Этот том, в основном независимый от предыдущего, содержит систематическую теорию дифференциальных уравнений с частными производными, рассматриваемую с точки зрения математической физики. В последней, седьмой, главе приводятся на основе прямых методов вариационного исчисления доказательства существования решений для краевых задач и задач о собственных значениях эллиптических дифференциальных уравнений—в том объеме, в каком эти задачи встречались в предшествующем изложении.

## ГЛАВА I

## ВВЕДЕНИЕ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Начнем с предварительного обзора основных понятий и постановки проблем.

Основную задачу теории дифференциальных уравнений с частными производными можно формулировать следующим образом. Дано соотношение

$$F(x, y, \ldots; u; u_x, u_y, \ldots; u_{xx}, u_{xy}, \ldots) = 0, \tag{1}$$

где $F$ есть функция переменных $x, y, \ldots; u; u_x, u_y, \ldots; u_{xx}, u_{xy}, \ldots$ Требуется определить такую функцию $u(x, y, \ldots)$ независимых переменных $x, y, \ldots$, чтобы выражение $F$ исчезало тождественно относительно этих переменных, если подставить в него вместо $u$ эту функцию $u(x, y, \ldots)$ и далее соответственно:

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad u_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \ldots,$$

$$u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}, \ldots,$$

$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$

Такая функция $u(x, y, \ldots)$ называется *решением*, иногда также «*интегралом*» *дифференциального уравнения с частными производными* (1). Задача состоит не только в том, чтобы находить отдельные («частные») решения, но и в том, чтобы получить совокупность решений; ставится также задача и о выделении индивидуальных решений с помощью дополнительных условий, присоединяемых к дифференциальному уравнению (1).

Дифференциальное уравнение (1) с частными производными обращается в обыкновенное дифференциальное уравнение, если число независимых переменных равно единице. Порядок наивысшей производной, встречающейся в дифференциальном уравнении, называется *порядком* дифференциального уравнения.

Мы часто будем ограничивать независимые переменные $x, y, \ldots$ определенной областью пространства $x, y, \ldots$; также и функцию $F$ мы будем рассматривать в ограниченной области пространства $x, y, \ldots, u, u_x, u_y, \ldots$; это последнее означает, что в положенной в основу области изменения переменных $x, y, \ldots$ допускаются лишь такие функции $u(x, y, \ldots)$, для которых выполняются соответствующие ограничения, наложенные на аргументы функции $F$. *Мы делаем раз навсегда оговорку, что все наши рассуждения всегда относятся лишь к некоторым областям, которые надо выбирать, применительно к обстоятельствам, достаточно тесными. Точно так же мы раз навсегда предполагаем, что рассматриваемые функции $F, u, \ldots$ непрерывны и имеют непрерывные производные всех встречающихся порядков, если только не оговорено определенно что-либо другое* [1]).

Если функция $F$ линейна относительно величин $u, u_x, u_y, \ldots, u_{xx}, u_{xy}, \ldots$ с коэффициентами, зависящими только от независимых переменных $x, y, \ldots$, то дифференциальное уравнение называется *линейным*. Если выражение $F$ линейно хотя бы относительно производных высшего, скажем, $n$-го, встречающегося порядка с коэффициентами, которые могут зависеть не только от $x, y, \ldots$, но еще и от $u$ и от производных функции $u$ до $(n-1)$-го порядка, то дифференциальное уравнение называется *квазилинейным*.

Мы будем заниматься большей частью линейными или, самое большее, квазилинейными дифференциальными уравнениями; более общие дифференциальные уравнения мы часто будем приводить к этим типам.

Для многих наших исследований достаточно будет рассматривать лишь случай двух независимых переменных. Тогда можно решение $u(x, y)$ дифференциального уравнения (1) истолковать геометрически как поверхность, «*интегральную поверхность*» в пространстве $x, y, u$.

## § 1. Представление о многообразии решений

**1. Примеры.** У обыкновенного дифференциального уравнения порядка $n$ совокупность решений (за исключением, быть может «особых» решений) дается функцией независимой переменной $x$, зависящей, кроме того, еще от $n$ произвольных постоянных; обратно, для всякого семейства функций, зависящего от $n$ параметров

$$u = \varphi(x;\ c_1, \ldots, c_n),$$

[1]) Это относится, в частности, и к системе конечных уравнений. В этом случае рассуждения относятся к окрестности такой точки, в которой, например, соответствующий функциональный определитель не исчезает, без того, чтобы это особо подчеркивалось каждый раз.

можно получить дифференциальное уравнение порядка $n$, для которого $u=\varphi$ является решением. Для этого надо исключить параметры $c_1, \ldots, c_n$ из этого уравнения и из получающихся из него дифференцированием $n$ уравнений:

$$u' = \varphi'(x;\ c_1, \ldots, c_n),$$
$$u^{(n)} = \varphi^{(n)}(x;\ c_1, \ldots, c_n).$$

У уравнений с частными производными дело обстоит сложнее. И здесь можно ставить вопрос о совокупности решений или *«общем решении»*, т. е. таком решении, из которого можно получить все индивидуальные решения (опять за исключением, быть может, некоторых «особых» решений) посредством специализации некоторых содержащихся в нем произвольных элементов. Оказывается, что такие произвольные элементы у дифференциальных уравнений с частными производными появляются уже не в виде произвольных постоянных, но в виде произвольных функций, в количестве, вообще говоря, равном порядку дифференциального уравнения. Эти произвольные функции зависят от числа независимых переменных, на единицу меньшего, чем решение $u$. Уточнение этих обстоятельств получится из теоремы существования § 7. Здесь мы ограничимся разъяснением вопроса на нескольких примерах.

1. Дифференциальное уравнение

$$u_y = 0$$

для функции $u(x,\ y)$ выражает тот факт, что $u$ не зависит от $y$; следовательно,

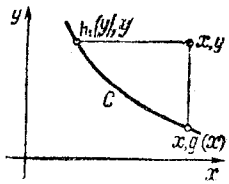
$$u = w(x),$$

где $w(x)$ обозначает произвольную функцию от $x$ [1]).

2. $$u_{xy} = 0.$$

«Общее решение» получается немедленно в виде

$$u = w(x) + v(y).$$



Черт. 1.

3. В качестве решения неоднородного дифференциального уравнения

$$u_{xy} = f(x,\ y)$$

получаем функцию

$$u(x,\ y) = \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(\xi,\ \eta)\, d\xi\, d\eta + w(x) + v(y)$$

с произвольными функциями $w$ и $v$ и произвольными значениями $x_0, y_0$; общее можно писать интеграл по области, выбирая в качестве области интегрирования ▢ треугольник, изображенный на черт. 1, криволинейную границу которого составляет кривая $C$: $y = g(x)$ или

[1]) Буквами $w$ и $v$ мы и в дальнейшем будем обозначать произвольные функции.

$x = h(y)$, пересекающая всякую прямую, параллельную оси $x$ или $y$, не более, чем в одной точке. В таком случае

$$u(x, y) = \iint\limits_{\square} f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + w(x) + v(y), \tag{2}$$

$$u_x = \int\limits_{g(x)}^{y} f(x, \eta)\, d\eta + w'(x), \qquad u_y = \int\limits_{h(y)}^{x} f(\xi, y)\, d\xi + v'(y).$$

Частное решение дифференциального уравнения, получающееся, если положить $w(x) = v(y) = 0$, обладает, следовательно, тем свойством, что для точки $x$, $y$ кривой $C$

$$u = u_x = u_y = 0.$$

4. Дифференциальное уравнение с частными производными

$$u_x = u_y$$

приводится преобразованием переменных

$$x + y = \xi, \qquad x - y = \eta, \qquad u(x, y) = \omega(\xi, \eta)$$

к виду

$$2\omega_\eta = 0,$$

откуда получается «общее решение» $\omega = w(\xi)$, т. е.

$$u = w(x + y).$$

Аналогично находим совокупность решений дифференциального уравнения

$$\alpha u_x + \beta u_y = 0,$$

при постоянных $\alpha$ и $\beta$, в виде

$$u = w(\beta x - \alpha y).$$

5. Пусть $g(x, y)$ — заданная функция от $x$, $y$. В таком случае дифференциальное уравнение с частными производными

$$u_x g_y - u_y g_x = 0,$$

т. е. исчезание функционального определителя $\frac{\partial(u, g)}{\partial(x, y)}$ функций $u$, $g$ по $x$, $y$, означает по элементарным теоремам дифференциального исчисления, что $u$ зависит от $g$, т. е. что

$$u = w(g(x, y)), \tag{3}$$

где $w$ — произвольная функция величины $g$. Так как и, обратно, всякая такая функция удовлетворяет дифференциальному уравнению $u_x g_y - u_y g_x = 0$, то равенство (3) содержит всю совокупность решений посредством произвольной функции $w$.

Отметим, что тот же результат справедлив для более общего — именно, квазилинейного — дифференциального уравнения

$$u_x g_y(x, y, u) - u_y g_x(x, y, u) = 0,$$

где $g$ зависит теперь явно не только от $x$, $y$, но еще и от неизвестной функции $u(x, y)$. Для функционального определителя функций $u(x, y)$ и $\gamma(x, y) = g(x, y, u(x, y))$ выполняется соотношение

$$u_x\gamma_y - u_y\gamma_x = u_x g_y - u_y g_x + u_x g_u u_y - u_y g_u u_x = 0.$$

Следовательно, и на этот раз общее решение дается равенством

$$u(x, y) = W(g(x, y, u)), \tag{4}$$

которое мы должны рассматривать как неявное определение функции $u$ с помощью произвольной функции $W$.

Например, решение $u(x, y)$ дифференциального уравнения

$$\alpha(u)\, u_x - \beta(u)\, u_y = 0$$

получается в неявной форме $\alpha(u)\, y + \beta(u)\, x = w(u)$ или

$$u = W(\alpha(u)\, y + \beta(u)\, x), \tag{5}$$

так что $u$ зависит от произвольной функции $W$ довольно сложным образом. (Эти рассмотрения будут использованы нами в § 7.)

6. Дифференциальное уравнение с частными производными второго порядка

$$u_{xx} - u_{yy} = 0$$

приводится преобразованием $x + y = \xi$, $x - y = \eta$, $u(x, y) = \omega(\xi, \eta)$ к виду

$$4\omega_{\xi\eta} = 0.$$

Таким образом, его общее решение согласно примеру 2 есть

$$u(x, y) = w(x + y) + v(x - y).$$

7. Совершенно аналогично получаем для общего решения дифференциального уравнения

$$u_{xx} - \frac{1}{t^2} u_{yy} = 0,$$

при произвольном значении параметра $t$, выражение

$$u = w(x + ty) + v(x - ty).$$

В частности, является решением функция

$$u = (x + ty)^n$$

или функция

$$u = (x - ty)^n,$$

т. е. выражение

$$t^2 u_{xx} - u_{yy}$$

должно исчезать для всех значений $x$ и $y$ при действительном $t$. Но по известной теореме алгебры целая рациональная функция от $t$, исчезающая при всех действительных значениях $t$, исчезает и при всех

комплексных значениях $t$. Поэтому, если положить $t = i = \sqrt{-1}$, то дифференциальное уравнение переходит в *уравнение Лапласа*

8. $$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

для которого получаем решения

$$(x + iy)^n = P_n(x, y) + iQ_n(x, y),$$
$$(x - iy)^n = P_n(x, y) - iQ_n(x, y),$$

где $P_n$ и $Q_n$ — полиномы с действительными коэффициентами, которые сами должны удовлетворять уравнению Лапласа [1]). Таким образом, при $n = 0, 1, 2, \ldots$ получаем бесконечное множество решений уравнения Лапласа, но в отличие от предыдущих примеров пока только счетное множество.

Переходя к полярным координатам $r$, $\vartheta$ при помощи формул $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$, имеем:

$$P_n(x, y) = r^n \cos n\vartheta, \qquad Q_n(x, y) = r^n \sin n\vartheta. \tag{6}$$

Функции

$$P_\alpha(x, y) = r^\alpha \cos\alpha\vartheta, \qquad Q_\alpha(x, y) = r^\alpha \sin\alpha\vartheta$$

тоже, оказывается, удовлетворяют уравнению Лапласа при любом действительном значении $\alpha$ во всякой области плоскости $x$, $y$, не содержащей начала $x = y = 0$; это можно проверить подстановкой после преобразования $\Delta u$ к полярным координатам [ср. т. I, стр. 217, формула (65)]

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r^2} u_{\vartheta\vartheta}.$$

Если выбрать две функции $w(\alpha)$ и $v(\alpha)$ такого рода, чтобы производные интегралов

$$\int_a^b w(\alpha) r^\alpha \cos\alpha\vartheta \, d\alpha \quad \text{и} \quad \int_a^b v(\alpha) r^\alpha \sin\alpha\vartheta \, d\alpha$$

до второго порядка можно было получить дифференцированием под знаком интеграла, то выражение

$$\int_a^b r^\alpha [w(\alpha)\cos\alpha\vartheta + v(\alpha)\sin\alpha\vartheta] \, d\alpha$$

даст многообразие решений, зависящее от двух произвольных функций $w$ и $v$.

9. В качестве примера дифференциального уравнения более высокого порядка рассмотрим уравнение

$$u_{xxyy} = 0,$$

для которого находим общее решение

$$u(x, y) = w(y) + xw_1(y) + v(x) + yv_1(x).$$

---

[1]) Эти решения представляют элементарный пример того общего факта, что как действительная, так и мнимая часть всякой аналитической функции комплексного переменного $x + iy$ удовлетворяет уравнению Лапласа.

10. Если число независимых переменных больше двух (например, три), то естественно ожидать появления в общем решении произвольных функций, зависящих от двух или соответственно большего числа независимых переменных. Например, дифференциальное уравнение с частными производными для функции $u(x, y, z)$

$$u_z = 0$$

имеет общее решение

$$u = w(x, y).$$

**2. Дифференциальные уравнения для заданных семейств функций.** Зададимся вопросом, нельзя ли, как в п. 1 для обыкновенных дифференциальных уравнений, построить также дифференциальные уравнения с частными производными, которым удовлетворяли бы все функции заданного многообразия, зависящего от символов произвольных функций.

Возьмем, например, семейство функций, зависящее от произвольной функции $w$, в следующем виде:

$$u = f(x, y, w(g(x, y))), \tag{7}$$

где $f$ — заданная функция аргументов $x$, $y$, $w$, а $g(x, y)$ — заданная функция от $x$ и $y$, например, $g = xy$. Для того, чтобы получить дифференциальное уравнение этого семейства функций, дифференцированием равенства (7) по $x$ и $y$ приходим к двум уравнениям:

$$u_x = f_x + f_w w' g_x,$$
$$u_y = f_y + f_w w' g_y.$$

Исключая $w'$ из этих уравнений, получим искомое дифференциальное уравнение

$$(u_x - f_x) g_y - (u_y - f_y) g_x = 0, \tag{8}$$

причем произвольную функцию $w$, которая содержится еще неявно в $f_x$ и $f_y$, надо представить себе выраженной из уравнения (7) через $x$, $y$, $u$.

Полученное дифференциальное уравнение принадлежит еще специальному, именно — квазилинейному, типу, так как оно линейно относительно производных. Следовательно, данное представление нашего семейства функций недостаточно общо, чтобы оно могло приводить ко всякому дифференциальному уравнению с частными производными первого порядка.

Если будем, напротив, исходить из семейства функций, зависящего не от произвольной функции, а от двух параметров $\alpha$, $\beta$:

$$u = f(x, y; \alpha, \beta),$$

и составим производные

$$u_x = f_x(x, y; \alpha, \beta),$$
$$u_y = f_y(x, y; \alpha, \beta),$$

то имеем 3 уравнения, из которых, вообще говоря, можно исключить $\alpha$ и $\beta$ (во всяком случае, если $f_{x\alpha}f_{y\beta}-f_{x\beta}f_{y\alpha}\neq 0$). Получится дифференциальное уравнение с частными производными $f(x, y, u, u_x, u_y)=0$, которое, вообще говоря, уже не будет линейным относительно $u_x$ и $u_y$.

Парадокс, заключающийся в том, что более узкое многообразие решений ведет к более общему типу дифференциальных уравнений, получит простое разрешение в § 4.

Примеры: 1. Для семейства функций

$$u=w(xy)$$

исключением $w'$ из уравнений

$$u_x=yw', \quad u_y=xw'$$

получается дифференциальное уравнение

$$xu_x-yu_y=0.$$

Если переменные $x$, $y$, $u$ истолковывать как прямоугольные координаты, то каждая функция этого семейства представляет геометрически поверхность, пересекающуюся с горизонтальными плоскостями по равнобочным гиперболам.

2. Совокупность *поверхностей вращения*, которые получаются при вращении плоской кривой вокруг оси $u$, выражается семейством функций

$$u=w(x^2+y^2).$$

Соответствующее дифференциальное уравнение —

$$yu_x-xu_y=0.$$

3. Совокупность коноидов, образующими которых являются горизонтальные прямые, проходящие через ось $u$, представлена семейством функций

$$u=w\left(\frac{x}{y}\right).$$

Соответствующее дифференциальное уравнение

$$xu_x+yu_y=0.$$

4. Дифференциальное уравнение всех *развертывающихся поверхностей* получается из определения этих поверхностей как *огибающих семейства плоскостей, зависящих от одного параметра.* Их совокупность (с изъятием цилиндров, перпендикулярных плоскости $x$, $y$) представлена семейством функций

$$u=\alpha x+w(\alpha)y+v(\alpha), \tag{9}$$

причем $\alpha$ надо выразить как функцию $x$ и $y$ из уравнения

$$0=x+w'(\alpha)y+v'(\alpha). \tag{10}$$

Функция $u$ зависит здесь от двух произвольных функций и притом довольно сложным образом. Из уравнения (9) находим первые производные $u_x$, $u_y$:

$$u_x = \alpha,$$

$$u_y = w(\alpha),$$

следовательно,

$$u_y = w(u_x). \tag{11}$$

Для исключения $w$ дифференцируем еще раз:

$$u_{yy} = w' u_{xy}, \quad u_{xy} = w' u_{xx},$$

а отсюда получаем

$$u_{xx} u_{yy} - u_{xy}^2 = 0 \tag{12}$$

— дифференциальное уравнение всех развертывающихся поверхностей за исключением цилиндров, перпендикулярных к плоскости $x$, $y$.

5. Во всех этих примерах можно, обратно, показать, что все решения соответствующих дифференциальных уравнений принадлежат заданным семействам.

6. Совокупность всех *однородных функций* $u(x_1, \ldots, x_n)$ степени $\alpha$ от $n$ независимых переменных $x_1, \ldots, x_n$ характеризуется условием

$$u(tx_1, \ldots, tx_n) = t^\alpha u(x_1, \ldots, x_n), \tag{13}$$

которое должно выполняться тождественно относительно $t$. Полагая $t = \frac{1}{x_n}$, имеем:

$$u(x_1, \ldots, x_n) = x_n^\alpha u\left(\frac{x_1}{x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}, 1\right),$$

откуда для $u$ получается выражение

$$u = x_n^\alpha w\left(\frac{x_1}{x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}\right). \tag{14}$$

Так как, обратно, всякая функция такого вида, образованная с помощью произвольной функции $w$ от $n-1$ аргументов, удовлетворяет написанному выше условию однородности, то в форме (14) содержится все семейство однородных функций степени $\alpha$.

Чтобы для этого семейства функций получить дифференциальное уравнение с частными производными, дифференцируем (14) по переменным $x_1, \ldots, x_n$ и исключаем функцию $w$. Таким образом получается *условие однородности Эйлера*

$$x_1 u_{x_1} + \ldots + x_n u_{x_n} = \alpha u. \tag{15}$$

Это соотношение можно впрочем получить и непосредственно, дифференцируя (13) по $t$ и полагая затем $t = 1$.

Обратно, из того факта, что функция $u(x_1, \ldots, x_n)$ удовлетворяет условию однородности (15), вытекает:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t^{\alpha+1}} u(tx_1, \ldots, tx_n)\right) =$$
$$= \frac{1}{t^{\alpha+1}}\left\{\sum_{i=1}^{n} tx_i u_{x_i}(tx_1, \ldots, tx_n) - \alpha u(tx_1, \ldots, tx_n)\right\} = 0;$$

следовательно, выражение $\frac{1}{t^{\alpha}} u(tx_1, \ldots, tx_n)$ не зависит от $t$, а потому должно быть, в частности, равно $u(x_1, \ldots, x_n)$. Но это означает согласно определению (13), что функция $u$ однородна.

## § 2. Системы дифференциальных уравнений

**1. Проблема эквивалентности систем и отдельных дифференциальных уравнений.** В то время как у обыкновенных дифференциальных уравнений существует эквивалентность между теорией одного дифференциального уравнения и теорией системы уравнений, у дифференциальных уравнений с частными производными дело обстоит иначе.

Обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$F(x, y, y', y'') = 0 \tag{1}$$

может быть приведено подстановкой $y' = z$ к системе двух дифференциальных уравнений первого порядка для двух функций $y(x)$ и $z(x)$:

$$\left.\begin{aligned} F(x, y, z, z') &= 0, \\ y' - z &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Всякое решение дифференциального уравнения (1) приводит к решению системы (2) и обратно. Справедлива и обратная теорема: система двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$f(x, y, z, y', z') = 0, \quad g(x, y, z, y', z') = 0 \tag{3}$$

для двух функций $y(x)$ и $z(x)$ может быть приведена к одному дифференциальному уравнению второго порядка для одной из функций и к процессам исключения, если предположить, что в рассматриваемой области значений аргументов $f_z g_{z'} - f_{z'} g_z \neq 0$.

В самом деле, при этом предположении уравнения (3) можно разрешить относительно $z$ и $z'$:

$$z' = \varphi(x, y, y'), \quad z = \psi(x, y, y'). \tag{3a}$$

Дифференцированием второго уравнения и исключением получаем:

$$\varphi(x, y, y') - \psi_x - \psi_y y' - \psi_{y'} y'' = 0 \tag{3b}$$

— одно дифференциальное уравнение второго порядка для одной функции $y(x)$. Подставляя какое-нибудь решение этого дифферен-