в противном случае, они повлекли бы за собой существование решения уравнения (5), ортогонального к функциям $\psi_1(s), \psi_2(s), \ldots, \psi_r(s)$, что по предположению невозможно. Следовательно, мы можем опять, на основании принципа сходимости, выполнить предельный переход в интегральном уравнении и в силу того, что $f_n(s) \Longrightarrow f(s)$, вывести заключение о разрешимости уравнения (1). Этим самым полностью доказаны теоремы Фредгольма для нашего ядра $K(s, t)$.

Существуют ли вообще случаи, когда однородное уравнение имеет нетривиальные решения — на этот вопрос будет в дальнейшем дан ответ в отношении симметрических ядер.

§ 4. Симметрические ядра и их собственные значения.

Так же, как у билинейных форм в гл. I, и у интегральных уравнений тот случай, когда ядро $K(s,t)$ симметрично, т. е. удовлетворяет соотношению:

$$K(s,t) = K(t, s), \tag{23}$$

может быть исследован подробнее.

В этом случае интегральное уравнение совпадает со своим транспонированным. По отношению к такого рода симметричному интегральному уравнению мы прежде всего поставим себе вопрос, для каких значений параметра $\lambda = \lambda_i$ однородное интегральное уравнение (5) имеет нетривиальное (нормированное) решение. Эти значения параметра называются, как уже упомянуто, собственными значениями, а соответствующие функции — собственными или фундаментальными функциями ядра $K(s, t)$. Аналогично рассуждениям гл. I, § 3, докажем следующую теорему:

Всякое симметрическое, неисчезающее тождественно, непрерывное ядро имеет собственные значения и фундаментальные функции, которые образуют бесконечное и именно счётное множество в том и только в том случае, если ядро не вырождается. Все собственные значения действительного симметрического ядра сами действительны.

1. Существование собственного значения у симметрического ядра. Докажем прежде всего существование одного собственного значения. Для этой цели рассмотрим *„квадратичную интегральную форму“*

$$J(\varphi, \varphi) = \iint K(s,t)\, \varphi(s)\, \varphi(t)\, ds\, dt, \tag{24}$$

которая играет здесь роль квадратичной формы гл. I, причем φ означает какую-нибудь функцию, непрерывную или кусочно-непрерывную в основной области. В силу неравенства Шварца имеем:

$$J(\varphi, \varphi)^2 \leqslant (\varphi, \varphi)^2 \iint K^2(s,t)\, ds\, dt.$$

Следовательно, $J(\varphi, \varphi)$ ограничено по абсолютной величине, если потребовать, чтобы функция φ удовлетворяла соотношению:

$$(\varphi, \varphi) = 1. \tag{25}$$

Интегральная форма обращается в нуль для всех допустимых функций

в том и только в том случае, если само ядро тождественно исчезает. В самом деле, введем *„билинейную интегральную форму“*

$$J(\varphi, \psi) = J(\psi, \varphi) = \int\int K(s,t)\,\varphi(s)\,\psi(t)\,ds\,dt \tag{26}$$

и заметим, что справедливо преобразование:

$$J(\varphi+\psi, \varphi+\psi) = J(\varphi, \varphi) + 2J(\varphi, \psi) + J(\psi, \psi). \tag{27}$$

Тогда, прежде всего, из тождественного исчезания квадратичной вытекает также исчезание и билинейной интегральной формы. Подставив в (26) в частности $\psi(t) = \int K(s,t)\,\varphi(s)\,ds$, получим

$$\int\left[\int K(s,t)\,\varphi(s)\,ds\right]^2 dt = 0;$$

и следовательно, $\int K(s, t)\,\varphi(s)\,ds = 0$ для произвольной функции $\varphi(s)$; если выбрать $\varphi(s)$ равной $K(s, t,)$ при определенном значении t, то получим требуемое тождество $K(s, t) = 0$.

Ядро, обладающее тем свойством, что $J(\varphi, \varphi)$ может принимать только положительные либо только отрицательные значения (когда функция φ не равна тождественно нулю), называется *положительно определенным*, либо, соответственно, *отрицательно определенным*. В противном случае ядро называется *неопределенным*.

В предположении, что форма J способна принимать положительные значения, поставим себе задачу на нахождение максимума: найти нормированную функцию $\varphi(s)$, для которой $J(\varphi, \varphi)$ принимает возможно большее значение.

В силу ограниченности интегральной формы $J(\varphi, \varphi)$, безусловно, существует для ее значений верхняя граница $\varkappa_1 = \frac{1}{\lambda_1}$; требуется доказать, что эта положительная верхняя граница действительно достигается для надлежащим образом выбранной функции $\varphi(s)$. Для этой цели аппроксимируем ядро $K(s,t)$ выродившимися симметрическими ядрами

$$A_n(s,t) = \sum_{i,\,k=1}^{q_n} \overset{(n)}{c}_{ik}\,\omega_i(s)\,\omega_k(t), \qquad \overset{(n)}{c}_{ik} = \overset{(n)}{c}_{ki}$$

описанного в конце § 1 вида. Соответствующая сказанному выше задача на максимум для интегральных форм

$$J_n(\varphi, \varphi) = \int\int A_n(s, t)\,\varphi(s)\,\varphi(t)\,ds\,dt$$

при дополнительном условии (25) оказывается равносильной соответствующей задаче для квадратичной формы от q_n переменных, так как, полагая

$$(\varphi, \omega_i) = x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, q_n),$$

получим:

$$J_n(\varphi, \varphi) = \sum_{i,k=1}^{q_n} c_{ik}^{(n)} x_i x_k, \tag{28}$$

т. е. квадратичную форму относительно $x_1, x_2, \ldots, x_{q_n}$, которой надо сообщить максимум при соблюдении добавочного условия (25). Но применяя неравенство Бесселя (гл. II, § 1, 3) к функции $\varphi(s)$ и ортогональной системе $\omega_1(s), \omega_2(s), \ldots, \omega_{q_n}(s)$, имеем:

$$(\varphi, \varphi) \geqslant \sum_{i=1}^{q_n} x_i^2;$$

следовательно, переменные формы (28) подавно подчинены условию

$$\sum_{i=1}^{q_n} x_i^2 \leqslant 1,$$

и, стало быть, максимум достигается формой, когда

$$\sum_{i=1}^{q_n} x_i^2 = 1,$$

так как в противном случае значение $J_n(\varphi, \varphi)$ можно было бы увеличить посредством умножения переменных x_i на подходящего множителя. Очевидно, перед нами в точности постановка вопроса задачи о преобразовании к главным осям из гл. I, § 3. Максимум формы достигается для системы значений $x_1, x_2, \ldots, x_{q_n}$, удовлетворяющей уравнениям:

$$\sum_{k=1}^{q_n} c_{ik}^{(n)} x_k = \varkappa_{1n} x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, q_n), \tag{29}$$

причем коэфициент пропорциональности $\varkappa_{1n}$ равен как раз $J_n(\varphi, \varphi)$. Это можно обнаружить, помножив уравнение (29) на x_i и просуммировав по i. Тогда правая сторона обратится в $\varkappa_{1n}$, ибо

$$\sum_{i=1}^{q_n} x_i^2 = 1,$$

между тем как на левой стороне получится наша форма $J_n(\varphi, \varphi)$. Если впредь подразумевать под $x_1, x_2, \ldots, x_{q_n}$ эту систему значений и если положить

$$\varphi_n(s) = x_1 \omega_1(s) + x_2 \omega_2(s) + \ldots + x_{q_n} \omega_{q_n}(s),$$

причем $N\varphi_n = 1$ (в силу ортогональности функций ω_ν и в силу равенства $\sum x_\nu^2 = 1$), то из уравнений (29) вытекает соотношение:

$$\varphi_n(s) = \frac{1}{\varkappa_{1n}} \int A_n(s, t) \varphi_n(t)\, dt, \tag{30}$$

и наоборот. В самом деле, из уравнения (29) получим (30), помножив на $\omega_i(s)$, просуммировав и заметив, что $x_i=(\varphi_n, \omega_i)$, а из уравнения (30) получается уравнение (29) после умножения на $\omega_i(s)$ и интеграции. Таким образом функция $\varphi_n(s)$ является фундаментальной функцией ядра $A_n(s, t)$, принадлежащей собственному значению $\mu_{1n}=\frac{1}{\varkappa_{1n}}$:

$$\varphi_n(s)=\mu_{1n}\int A_n(s, t)\,\varphi_n(t)\,dt. \tag{31}$$

Пусть теперь n безгранично растет. При этом $\varkappa_{1n}$ должно стремиться к пределу $\varkappa_1$, соответствующей положительной верхней границе формы $J(\varphi, \varphi)$. В самом деле, из соотношения:

$$|K(s, t)-A_n(s, t)|<\varepsilon$$

при условии, что $(\varphi, \varphi)\leqslant 1$, вытекает на основании неравенства Шварца, что

$$[J(\varphi, \varphi)-J_n(\varphi, \varphi)]^2\leqslant\varepsilon^2(b-a)^2,$$

где a и b — пределы интеграции. Таким образом совокупность значений $J_n(\varphi, \varphi)$ при достаточно большом n как угодно точно совпадает с совокупностью значений $J(\varphi, \varphi)$, а следовательно, то же самое должно иметь место и для верхних границ обеих совокупностей. Существует, стало быть, также $\lim\limits_{n\to\infty}\varkappa_{1n}=\varkappa_1$, так что числа $\varkappa_{1n}$ лежат все ниже определенной грани, и в силу уравнения (31), на основании § 1, функции $\varphi_n(s)$ равномерно ограничены и равностепенно непрерывны для всех значений n. Согласно нашей теореме сходимости можно, следовательно, выбрать такую частичную последовательность $\varphi_{n_1}, \varphi_{n_2}, \ldots$, которая сходится равномерно к предельной функции $\psi_1(s)$. Совершив этот предельный переход в уравнении (30) и в равенствах: $J_n(\varphi_n, \varphi_n)=\varkappa_{1n}$ и $(\varphi_n, \varphi_n)=1$, получим следующие соотношения:

$$\varkappa_1\psi_1(s)=\int K(s, t)\psi_1(t)\,dt, \quad (\psi_1, \psi_1)=1, \tag{32}$$

$$J(\psi_1, \psi_1)=\varkappa_1. \tag{33}$$

Таким образом функция $\psi_1(s)$ решает задачу о максимуме формы $J(\varphi, \varphi)$ и является вместе с тем собственной функцией ядра $K(s, t)$. Отсюда непосредственно вытекает, что $\varkappa_1$ не может быть нулем, так как $J(\varphi, \varphi)$ может принимать положительные значения. Для произвольной функции ψ выполняется, стало быть, соотношение

$$J(\psi, \psi)\leqslant\varkappa_1(\psi, \psi), \tag{34}$$

что легко обнаружить нормированием.

2. Совокупность собственных функций и собственных значений. Для того чтобы получить дальнейшие собственные значения и фундаментальные функции, мы поступим следующим образом:

Поставим задачу: сообщить интегралу $J(\varphi, \varphi)$ максимальное значение, причем на этот раз мы, кроме условия $(\varphi, \varphi)=1$, поставим еще одно дополнительное условие:

$$(\varphi, \psi_1)=0.$$

Мы предполагаем при этом, что при этих двух добавочных условиях форма $J(\varphi, \varphi)$ еще способна принимать положительные значения. Так как вторым добавочным условием область значений интегральной формы ограничивается по сравнению с областью ее значений в первой задаче на максимум, то максимум $\varkappa_2 = \frac{1}{\mu_2}$ не может быть больше прежнего максимума $\varkappa_1$, т. е. $\varkappa_2 \leqslant \varkappa_1$ и $\mu_1 \leqslant \mu_2$. Существование решения этой задачи на максимум можно доказать точно тем же методом, которым мы воспользовались для первого собственного значения, а именно сведением к квадратичной форме и предельным переходом. Удобнее, однако, нижеследующее непосредственное сведение задачи к определению первого собственного значения другого ядра.

Составим функцию:

$$K_{(1)}(s, t) = K(s, t) - \frac{\psi_1(s)\,\psi_1(t)}{\mu_1} \tag{35}$$

и будем ее также рассматривать как симметрическое ядро. Согласно только что полученному результату, задача о максимуме интегральной формы:

$$J_{(1)}(\varphi, \varphi) = \iint K_{(1)}(s, t)\,\varphi(s)\,\varphi(t)\,ds\,dt = \max = \varkappa_2 = \frac{1}{\mu_2} \tag{36}$$

при добавочном условии $(\varphi, \varphi) = 1$ решается функцией $\psi_2(s)$, удовлетворяющей однородному интегральному уравнению:

$$\psi_2(s) = \mu_2 \int K_{(1)}(s, t)\,\psi_2(t)\,dt; \tag{37}$$

мы предполагаем при этом, что и форма $J_{(1)}(\varphi, \varphi)$ еще способна принимать положительные значения, так что $\varkappa_2 > 0$.

Перепишем уравнение (37) в следующей форме:

$$\psi_2(s) = \mu_2 \int K(s, t)\,\psi_2(t)\,dt - \mu_2 \frac{\psi_1(s)}{\mu_1}(\psi_2, \psi_1),$$

помножим на $\psi_1(s)$ и интегрируем по s; в двойном интеграле изменим порядок интегрирования и воспользуемся равенством $(\psi_1, \psi_1) = 1$; тогда правая сторона обращается в нуль, и мы получим:

$$(\psi_1, \psi_2) = 0, \tag{38}$$

т. е. собственная функция $\psi_2(s)$ ортогональна собственной функции $\psi_1(s)$. Как следствие этого имеем:

$$\int K(s, t)\,\psi_2(t)\,dt = \int K_{(1)}(s, t)\,\psi_2(t)\,dt, \tag{39}$$

и, стало быть, функция $\psi_2(s)$ является также собственной функцией ядра $K(s, t)$, а μ_2 — соответствующим собственным значением:

$$\psi_2(s) = \mu_2 \int K(s, t)\,\psi_2(t)\,dt. \tag{40}$$

Так как в силу соотношения $(\psi_2, \psi_1)=0$ мы можем определить $\varkappa_2$ и как максимум интегральной формы $J_1(\varphi, \varphi)$ при добавочном условии $(\varphi, \psi_1)=0$, а в этом случае $J_1(\varphi, \varphi)=J(\varphi, \varphi)$, то функция ψ_2 решает также и задачу на максимум, поставленную в начале этого пункта.

Таким же образом можно продолжать далее, построив ядро:

$$K_{(2)}(s, t)=K_{(1)}(s, t)-\frac{\psi_2(s)\psi_2(t)}{\mu_2}=K(s, t)-\frac{\psi_1(s)\psi_1(t)}{\mu_1}-\frac{\psi_2(s)\psi_2(t)}{\mu_2}, \quad (41)$$

и искать максимум интегральной формы:

$$J_2(\varphi, \varphi)=\int\int K_{(2)}(s, t)\varphi(s)\varphi(t)\,ds\,dt \quad (42)$$

в предположении, что эта форма еще может принимать положительные значения. В качестве решения точно так же, как и выше, получаются нормированная функция $\psi_3(s)$ и максимальное значение $\varkappa_3=\frac{1}{\mu_3}$, которые удовлетворяют интегральному уравнению $\psi_3(s)=\mu_3\int K(s, t)\psi_3(t)\,dt$ и соотношениям ортогональности $(\psi_3, \psi_1)=0$, $(\psi_3, \psi_2)=0$. Мы могли бы также получить это решение, поставив задачу: сообщить первоначальной интегральной форме максимум с помощью нормированной функции, ортогональной функциям ψ_1 и ψ_2. Как и выше, имеем $\mu_2 \leqslant \mu_3$.

Этот процесс продолжаем так дальше и притом безгранично, если получающиеся при этом ядра $K_{(1)}, K_{(2)}, K_{(3)}, \ldots$ постоянно приводят к интегральным формам, которые могут принимать положительные значения. Если же в получающемся ряде ядер появляется первое ядро:

$$K_{(m)}(s, t)=K(s, t)-\frac{\psi_1(s)\psi_1(t)}{\mu_1}-\ldots-\frac{\psi_m(s)\psi_m(t)}{\mu_m}, \quad (43)$$

для которого постоянно $J_m(\varphi, \varphi)\leqslant 0$, то процесс обрывается на собственной функции $\psi_m(s)$ и ее собственном значении μ_m.

Резюмируем полученный вывод: наименьшее положительное собственное значение μ_1 ядра $K(s, t)$ есть обратное значение максимума $\varkappa_1$, принимаемого интегральной формой $J(\varphi, \varphi)$ при дополнительном условии $(\varphi, \varphi)=1$. Этот максимум достигается для первой собственной функции $\varphi=\psi_1$ ядра $K(s, t)$. Положительные собственные значения μ_h $(h=2, 3, \ldots)$, расположенные в порядке возрастания, определятся тогда последовательно (рекуррентно) как обратные значения максимумов $\varkappa_h$, принимаемых интегральной формой $J(\varphi, \varphi)$ при добавочных условиях:

$$(\varphi, \varphi)=1, \quad (\varphi, \psi_\nu)=0 \quad (\nu=1, 2, \ldots, h-1).$$

Этот максимум $\varkappa_h$ достигается для h-й собственной функции $\varphi=\psi_h$.

Ряд положительных собственных значений обрывается, как только в последовательности поставленных задач на максимум появляется одна такая, в которой форма $J(\varphi, \varphi)$ уже не может принимать положительных значений.

Подобно положительным собственным значениям и соответствующим фундаментальным функциям, можно теперь получить также ряд отрицательных собственных значений и соответствующих фундаментальных функций: μ_{-1}, $\mu_{-2}, \ldots$; $\psi_{-1}(s)$, $\psi_{-2}(s), \ldots$ в том случае, если интегральная форма $J(\varphi, \varphi)$ способна принимать отрицательные значения. Для этого достаточно рассмотреть задачи на минимум, соответствующие поставленным выше задачам на максимум. Мы придем таким образом к бесконечной или обрывающейся последовательности отрицательных, никогда не возрастающих собственных значений

$$\mu_{-1} \geqslant \mu_{-2} \geqslant \mu_{-3} \geqslant \ldots, \tag{44}$$

и соответствующих взаимно ортогональных собственных функций

$$\psi_{-1}(s),\ \psi_{-2}(s), \ldots.$$

Собственные функции $\psi_h(s)\,(h > 0)$ ортогональны собственным функциям $\psi_{-k}(s)\,(k > 0)$. Это можно заключить из обоих равенств:

$$\varkappa_k \psi_h(s) = \int K(s, t)\, \psi_h(t)\, dt,$$

$$\varkappa_{-k} \psi_{-k}(s) = \int K(s, t)\, \psi_{-k}(t)\, dt,$$

помножив первое на $\psi_{-k}(s)$, второе на $\psi_h(s)$, вычтя одно из другого и проинтегрировав, принимая во внимание, что $K(s, t) = K(t, s)$, получим:

$$(\varkappa_h - \varkappa_{-k})(\psi_h, \psi_{-k}) = 0,$$

а это равенство, в силу того, что $\varkappa_h \neq \varkappa_{-k}$, и означает требуемую ортогональность.

Продолжая этот процесс, приходим к последовательности, возможно чередующихся, положительных и отрицательных собственных значений. Расположим их в порядке возрастающей абсолютной величины и обозначим в этом порядке через $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$; тогда $|\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant |\lambda_3| \leqslant \ldots$ Через $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s) \ldots$ будем отныне обозначать соответствующие собственные функции, составляющие систему нормированных ортогональных функций.

Если ядро $K(s, t)$ обладает лишь конечным числом собственных значений $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, то оно непременно вырождается и имеет следующий вид:

$$K(s, t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi_i(s)\, \varphi_i(t)}{\lambda_i}, \tag{45}$$

так как на основании соображений стр. 114 ядро:

$$K(s, t) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi_i(s)\, \varphi_i(t)}{\lambda_i} = \overline{K}(s, t)$$

должно тождественно исчезать, ибо и максимум и минимум соответствующей интегральной формы:

$$\overline{J}(\varphi, \varphi) = \iint \overline{K}(s, t)\, \varphi(s)\, \varphi(t)\, ds\, dt,$$

оба равны нулю.

Итак, *ядро, обладающее лишь конечным числом собственных значений и собственных функций, вырождается. Наоборот, выродившееся ядро имеет лишь конечное число собственных значений и собственных функций.* В самом деле, выше мы узнали, что задача о собственных значениях такого ядра эквивалентна задаче о собственных значениях квадратичной формы, где возможно лишь конечное число собственных значений.

Согласно § 1 собственное значение λ_i называют *кратным*, и именно *r-кратным*, если число ему соответствующих линейно независимых собственных функций, — которые, кстати, можно выбрать взаимно ортогональными, — в точности равно r. Каждое собственное значение может иметь лишь конечную кратность r. Эту теорему, уже доказанную в § 1, можно доказать с важным дополнением еще следующим образом: применяем к ортогональной системе функций $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ соотношение Бесселя из гл. II, § 1 и пишем:

$$\int K(s, t)^2\, dt \geqslant \sum_{i=1}^{\infty}\left(\int K(s, t)\, \varphi_i(t)\, dt\right)^2, \tag{46}$$

или

$$\int K(s, t)^2\, dt \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(s)^2}{\lambda_i^2}. \tag{47}$$

Здесь содержится, во-первых, тот факт, что состоящий исключительно из положительных членов ряд:

$$T(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(s)^2}{\lambda_i^2} \tag{48}$$

сходится, и к тому же равномерно в силу теоремы Дини (ср. сноску на стр. 50); во-вторых, интегрируя соотношение (47) вторично по s, получим:

$$\iint K(s, t)^2\, ds\, dt \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^2}. \tag{49}$$

Итак, мы обнаружили, что *сумма обратных величин квадратов собственных значений сходится.* Следовательно, собственные значения не могут иметь точек сгущения в конечном; если их число бесконечно, то они должны безгранично возрастать по абсолютной величине, и равных между собою собственных значений может оказаться лишь конечное число.

Отсюда можно заключить, что собственные значения λ_i и фундаментальные функции φ_i, последовательно определенные выше при помощи экстремальных задач, исчерпывают всю совокупность действительных собственных значений и собственных функций. (Что комплексных собственных значений быть не может, будет показано ниже.) Если бы χ была собственная функция, линейно независимая от функций φ_i, принадлежащая, скажем, положительному собственному значению σ, то на основании приведенного выше рассуждения функция χ должна быть

ортогональна ко всем собственным функциям, принадлежащим собственным значениям $\lambda_i \neq \sigma$. Если же $\sigma = \mu_h$ — одному из определенных выше собственных значений, и если это собственное значение имеет кратность r, т. е.

$$\mu_{h-1} < \mu_h = \mu_{h+1} = \ldots = \mu_{h+r-1} < \mu_{h+r},$$

то можно было бы, так как χ, по предположению, линейно независима от собственных функций $\psi_h, \psi_{h+1}, \ldots, \psi_{h+r-1}$, заменить функцию χ комбинацией $\bar{\chi} + c_0\psi_h + \ldots + c_{r-1}\psi_{h+r-1} = \chi$, ортогональной к этим функциям, и $\bar{\chi}$ также является собственной функцией, принадлежащей собственному значению μ_h. Следовательно, функция $\bar{\chi}$, которую мы теперь снова будем обозначать просто через χ, в каждом из двух рассматриваемых случаев ортогональна ко всем собственным функциям ψ_i. Отсюда, на основании максимального свойства собственных значений, для всякого n, для которого существует μ_{n+1}, вытекает справедливость соотношения:

$$J(\chi, \chi) = \iint K(s, t)\chi(s)\chi(t)\,ds\,dt = \frac{1}{\sigma}(\chi, \chi) \leqslant \frac{1}{\mu_{n+1}}.$$

Таким образом, если положительных собственных значений μ_n бесконечно большое число, то отсюда, в силу равенства $\lim \mu_n = \infty$, вытекает, что $(\chi, \chi) = 0$, и, следовательно, функция χ должна тождественно равняться нулю. Если же положительных собственных значений конечное число, положим n, то $J(\chi, \chi)$ уже не может более принимать положительные значения при дополнительных условиях

$$(\chi, \psi_i) = 0 \quad (i = 1, \ldots, n),$$

и отсюда опять следует равенство $(\chi, \chi) = 0$, а следовательно, $\chi = 0$.

Так как этот способ рассуждения применим без изменения и к отрицательным значениям σ, то отсюда следует вывод, что всякая собственная функция ядра, ортогональная ко всем функциям ψ_i, должна тождественно исчезать, чем и доказывается наше утверждение.

К полученным результатам присоединим еще несколько замечаний, которые нам пригодятся впоследствии.

Обозначим через $\eta_1(s), \eta_2(s), \ldots$; $\zeta_1(s), \zeta_2(s), \ldots$ две последовательности непрерывных (или кусочно-непрерывных) функций, нормы которых лежат ниже заданной грани M. В таком случае для ядра

$$K_{(n)}(s, t) = K(s, t) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi_i(s)\varphi_i(t)}{\lambda_i}$$

выполняется соотношение:

$$\lim_{n\to\infty} J'_{(n)}(\eta_n, \zeta_n) = \lim_{n\to\infty} \iint K'_{(n)}(s, t)\eta_n(s)\zeta_n(t)\,ds\,dt = 0 \tag{50}$$

и выполняется притом равномерно в том смысле, что степень малости левой стороны помимо числа M зависит еще только от выбора чисел n.

Действительно, вследствие максимального свойства собственных значений и фундаментальных функций имеем:

$$|J'_{(n)}(\eta_n+\zeta_n, \eta_n+\zeta_n)| \leqslant \frac{1}{|\lambda_{n+1}|} N(\eta_n+\zeta_n) \leqslant \frac{1}{|\lambda_{n+1}|} 4M^{1)},$$

$$J'_{(n)}(\eta_n, \eta_n)| \leqslant \frac{1}{|\lambda_{n+1}|} M, \quad |J'_{(n)}(\zeta_n, \zeta_n)| \leqslant \frac{1}{|\lambda_{n+1}|} M,$$

откуда непосредственно получается наше утверждение, так как $|\lambda_n| \longrightarrow \infty$ и

$$J'_{(n)}(\eta+\zeta, \eta+\zeta) = J'_{(n)}(\eta, \eta) + 2J'_{(n)}(\eta, \zeta) + J'_{(n)}(\zeta, \zeta).$$

Далее, заметим следующее: *ядро является положительно определенным в том и только в том случае, если все его собственные значения положительны*, ибо в этом и только в этом случае интегральная форма $J(\varphi, \varphi)$ имеет при нормированном φ положительный минимум и, стало быть, вообще не может принимать отрицательных значений.

Наконец, *все собственные значения действительного симметрического ядра действительны*. Доказательство этого утверждения получится само собой в § 5, но мы проведем его и здесь другим, прямым путем.

Доказываемая теорема утверждает, что не существует такого комплексного числа $\lambda = p + iq$ с соответствующей комплексной функцией от s, $\varphi(s) = \psi(s) + i\chi(s)$ (причем ψ и χ — действительные функции, не исчезающие одновременно), чтобы удовлетворялось равенство

$$\varphi(s) = \lambda \int K(s, t)\, \varphi(t)\, dt.$$

Для сопряженных величин $\bar{\lambda}$ и $\bar{\varphi}$ выполнялось бы тогда равенство

$$\bar{\varphi}(s) = \bar{\lambda} \int K(s, t)\, \bar{\varphi}(t)\, dt.$$

Но в таком случае так же, как и выше, имеем:

$$0 = (\lambda - \bar{\lambda}) \int \varphi(s)\, \bar{\varphi}(s)\, ds = 2iq \int (\psi^2 + \chi^2)\, ds,$$

т. е. $q = 0$, а стало быть, λ действительно.

3. Максимально-минимальное свойство собственных значений. И здесь точно так же, как у квадратичных форм в главе I, можно на основании максимально-минимального свойства дать прямое определение собственного значения λ_n и соответствующей собственной функции, т. е. такое определение, которое не прибегает к предшествующим собственным значениям и фундаментальным функциям.

Рассмотрим положительные собственные значения μ_n ядра $K(s, t)$ и положим, что их, по меньшей мере, n. Поставим теперь задачу сообщить интегральной форме $J(\varphi, \varphi)$ максимум, если функция $\varphi(s)$, по-

---

[1]) Что $N(\eta_n + \zeta_n) = (\eta_n, \eta_n) + (\zeta_n, \zeta_n) + 2(\eta_n, \zeta_n) \leqslant 4M$, получается непосредственно с помощью неравенства Шварца.

мимо условия $(\varphi, \varphi)=1$, удовлетворяет еще $n-1$ условию:

$$(\varphi, v_i)=0 \qquad (i=1, 2, \ldots, n-1), \tag{51}$$

где $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ — какие бы то ни было заданные непрерывные функции. Мы оставляем без рассмотрения, действительно ли достигается для какой-либо из допустимых функций сама по себе безусловно существующая верхняя граница формы $J(\varphi, \varphi)$. Во всяком случае эта верхняя граница зависит от выбора функций $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$; мы обозначим ее поэтому через $\varkappa_n\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\}$, или короче $\varkappa_n\{v_i\}$. В частном случае $v_i=\psi_i$, в силу доказанных выше теорем, $\varkappa_n\{v_i\}=\varkappa_n$, и эта верхняя граница достигается для $\varphi=\psi_n(s)$. Так вот, мы утверждаем, что для всякой системы функций $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ имеет место соотношение:

$$\varkappa_n\{v_i\} \geqslant \varkappa_n.$$

Для доказательства построим, линейно комбинируя собственные функции $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$, функцию $\varphi(s)=c_1\psi_1(s)+\ldots+c_n\psi_n(s)$. Чтобы подчинить функцию $\varphi(s)$ условиям $(\varphi, \varphi)=1$ и (51), потребуем, чтобы было

$$\sum_{i=1}^{n} c_i^2=1, \quad \sum_{i=1}^{n} c_i(\psi_i, v_h)=0 \qquad (h=1, 2, \ldots, n-1).$$

Этой системе уравнений для n неизвестных c_i, состоящей из $n-1$ однородных линейных уравнений и одного нормирующего условия, можно всегда удовлетворить. Подставив построенную таким образом функцию $\varphi(s)$ в $J(\varphi, \varphi)$, имеем:

$$J(\varphi, \varphi)=\sum_{i,\,k=1}^{n} c_i c_k J(\psi_i, \psi_k),$$

а следовательно, принимая во внимание, что

$$J(\psi_i, \psi_i)=\frac{1}{\mu_i}, \quad J(\psi_i, \psi_k)=0 \quad \text{при } i \neq k,$$

получим:

$$J(\varphi, \varphi)=\sum_{i=1}^{n} \frac{c_i^2}{\mu_i}=\sum_{i=1}^{n} c^2\varkappa_i \geqslant \varkappa_n \sum_{i=1}^{n} c_i^2=\varkappa_n.$$

Максимум выражения $J(\varphi, \varphi)$ по меньшей мере равен $\varkappa_n$, и мы получаем следующий результат: *n-е положительное собственное значение ядра $K(s, t)$ есть наименьшее значение, которое может принять максимум или верхняя граница формы $J(\varphi, \varphi)$, если функция $\varphi(s)$ подчинена, помимо условия $(\varphi, \varphi)=1$, еще $n-1$ условиям вида* (51), *и этот максимум рассматривается в зависимости от функций v_1, $v_2, \ldots, v_{n-1}$. Наименьшее значение этого максимума получается при $v_1=\psi_1, \ldots, v_{n-1}=\psi_{n-1}$ и $\varphi=\psi_n$.*

Совершенно аналогично определяются отрицательные собственные значения и соответствующие фундаментальные функции $\psi_{-n}(n>0)$

посредством наибольшего значения минимума формы $J(\varphi, \varphi)$ при наличии соответствующих условий.

Из максимально-минимальных свойств собственных значений вытекает непосредственно следующая теорема: *если к ядру $K(s, t)$ прибавить положительно определенное ядро $K^+(s, t)$ или соответственно отрицательно определенное ядро $K^-(s, t)$, то каждое положительное и отрицательное собственное значение ядра $K + K^+$ и, соответственно, ядра $K + K^-$ не меньше или, соответственно, не больше соответствующего собственного значения ядра K*[1]. Доказательство получается с помощью того же рассуждения, что в гл. I, § 4.

§ 5. Теорема о разложении и ее применения.

1. Теорема о разложении. Если бы было известно, что ядро, соответственно преобразованию квадратичной формы к главным осям[2]), допускает разложение в ряд:

$$K(s, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(s)\,\varphi_i(t)}{\lambda_i}, \tag{52}$$

причем ряд в правой части сходится равномерно относительно каждой переменной, то тем самым для всякой функции $g(s)$ вида:

$$g(s) = \int K(s, t)\, h(t)\, dt, \tag{53}$$

где $h(t)$ — любая непрерывная или кусочно-непрерывная функция, было бы доказано разложение в ряд:

$$g(s) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i \varphi_i(s), \quad g_i = (g, \varphi_i) = (h, \varphi_i)\frac{1}{\lambda_i}.$$

То обстоятельство, что мы не можем доказать соотношение (52) в общем виде, вынуждает нас вести доказательство общности разложения для функции $g(s)$ несколько окольным путем. Пусть $h_i = (h, \varphi_i)$ — коэфициенты разложения функции h относительно ортогональной системы $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$; пусть $g(s)$ — „истокообразно представленная" по формуле (53) при помощи $h(s)$, непрерывная функция, а

$$g_i = (g, \varphi_i) = \frac{h_i}{\lambda_i}$$

— коэфициенты разложения функции g. В силу неравенства Бесселя ряд $\sum_{i=1}^{\infty} h_i^2$ сходится. Согласно равенствам (47) и (49) в § 4, 2 сумма

$$T(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(s)^2}{\lambda_i^2}$$

[1]) Ср. *Weyl H.*, Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen (mit einer Anwendung auf die Theorie der Hohlraumstrahlung), Math. Ann., Bd. 71, стр. 441—479, 1912.

[2]) См. гл. I, § 3.