

Р. КУРАНТ и Д. ГИЛЬБЕРТ

**М Е Т О Д Ы
М А Т Е М А Т И Ч Е С К О Й
Ф И З И К И**

Т О М И

**ПЕРЕВОД С НЕМЕЦКОГО
Ю. РАВИНОВИЧА и З. ЛИБИЧА**

О Г И З

**ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1945 ЛЕНИНГРАД**

ПРЕДИСЛОВИЕ

В этом томе излагаются некоторые отделы теории дифференциальных уравнений в частных производных, связанные с математической физикой. Даже с этим ограничением я отнюдь не стремился к исчерпывающей полноте. Точнее говоря, здесь рассматриваются преимущественно вопросы, в существе или форму изложения которых мне, как я полагаю, удалось внести нечто новое. При этом преследовалась цель сделать важные ветви анализа более доступными и прозрачными и тем облегчить путь для дальнейших исследований.

Если это удалось, то заслугу я разделяю с моими учениками и сотрудниками, совместно с которыми я в течение ряда лет работал над более глубоким проникновением в эту область. Роль этого сотрудничества — в том, что может здесь показаться более или менее новым — не исчерпывается ссылками на отдельные публикации.

Этот труд многим обязан и другим математикам. В первую очередь это относится к моему уважаемому учителю Д. Гильберту. Я надеюсь, что в этой книге будет ощущаться нечто от его устремлений, всегда обращенных к существу вопроса. Некоторые части книги стимулированы исследованиями Адамара по теории процессов распространения. На главу о прямых методах вариационного исчисления оказал влияние глубокий подход Неймана и Стона (J. v. Neumann и M. H. Stone) к линейным операторам в пространстве Гильberta.

Появление этого тома сильно задержалось под давлением административных мероприятий¹⁾. Когда в моем распоряжении оказалось свободное время для обработки, я полагал, что не следует еще дольше оттягивать срок выхода книги. Поэтому я отказался от устранения многих несовершенств, в частности, не дал систематического указателя литературы. Однако, я надеюсь, что избежал серьезных упущений при указании чужих заслуг.

Некоторые важные группы исследований, связанных с нашим предметом, не подверглись рассмотрению. Не считая классических теорий, назову прежде всего новейшие работы Жиро, Шаудера и Лерэ, а также Хопфа (Giraud, Schauder, Leray, E. Hopf). Кроме того, многое из того материала, который первоначально предназна-

¹⁾ Намек на вынужденную эмиграцию автора из Германии после фашистского переворота. (Прим. перев.)

чался и был подготовлен для этого тома, в частности, по вопросу о прямых методах анализа, пришлось опустить ввиду предложенного ограничения объема книги.

О деталях содержания информирует подробное оглавление. Что касается формы, то я должен сделать следующее принципиальное замечание. Классический идеал атомистического, в известной мере, изложения математики требует, чтобы материал был сгущен в форме постулатов, теорем и доказательств. При этом внутренняя связь и мотивировка теории не являются непосредственно предметом изложения. В противовес этому математическую дисциплину можно рассматривать как непрерывную ткань взаимных связей, при изложении которых метод и мотивировка выступают на передний план, а кристаллизация результатов в изолированные резко очерченные теоремы играет лишь вторичную роль. Там, где синтез обеих трактовок казался неподходящим, я предпочитал вторую точку зрения.

Нью-Рошель, Нью-Йорк
24 октября 1937 г.

P. Курант

ОТ ПЕРЕВОДЧИКОВ

При переводе II тома, так же как и первого, были тщательно проверены все выкладки и исправлены замеченные неправильности.

Для устранения недосмотров и для достижения, как нам казалось, большей ясности мы позволяли себе иногда некоторые отступления от подлинника.

Часто встречающийся термин «*Anfangswertproblem*» нами всюду переводится, в согласии с общепринятой терминологией, термином: «задача Коши». В некоторых местах даны для пояснения примечания.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава I

Введение. Основные понятия

§ 1. Представление о многообразии решений	14
1. Примеры (14). — 2. Дифференциальные уравнения для заданных семейств функций (19).	
§ 2. Системы дифференциальных уравнений	22
1. Проблема эквивалентности систем и отдельных дифференциальных уравнений (22). — 2. Системы определенные, сверхопределенные, недоопределенные (24).	
§ 3. Методы интегрирования для некоторых дифференциальных уравнений частных видов	27
1. Разделение переменных (27). — 2. Получение новых решений с помощью суперпозиции (наложения). Основное решение уравнения теплопроводности. Интеграл Пуассона (29).	
§ 4. Геометрическое истолкование дифференциального уравнения в частных производных первого порядка с двумя независимыми переменными. Полный интеграл	30
1. Геометрическое истолкование дифференциального уравнения в частных производных первого порядка (30). — 2. Полный интеграл (32). — 3. Особые интегралы (33). — 4. Примеры (34).	
§ 5. Теория линейных и квазилинейных дифференциальных уравнений первого порядка	35
1. Линейные дифференциальные уравнения (35). — 2. Квазилинейные дифференциальные уравнения (38).	
§ 6. Преобразование Лежандра	39
1. Преобразование Лежандра для функции двух переменных (39). — 2. Преобразование Лежандра для функции p переменных (41). — 3. Применение преобразования Лежандра к дифференциальному уравнению с частными производными (41).	
§ 7. Определение решений по их начальным значениям и теорема существования	44
1. Формулировка и разъяснение задачи с заданными начальными значениями (задачи Коши) (44). — 2. Приведение к системе квазилинейных дифференциальных уравнений (47). — 3. Определение производных вдоль начального многообразия (50). — 4. Доказательство существования аналитических решений у аналитических дифференциальных уравнений (52).	

Дополнения к главе I

§ 1. Дифференциальное уравнение для опорной функции минимальной поверхности	57
§ 2. Система дифференциальных уравнений первого порядка и одно дифференциальное уравнение высшего порядка	60
§ 3. Система двух дифференциальных уравнений первого порядка и одно дифференциальное уравнение второго порядка	61
§ 4. Параметрическое представление отображений, сохраняющих площадь	63

Глава II

Общая теория дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка

§ 1. Квазилинейные дифференциальные уравнения при двух независимых переменных	66
1. Характеристические кривые (66). — 2. Задача Коши (68). — 3. Примеры (70).	
§ 2. Квазилинейные дифференциальные уравнения с n независимыми переменными	73
§ 3. Общие дифференциальные уравнения первого порядка с двумя независимыми переменными	79
1. Характеристические и фокальные кривые (79). — 2. Решение задачи Коши (83). — 3. Характеристики как элементы разветвления. Дополнительные замечания. Интегральный коноид (85).	
§ 4. Связь с теорией полного интеграла	87
§ 5. Фокальные кривые и уравнение Монжа	89
§ 6. Примеры	91
1. Дифференциальное уравнение $(\operatorname{grad} u)^2 = 1$ (91). — 2. $F(u_x, u_y) = 0$ (94). — 3. Дифференциальное уравнение Клеро (96). — 4. Дифференциальное уравнение поверхностей каналов (97). — 5. Соотношение однородности (98).	
§ 7. Общее дифференциальное уравнение с n независимыми переменными	99
§ 8. Полный интеграл и теория Гамильтона-Якоби	105
1. Образование огибающей и характеристические кривые (105). — 2. Канонический вид характеристических дифференциальных уравнений (108). — 3. Теория Гамильтона-Якоби (109). — 4. Пример. Задача о двух телах (111). — 5. Пример. Геодезические линии на эллипсоиде (113).	
§ 9. Теория Гамильтона и вариационное исчисление	114
1. Дифференциальные уравнения Эйлера в канонической форме (114). — 2. Геодезическое расстояние или эйконал, его производные и дифференциальное уравнение с частными производными Гамильтона-Якоби (116). — 3. Однородные подинтегральные выражения. Геодезические линии (119). — 4. Поля экстремалей и дифференциальное уравнение Гамильтона (121). — 5. Конус лучей. Построение Гюйтенса (Ньюгхенса) (124). — 6. Инвариантный интеграл Гильберта (Hilbert) для представления эйконала (124). — 7. Теорема Гамильтона-Якоби (126).	
§ 10. Канонические преобразования и приложения	127
1. Каноническое преобразование (127). — 2. Новое доказательство теоремы Якоби (128). — 3. Вариация постоянных (каноническая теория возмущений) (129).	

Дополнения к главе II

§ 1. Новое рассмотрение характеристических многообразий . . .	130
1. Предварительные формальные замечания по поводу дифференцирования в пространстве n измерений (130). — 2. Задача Коши и характеристические многообразия (132).	
§ 2. Системы квазилинейных дифференциальных уравнений с одинаковой главной частью. Новый подход к теории характеристик	137
Литература к главам I и II	142

Глава III

Общие сведения о линейных дифференциальных уравнениях высших порядков

§ 1. Нормальные формы линейных дифференциальных выражений второго порядка с двумя независимыми переменными . . .	143
1. Эллиптические, гиперболические и параболические нормальные формы (143). — 2. Примеры (148).	
§ 2. Нормальные формы квазилинейных дифференциальных уравнений	150
1. Нормальные формы (150). — 2. Пример. Минимальные поверхности (154).	
§ 3. Классификация линейных дифференциальных уравнений второго порядка в случае многих независимых переменных . . .	156
1. Эллиптические, гиперболические и параболические дифференциальные уравнения (156) — 2. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами (158).	
§ 4. Дифференциальные уравнения высшего порядка и системы дифференциальных уравнений	159
1. Дифференциальные уравнения высшего порядка (160). — 2. Классификация систем дифференциальных уравнений (162). — 3. Замечания о нелинейных задачах (167).	
§ 5. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами	168
1. Общие соображения (168). — 2. Плоские волны. Отсутствие искажения. Дисперсия (169). — 3. Примеры: телеграфное уравнение, отсутствие искажения у кабелей (174). — 4. Цилиндрические и сферические волны (175).	
§ 6. Задачи с начальными условиями (задачи Коши); проблемы излучения	178
1. Задачи Коши в теории теплопроводности. Преобразование тета-функции (178). — 2. Задачи Коши для волнового уравнения (182). — 3. Метод интеграла Фурье для решения задачи Коши (183). — 4. Решение неоднородного уравнения методом вариации постоянных. Запаздывающие потенциалы (187). — 5. Задачи Коши для волнового уравнения в двух пространственных измерениях. Метод спуска (189). — 6. Проблема излучения (191). — 7. Процессы распространения и принцип Гюйгенса (192).	
§ 7. Типичные задачи теории дифференциальных уравнений математической физики	194
1. Предварительные замечания. Примеры типичных задач (194). — 2. Принципиальные соображения (199). — 3. Общие замечания о линейных задачах (202).	

Дополнения к главе III

Нестационарные задачи и операторное исчисление Хивисайда.

§ 1. Нестационарные задачи и решение с помощью интегральных выражений	203
1. Пример. Волновое уравнение (203). — 2. Общая постановка задачи (206). — 3. Интеграл Диомеля (207). — 4. Метод суммирования экспоненциальных решений (209).	
§ 2. Операторный метод Хивисайда	211
1. Простейшие операторы (211). — 2. Примеры (214). — 3. Примечания к теории теплопроводности (218). 4. Волновое уравнение (219). — 5. Метод обоснования операторного исчисления. Реализация дальнейших операторов (220).	
§ 3. К общей теории нестационарных задач	226
1. Преобразование Лапласа (226). — 2. Решение нестационарных задач с помощью преобразования Лапласа (229). — 3. Примеры. Уравнение теплопроводности и уравнение кабеля для конечных областей (234).	
Литература к дополнениям к главе III	247

Глава IV

Эллиптические дифференциальные уравнения
и, в частности, теория потенциала

§ 1. Основы	248
1. Дифференциальные уравнения Лапласа, Пуассона и родственные им дифференциальные уравнения (248). — 2. Потенциал распределения массы (252). — 3. Формулы Грина и их применения (256). — 4. Производные потенциала поверхностного распределения массы (263).	
§ 2. Интеграл Пуассона и его следствия	265
1. Краевая задача и функция Грина (265). — 2. Функция Грина для круга и шара. Интеграл Пуассона для шара и полупространства (268). — 3. Следствия из формулы Пуассона (273).	
§ 3. Теорема о среднем значении и ее применения	278
1. Однородное и неоднородное уравнения для среднего значения (278). — 2. Обращение теорем о среднем значении (280). — 3. Уравнение Пуассона для потенциала объемного распределения массы (287). — 4. Теоремы о среднем значении для других эллиптических дифференциальных уравнений (289).	
§ 4. Краевая задача	293
1. Предварительные замечания. Непрерывная зависимость решения от краевых значений и от области (293). — 2. Решение краевой задачи с помощью альтернирующего процесса (296). — 3. Метод интегральных уравнений для областей с достаточно гладкой границей (302). — 4. Дальнейшие замечания по поводу краевой задачи (306).	
§ 5. Краевые задачи для более общих эллиптических дифференциальных уравнений; единственность решений	308
1. Линейные дифференциальные уравнения (308). — 2. Квазилинейные дифференциальные уравнения (310). — 3. Теорема Реллиха о дифференциальном уравнении Монжа-Ампера (311).	

§ 6. Решение эллиптических дифференциальных уравнений методом интегральных уравнений	314
1. Построение решений. Основные решения (314). — 2. Краевая задача (318).	

Дополнения к главе IV

1. Обобщение краевой задачи. Теоремы Винера (321). — 2. Нелинейные дифференциальные уравнения (323).	
Литература к главе IV	327

Глава V**Гиперболические дифференциальные уравнения с двумя независимыми переменными**

§ 1. Характеристики квазилинейных дифференциальных уравнений	329
1. Определение характеристик (329). — 2. Характеристики на интегральных поверхностях (334). — 3. Характеристики как линии разрыва. Фронт волны (335).	
§ 2. Характеристики дифференциальных уравнений общего вида.	338
1. Общее дифференциальное уравнение второго порядка. (338). — 2. Дифференциальные уравнения высших порядков (341). — 3. Системы дифференциальных уравнений (343). — 4. Инвариантность характеристик относительно любого точечного преобразования (344). — 5. Примеры из гидродинамики (345).	
§ 3. Единственность и область зависимости	347
1. Основные понятия, связанные с волновыми процессами (347). — 2. Доказательства единственности (348).	
§ 4. Метод Римана	352
1. Формула Римана (352). — 2. Дополнительные замечания. Характеристическая задача Коши (356). — 3. Пример. Телеграфное уравнение (358).	
§ 5. Решение дифференциального уравнения $u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$ методом итераций Пикара	359
1. Предварительные замечания (359). — 2. Решение задачи Коши (361). — 3. Единственность решения задачи Коши (363). — 4. Непрерывная и дифференцируемая зависимость от параметров (364). — 5. Область зависимости решения (365).	
§ 6. Обобщения и применение к системам первого порядка	366
1. Системы дифференциальных уравнений второго порядка с одинаковой линейной главной частью (366). — 2. Канонические гиперболические системы первого порядка (367).	
§ 7. Общее квазилинейное уравнение второго порядка	368
1. Полная система характеристических дифференциальных уравнений (368). — 2. Решение задачи Коши (374).	
§ 8. Общее уравнение $F(x, y, u, p, q, r, s, t) = 0$	376
1. Квазилинейные системы с одинаковой главной частью (376). — 2. Решение задачи Коши в общем случае (377).	

Дополнения к главе V

§ 1. Введение комплексных величин. Переход от гиперболического случая к эллиптическому с помощью комплексных переменных	381
--	------------

§ 2. Аналитический характер решений в эллиптическом случае	282
1. Предварительное замечание из области теории функций (282).—2. Аналитический характер решений уравнения $\Delta u = f(x, y, u, p, q)$ (283).—3. Замечание относительно общего случая дифференциального уравнения $F(x, y, u, p, q, r, s, t) = 0$ (387).	
§ 3. Дальнейшие замечания к теории характеристик в случае двух независимых переменных	387
§ 4. Особая роль уравнения Монжа-Ампера	389
 Г л а в а VI	
Гиперболические дифференциальные уравнения со многими независимыми переменными	
§ 1. Характеристическое уравнение	392
1. Квазидипейные дифференциальные уравнения второго порядка (393).—2. Линейные дифференциальные уравнения. Характеристические лучи (397).	
§ 2. Характеристические многообразия как поверхности разрывов. Фронт волны	403
1. Разрывы второго порядка (403).—2. Фронт волны линейного дифференциального уравнения как геометрическое место разрывов высших порядков (407).—3. Поведение дифференциального уравнения на характеристическом многообразии. Распространение разрывов вдоль лучей (410).—4. Физическая интерпретация. Граница тени (413).—5. Коноид характеристических лучей. Связь с метрикой риманова пространства (413).—6. Построение фронта волны по способу Гюйгенса. Конус лучей и направление распространения волны (416).—7. Конус лучей и конус нормалей (417).—8. Пример. Волновое уравнение Пуассона в трехмерном пространстве (419).	
§ 3. Характеристики дифференциальных уравнений высших порядков	421
1. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков (421).—2. Системы дифференциальных уравнений. Уравнения гидродинамики (424). 3. Дальнейшие примеры. Кристаллооптика (427).	
§ 4. Теоремы единственности и область зависимости для задач Коши	429
1. Волновое уравнение (429).—2. Дифференциальное уравнение $u_{tt} - \Delta u + \frac{\lambda}{t} u_t = 0$ (уравнение Дарбу) (432).—3. Уравнения Максвелла для эфира (433).—4. Теорема единственности и область зависимости для дифференциальных уравнений кристаллооптики (434).—5. Замечания об области зависимости и области влияния. Необходимость условия выпуклости области зависимости (436).	
§ 5. Гиперболические линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами	437
1. Построение решения (440).—2. Метод спуска (444).—3. Исследование решения. Принцип Гюйгенса (446).—4. Проверка решения (452).—5. Интегрирование неоднородного уравнения (455).—6. Проблема излучения (457).—7. Задача Коши для уравнения $\Delta u + c^2 u = u_{tt}$ и телеграфного уравнения (463).	

6 . Метод средних значений. Волновое уравнение и уравнение Дарбу	465
1. Дифференциальное уравнение Дарбу для средних значений (466). — 2. Связь с волновым уравнением и решение волнового уравнения (467). — 3. Задача излучения для волнового уравнения (470). — 4. Теорема Фридрихса (471).	
§ 7. Ультрагиперболические дифференциальные уравнения и общие линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами	473
1. Общая теорема о среднем значении Асджейрсона (473). — 2. Другое доказательство теоремы о среднем значении (477). — 3. Применение теоремы о среднем значении к волновому уравнению (477). — 4. Решения характеристической задачи Коши для волнового уравнения (478). — 5. Другие применения. Теорема о среднем значении для софокусных эллипсоидов (480).	
§ 8. О негиперболических задачах Коши	482
1. Нахождение функции по ее средним значениям на сфере (482). — 2. Применение к задаче Коши (485).	
§ 9. Решение задачи Коши методом Адамара	489
1. Предварительные замечания. Основное решение. Общий метод (490). — 2. Общее волновое уравнение для случая, когда число измерений пространства $m = 2$ (497). — 3. Общее волновое уравнение для случая $m = 3$ (502).	
§ 10. Некоторые замечания о понятии волны и проблеме излучения	509
1. Общие замечания. Проходящие волны, распространяющиеся без искажений (509). — 2. Сферические волны (512). 3. Излучение и принцип Гюйгенса (513).	

Дополнения к главе VI

§ 1. Дифференциальные уравнения кристаллооптики	516
1. Поверхности нормалей и лучей кристаллооптики (516). — 2. Форма поверхности нормалей (517). — 3. Поверхность лучей (520). — 4. Приведение системы дифференциальных уравнений к одному дифференциальному уравнению шестого или четвертого порядка (522). — 5. Явный вид решения, получающийся методом Фурье (524). — 6. Исследование разрешающего ядра $K(x, t)$ (525). — 7. Приложение к оптике. Коническая рефракция (527).	
§ 2. Области зависимости для задач высших порядков	528
§ 3. Обобщенный принцип Гюйгенса и продолжаемые начальные условия	531
§ 4. Замена дифференциальных уравнений интегральными соотношениями. Обобщение понятия характеристик	532

Глава VII

Применение вариационных методов к решению краевых задач и задач о собственных значениях

§ 1. Введение	537
1. Принцип Дирихле для круга (537). — 2. Общая постановка задачи (540). — 3. Линейные функциональные пространства с квадратичной метрикой. Определения (542). — 4. Краевые условия (546).	

§ 2. Первая краевая задача	547
1. Постановка задачи (547).—2. Формула Грина. Основное неравенство между D и H . Единственность (548).—3. Минимизирующие последовательности и решение краевой задачи (550).	
§ 3. Задача о собственных значениях с нулевыми краевыми значениями	552
1. Интегральные неравенства (552).—2. Первая задача о собственных значениях (555).—3. Собственные значения и собственные функции высших порядков. Полнота (556).	
4. Характер приближения к краевым значениям в случае двух независимых переменных	559
§ 5. Построение предельных функций и свойства сходимости интегралов E, D и H	562
1. Построение предельных функций (562).—2. Свойства сходимости интегралов D и H (570).	
§ 6. Краевые условия второго и третьего рода. Краевая задача.	573
1. Формула Грина и краевые условия (573).—2. Формулировка краевой задачи и вариационной задачи. Краевая задача III (575).—3. Ограничение класса допустимых областей (576).—4. Эквивалентность вариационной задачи и краевой задачи. Единственность (577).—5. Решение вариационной задачи и краевой задачи (578).	
§ 7. Задача о собственных значениях для краевых условий второго и третьего рода	578
§ 8. Исследование областей, рассматриваемых при краевых условиях второго и третьего рода	581
1. Области типа \mathfrak{N} (581).—2. Необходимость ограничительных условий для рассматриваемых областей (586).	
§ 9. Дополнения и задачи	588
1. Функция Грина для Δu (588).—2. Особенность типа биполя (590).—3. Поведение на границе решения уравнения $\Delta u = 0$ с двумя независимыми переменными при краевом условии второго рода (591).—4. Непрерывная зависимость от области (591).—5. Распространение теории на неограниченные области G (592).—6. Применение вариационного метода к дифференциальным уравнениям четвертого порядка. Поперечные деформации и колебания пластиинок (593).—7. Первая краевая задача и соответствующая задача о собственных значениях в плоской теории упругости (595).—8. Другой метод построения предельной функции (598).	
§ 10. Задача Плато.	600
1. Постановка задачи и общая схема решения (601).—2. Доказательство вариационных условий (604).—3. Существование решения вариационной задачи (606).	
Дополнительная литература	610
Примечания переводчиков	611
Предметный и именной указатели	613