{c^2}=1,$$

отсюда

$$\frac{x^2+y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

т. е. искомой поверхностью является двухполостный гиперболоид вращения. В четвертом случае искомой поверхностью является параболоид вращения

$$2pz=x^2+y^2.$$

Задача 18,2. Найти общий интеграл уравнения

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

и его частные решения, предполагая, что определяемая им поверхность проходит через такие линии:

1) окружность $y^2+z^2=R^2$; $x=a$; (A)

2) эллипс $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$; $x=a$; (B)

3) гиперболу $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$; $x=a$; (C)

4) параболу $y^2=2pz$; $x=a$. (D)

Решение. Предложенное уравнение — также линейное однородное уравнение с частными производными первого порядка. На основании (18,14′) ему соответствует уравнение

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}.$$

Интегрируем его:

$$\ln x=\ln y-\ln C_1,\ \text{или}\ x=\frac{y}{C_1},$$

откуда, разрешая последнее равенство относительно C_1, имеем

$$\frac{y}{x} = C_1. \qquad \text{(E)}$$

Присоединяем к этому интегралу самоочевидное решение

$$z = C_2, \qquad \text{(F)}$$

и получаем общее решение в виде (18,16')

$$z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Исключив x, y и z из уравнений (A), (E) и (F), имеем уравнение, связывающее C_1 и C_2

$$a^2C_1^2 + C_2^2 = R^2,$$

а подставляя сюда значения C_1 и C_2 из (E) и (F), находим частное решение

$$a^2y^2 + x^2z^2 = R^2x^2 = 0.$$

Приводим ответы на второй, третий и четвертый вопросы задачи:

2) $a^2c^2y^2 + b^2x^2z^2 - b^2c^2x^2 = 0$;

3) $a^2c^2y^2 - b^2x^2z^2 - b^2c^2x^2 = 0$;

4) $z = \frac{a^2}{2p} \cdot \frac{y^2}{x^2}$.

Задача 18,3. Найти общий интеграл уравнения

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + \left(y - \sqrt{R^2 - z^2}\right)\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Это уравнение — уравнение с частными производными первого порядка.

Решение. Составляем прежде всего обыкновенное уравнение вида (18,14'), которое соответствует данному

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y - \sqrt{R^2 - z^2}}. \qquad \text{(A)}$$

Решение данного уравнения $z = C_1$, которое является самоочевидным, мы сразу же используем для интегрирования уравнения (A), подставив в него C_1 вместо z. Получим

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y - \sqrt{R^2 - C_1^2}},$$

откуда

$$y\,dx - \sqrt{R^2 - C_1^2}\,dx = x\,dy$$

или

$$x\,dy - y\,dx = -\sqrt{R^2 - C_1^2}\,dx.$$

Разделим обе части на x^2:

$$\frac{xdy - ydx}{x^2} = -\sqrt{R^2 - C_1^2}\,\frac{dx}{x^2}$$

или, учитывая, что $\frac{xdy - ydx}{x^2} = d\left(\frac{y}{x}\right)$, а $\frac{dx}{x^2} = d\left(-\frac{1}{x}\right)$, интегрируя, получим

$$\frac{y}{x} = \sqrt{R^2 - C_1^2}\cdot\frac{1}{x} + C_2$$

или

$$\frac{y - \sqrt{R^2 - C_1^2}}{x} = C_2.$$

Заменим теперь C_1 на z:

$$\frac{y - \sqrt{R^2 - z^2}}{x} = C_2.$$

Значит, общий интеграл на основании (18,16′) будет таким:

$$z = \varphi\left(\frac{y - \sqrt{R^2 - z^2}}{x}\right).$$

Задача 18,4. Найти общий интеграл уравнения

$$\frac{x}{y}\frac{\partial\varphi}{dx} + (1 - y^2)\frac{\partial\varphi}{\partial y} + (a - yz)\frac{\partial\varphi}{\partial z} + (b - yu)\frac{\partial\varphi}{\partial u} = 0.$$

Решение. Это линейное уравнение с частными производными первого порядка, искомой функцией φ от независимых переменных x, y, z и u. Составляем систему (18,14) обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующую заданному

$$\frac{dx}{\frac{x}{y}} = \frac{dy}{1 - y^2} = \frac{dz}{a - yz} = \frac{du}{b - yu},$$

или, умножая все знаменатели на y, будем иметь

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y(1 - y^2)} = \frac{dz}{y(a - yz)} = \frac{du}{y(b - yu)}. \qquad \text{(A)}$$

Отсюда выделяем такие три уравнения

1) $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y(1 - y^2)}$;

2) $\frac{dy}{y(1 - y^2)} = \frac{dz}{y(a - yz)}$;

3) $\frac{dx}{x} = \frac{du}{y(b - yu)}$.

Интегрируем первое из них:

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y(1-y^2)};\ \int\frac{dx}{x}=\int\frac{dy}{y(1-y^2)}.$$

Вычислим интеграл в правой части

$$\int\frac{dy}{y(1-y^2)}=\int\frac{1-y^2+y^2}{y(1-y^2)}dy\doteq\int\frac{dy}{y}+\int\frac{ydy}{(1-y^2)}=$$
$$=\ln y-\frac{1}{2}\ln(1-y^2)+\ln C_1.$$

Отсюда для первого уравнения

$$\ln x=\ln y-\frac{1}{2}\ln(1-y^2)+\ln C_1$$

и, потенцируя, имеем

$$\frac{x\sqrt{1-y^2}}{y}=C_1.$$

Теперь приступаем к интегрированию второго уравнения, присоединив к его правой части дробь $\frac{dx}{x}$ из системы (А)

$$\frac{dy}{y(1-y^2)}=\frac{dz}{y(a-yz)};\ \frac{zdy}{yz(1-y^2)}=\frac{ydz}{y^2(a-yz)}=\frac{dx}{x};$$
$$\frac{ydz-zdy}{ay^2-y^3z-yz+y^3z}=\frac{dx}{x};\ \frac{ydz-zdy}{ay^2-yz}=\frac{dx}{x};$$
$$\frac{\frac{ydz-zdy}{y^2}}{a-\frac{z}{y}}=\frac{dx}{x};\ \frac{d\left(\frac{z}{y}\right)}{a-\frac{z}{y}}=\frac{dx}{x};\ \frac{d\left(\frac{z}{y}\right)}{\frac{z}{y}-a}=-\frac{dx}{x}.$$

Интегрирование этого уравнения дает:

$$\ln\left(\frac{z}{y}-a\right)=-\ln x+\ln C_2,$$

откуда

$$\frac{x(z-ay)}{y}=C_2.$$

Подобным же образом для третьего уравнения получим

$$\frac{x(u-by)}{y}=C_3$$

и общий интеграл напишется так:

$$\varphi=f\left[\frac{x\sqrt{1-y^2}}{y},\ \frac{x(z-ay)}{y},\ \frac{x(u-by)}{y}\right].$$

Правило для интегрирования линейных уравнений общего вида с частными производными первого порядка

Это уравнение имеет вид

$$X_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \cdots + X_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = Z, \qquad (18,19)$$

где z — неизвестная функция от $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а $X_1, X_2, \ldots, X_n$, Z — данные функции от $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$. От уравнения (18,13) оно отличается тем, что его правая часть не нуль, а функция независимых переменных и искомой функции z.

Правила интегрирования. Для интегрирования уравнения (18,19) следует написать соответствующую ему систему обыкновенных уравнений

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{dz}{Z}. \qquad (18,20)$$

Проинтегрировав эту систему и разрешив ее интегралы относительно произвольных постоянных, получаем n различных интегралов

$$U_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = C_i \; (i = 1, 2, 3, \ldots, n). \qquad (18,21)$$

Общий интеграл уравнения (18,19) есть неявная функция z и записывается так:

$$V(U_1, U_2, \ldots, U_n) = 0 \qquad (18,22)$$

где V — произвольная функция.

Произвольную функцию, входящую в общее решение, можно найти, если известно, что определяемая ею поверхность проходит через заданную линию (18,18). Эту поверхность находят описанным выше способом.

Задача 18,5. Проинтегрировать уравнение

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

и найти произвольную функцию из условия, что интегральная поверхность проходит через эллипс

$$\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1; \; z = 0. \qquad (A)$$

Решение. Система (18,20) обыкновенных уравнений, соответствующая этому уравнению, будет выглядеть так:

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{1}.$$

Выделяем уравнения $\frac{dx}{a} = \frac{dz}{1}$ и $\frac{dy}{b} = \frac{dz}{1}$. Интегрируя, получаем

$$dx = a\,dz; \quad x = az + C_1; \quad x - az = C_1; \qquad (B)$$
$$dy = b\,dz; \quad y = bz + C_2; \quad y - bz = C_2. \qquad (C)$$

Согласно изложенной теории на основании (18,21) общее решение имеет вид

$$V(x-az,\ y-bz)=0.$$

Сличая с формулой (18,5), заключаем, что полученное общее решение есть уравнение цилиндрических поверхностей.

Разрешим общее решение относительно искомой функции z

$$x-az=f(y-bz);$$

$$z=\frac{x}{a}-\frac{1}{a}f(y-bz).$$

Теперь найдем вид произвольной функции f, исходя из условий задачи. Исключая для этого x, y и z из уравнений (A), (B) и (C) и найдем соотношение между C_1 и C_2

$$\frac{C_1^2}{m^2}+\frac{C_2^2}{n^2}=1;$$

заменяя C_1 и C_2 их значениями из (B) и (C), получаем

$$\frac{(x-az)^2}{m^2}+\frac{(y-bz)^2}{n^2}=1.$$

Это уравнение определяет эллиптический цилиндр.

Задача 18,6. Найти общее решение уравнения

$$a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}=c\frac{\partial u}{\partial z}=xyz.$$

Решение. Система обыкновенных уравнений, соответствующая данному, запишется так:

$$\frac{dx}{a}=\frac{dy}{b}=\frac{dz}{c}=\frac{du}{xyz}.$$

Выделим из этой системы три таких уравнения:

$$\frac{dx}{a}=\frac{dy}{b};\ \frac{dx}{a}=\frac{dz}{c};\ \frac{dx}{a}=\frac{du}{xyz}.$$

Первые два из них дают возможность найти два первых интеграла

$$ady=bdx,$$

или

$$ady-bdx=0.$$

После интегрирования получим

$$ay-bx=C_1,$$

или

$$y=\frac{C_1+bx}{a}.$$

Точно так же второе уравнение после интегрирования даст

$$az - cx = C_2,$$

или

$$z = \frac{C_2 + cx}{a}.$$

Подставим полученные значения y и z в третье уравнение

$$\frac{dx}{a} = \frac{du}{xyz},$$

что даст

$$\frac{dx}{a} = \frac{a^2du}{(C_1 + bx)(C_2 + cx)x},$$

или

$$a^3du = x(C_1 + bx)(C_2 + cx)\,dx,$$

откуда, интегрируя, получаем

$$a^3u = C_1C_2\frac{x^2}{2} + (bC_2 + cC_1)\frac{x^3}{3} + bc\frac{x^4}{4} + C_3,$$

а, заменяя C_1 и C_2 их значениями, будем иметь

$$a^3u = (ay - bx)(az - cx)\frac{x^2}{2} + [b(az - cx) + c(ay - bx)]\frac{x^3}{3} + \\ + bc\frac{x^4}{4} + C_3,$$

или после упрощений

$$a^3u = a^2yz\frac{x^2}{2} - a(bz + cy)\frac{x^3}{6} + bc\frac{x^4}{12} + C_3,$$

откуда

$$a^3u - a^2yz\frac{x^2}{2} + a(bz + cy)\frac{x^3}{6} - bc\frac{x^4}{12} = C_3.$$

Общий интеграл запишется так:

$$V\left(a^3u - a^2yz\frac{x^2}{2} + a(bz + cy)\frac{x^3}{6} - bc\frac{x^4}{12},\ ay - bx,\ az - cx\right) = 0,$$

или

$$a^3u - a^2yz\frac{x^2}{2} + a(bz + cy)\frac{x^3}{6} - bc\frac{x^4}{12} = \varphi(ay - bx,\ az - cx).$$

Задача 18,7. Проинтегрировать уравнение

$$y^2\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = axz.$$

Решение. Составляем систему (18,20) обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующую заданному

$$\frac{dx}{y^2} = \frac{dy}{xy} = \frac{dz}{axz}.$$

Выделяем уравнения $\frac{dx}{y^2} = \frac{dy}{xy}$ и $\frac{dy}{xy} = \frac{dz}{axz}$.

Преобразовывая их, получим

$$xdx - ydy = 0$$

и

$$\frac{dy}{y} = \frac{dz}{az},$$

а интегрируя, находим первые интегралы

$$\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = \frac{C_1}{2}$$

или

$$x^2 - y^2 = C_1$$

и

$$\ln y = \frac{1}{a}\ln z - \frac{1}{a}\ln C_2,$$

откуда

$$\ln y = \frac{1}{a}\ln\frac{z}{C_2}.$$

или

$$y = \sqrt[a]{\frac{z}{C_2}};\; y^a = \frac{z}{C_2};\; \frac{z}{y^a} = C_2.$$

Общий интеграл будет выглядеть так:

$$V\left(x^2 - y^2, \frac{z}{y^a}\right) = 0,$$

откуда

$$\frac{z}{y^a} = f(x^2 - y^2),$$

или

$$z = y^a f(x^2 - y^2).$$

Задача 18,7. Найти общий интеграл уравнения

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{xy}.$$

Решение. Предложенное уравнение является линейным. Соответствующая ему система (18,20) обыкновенных уравнений

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{\frac{1}{xy}}$$

или

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = xydz.$$

Умножая на xy, запишем нашу систему в виде

$$ydx = xdy = x^2y^2dz;$$

$$\frac{ydx + xdy}{2} = x^2y^2dz,$$

а так как

$$ydx + xdy = d(xy),$$

можем переписать,

$$\frac{d(xy)}{2x^2y^2} = dz,$$

или

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{d(xy)}{(xy)^2} = dz.$$

Таким образом, мы получили два уравнения:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \text{ и } \frac{1}{2}\frac{d(xy)}{(xy)^2} = dz.$$

Интегрируем первое из них:

$$\ln x = \ln y - \ln C_1,$$

или

$$\frac{y}{C_1} = x,$$

т. е.

$$\frac{y}{x} = C_1.$$

Интегрирование второго дает

$$-\frac{1}{2xy} = z - C_2; \; z + \frac{1}{2xy} = C_2,$$

а общий интеграл его имеет вид

$$V\left(\frac{y}{x}, \; z + \frac{1}{2xy}\right) = 0$$

или

$$z + \frac{1}{2xy} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

и окончательно

$$z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{2xy}.$$

Задача 18,8. Найти общий интеграл уравнения

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = x + y.$$

Решение. Предложенное уравнение является стема (18,20) обыкновенных уравнений, которая ему запишется так:

$$\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x} = \frac{dz}{x+y},$$

и мы получим два уравнения

$$\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x} \text{ и } \frac{dx - dy}{x + y} = \frac{dz}{x + y}$$

или

$$dx - dy = dz.$$

Интегрируем первое из них:

$$-xdx = ydy,$$

т. е.

$$xdx + ydy = 0,$$

откуда

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = \frac{C_1}{2},$$

т. е.

$$x^2 + y^2 = C_1.$$

Интегрируя же второе, будем иметь

$$dx - dy = dz; \quad d(x - y) = dz;$$

$$x - y = z + C_2$$

или

$$x - y - z = C_2.$$

Общий интеграл

$$V(x^2 + y^2,\ x - y - z) = 0,$$

откуда

$$x - y - z = \varphi(x^2 + y^2),$$

т. е.

$$z = x - y - \varphi(x^2 + y^2),$$

а полагая

$$-\varphi(x^2 + y^2) = f(x^2 + y^2),$$

общее решение получим в виде

$$z = x - y + f(x^2 + y^2).$$

Задача 18,9. Найти общий интеграл уравнения

$$\sin x \frac{\partial z}{\partial x} + \cos x \frac{\partial z}{\partial y} = 1.$$

Решение. Это уравнение также является линейным неоднородным уравнением, и система (18,20) обыкновенных уравнений, ему соответствующая, будет такой:

$$\frac{dx}{\sin x} = \frac{dy}{\cos x} = \frac{dz}{1},$$

откуда 1) $\frac{dx}{\sin x} = \frac{dy}{\cos x}$ или $\frac{\cos x}{\sin x} dx = dy$ и 2) $\frac{dx}{\sin x} = \frac{dz}{1}$.

Интегрируем первое из них:

$$\ln \sin x = y - C_1$$

или

$$y - \ln \sin x = C_1.$$

Интегрирование же второго уравнения дает

$$\ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} = z - C_2$$

или

$$z - \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} = C_2.$$

общий интеграл

$$V\left(z - \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2},\ \ y - \ln \sin x\right) = 0,$$

т. е.

$$z - \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \varphi\,(y - \ln \sin x),$$

или

$$z = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \varphi\,(y - \ln \sin x).$$

Задача 18,10 (для самостоятельного решения). Найти общий интеграл уравнения

$$x^n \frac{\partial z}{\partial x} - x^{n-1} y \frac{\partial z}{\partial y} = z.$$

Ответ.

$$V\left(ze^{\frac{1}{(n-1)\,x^{n-1}}},\ xy\right) = 0;\quad ze^{\frac{1}{(n-1)\,x^{n-1}}} = \varphi\,(xy).$$

Задача 18,11 (для самостоятельного решения). Найти общий интеграл уравнения

$$\frac{y}{e^x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{x}{e^y} \frac{\partial z}{\partial y} = xyz.$$

Ответ. Общий интеграл уравнения

$$V\,[e^{(1-x)\,e^x} \cdot z,\ (x-1)\,e^x - (y-1)\,e^y] = 0,$$

откуда

$$e^{(1-x)\,e^x} z = \varphi\,[(x-1)\,e^x - (y-1)\,e^y]$$

или

$$z = e^{(x-1)\,e^{-x}} \cdot \varphi\,[(x-1)\,e^x - (y-1)\,e^y).$$

Задача 18,12. Найти общий интеграл уравнения

$$x^2 \frac{\partial u}{\partial x} + y^2 \frac{\partial u}{\partial y} + z^2 \frac{\partial u}{\partial z} = u.$$

Ответ.

$$V\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x},\ \frac{1}{z}-\frac{1}{x},\ ue^{\frac{1}{x}}\right)=0$$

или, решая относительно $ue^{\frac{1}{x}}$, имеем

$$ue^{\frac{1}{x}}=\varphi\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x},\ \frac{1}{z}-\frac{1}{x}\right);$$

$$u=e^{-\frac{1}{x}}\varphi\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x},\ \frac{1}{z}-\frac{1}{x}\right).$$

Задача 18,13. Определить общий интеграл уравнения

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Решение. Система (18,20) обыкновенных уравнений, соответствующая этому линейному неоднородному уравнению, будет записана так:

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Из нее выделим два уравнения

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}\quad \text{и}\quad \frac{dx}{x}=\frac{dz}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Интегрируем первое,

$$\ln x=\ln y-\ln C_1$$

или

$$x=\frac{y}{C_1},\quad \text{т. е.}\ \frac{y}{x}=C_1.$$

С помощью полученного решения проинтегрируем второе уравнение

$$\frac{dx}{x}=\frac{dz}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

которое преобразуем так:

$$\frac{dx}{x}=\frac{dx}{x\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}}.$$

Заменим в нем $\frac{y^2}{x^2}$ на C_1^2.

Сокращаем еще на $\frac{1}{x}$:

$$dx=\frac{dz}{\sqrt{1+C_1^2}}$$

и, интегрируя, получим

$$x = \frac{z}{\sqrt{1 + C_1^2}} + C_2$$

или, подставляя $C_1 = \frac{y}{x}$, найдем

$$x - \frac{z}{\sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}} = C_2,$$

а отсюда

$$x - \frac{xz}{\sqrt{x^2 + y^2}} = C_2.$$

Теперь общий интеграл запишется так:

$$\dot{V}\left(\frac{y}{x},\ x - \frac{xz}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) = 0$$

или

$$x - \frac{xz}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right);$$

$$x\sqrt{x^2 + y^2} - xz = \sqrt{x^2 + y^2}\,\varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Обозначая

$$\sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}\,\varphi\left(\frac{y}{x}\right) = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

имеем окончательно

$$\sqrt{x^2 + y^2} = z + f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Задача 18,14 (для самостоятельного решения). Найти общие интегралы уравнений

1) $y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = z;$

2) $xy\frac{\partial z}{\partial x} - y^2\frac{\partial z}{\partial y} = x^2.$

3) $xy\frac{\partial z}{\partial x} + x^2\frac{\partial z}{\partial y} = 2yz;$

4) $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + z;$

5) $x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = x - y.$

Ответ.

1) $z = (x + y)\,f\,(x^2 - y^2);$

2) $z = \frac{z^2}{x^2} + \frac{1}{xy}f\,(xy);$

3) $z = x^2 f\,(x^2 - y^2);$

4) $z = xy + xf\left(\frac{y}{x}\right);$

5) $z = x + y + f\,(xy).$

Задача 18,15 (для самостоятельного решения). Найти общие интегралы уравнений и их частные решения, предполагая, что поверхность, определяемая уравнением, проходит через заданную кривую

$$1)\ xz\frac{\partial z}{\partial x}+yz\frac{\partial z}{\partial x}=-xy.$$

Кривая

$$z=0;\ xy=a^2;$$

$$2)\ 2xz\frac{\partial z}{\partial x}+2yz\frac{\partial z}{\partial y}=z^2-x^2-y^2.$$

Кривая

$$x+y+z=0;\quad x^2+y^2+z^2=R^2.$$

Ответ.

$$1)\ xy+z^2=a^2;$$

$$2)\ (x^2+y^2+z^2)^2=2R^2(x^2+y^2+xy).$$

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. Р. Гантмахер. Теория матриц. Изд-во «Наука», М., 1967.
2. С. В. Фролов, Р. Я. Шостак. Курс высшей математики. Изд-во «Высшая школа», М., 1966.
3. Р. Фрезер, В. Дункан, А. Коллар. Теория матриц и ее приложения к дифференциальным уравнениям и динамике. Изд-во иностр. литературы, М., 1950.
4. А. П. Филин. Некоторые элементарные сведения из линейной алгебры. Изд-во «Судпромгиз», 1961.
5. Б. В. Булгаков. Колебания. Гос. изд-во техн.-теорет. лит-ры, М., 1954.
6. К. Ланцош. Практические методы прикладного анализа. Гос. изд-во физ.-матем. лит-ры, М., 1961.
7. М. Дж. Сальвадори. Численные методы в технике. Изд-во иностр. лит-ры, М., 1955.
8. Б. П. Демидович и И. А. Марон. Основы вычислительной математики. Физматгиз, М., 1960.
9. А. С. Хаусхолдер. Основы численного анализа. Изд-во иностр. литературы, М., 1956.
10. И. П. Мысовских. Лекции по методам вычислений. Физматгиз, М., 1962.
11. И. С. Березин и Н. П. Жидков. Методы вычислений, Физматгиз, М., 1959.