Обратно, из того факта, что функция $u(x_1, \ldots, x_n)$ удовлетворяет условию однородности (15), вытекает:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t^{\alpha+1}} u(tx_1, \ldots, tx_n)\right) =$$
$$= \frac{1}{t^{\alpha+1}}\left\{\sum_{i=1}^{n} tx_i u_{x_i}(tx_1, \ldots, tx_n) - \alpha u(tx_1, \ldots, tx_n)\right\} = 0;$$

следовательно, выражение $\frac{1}{t^{\alpha}} u(tx_1, \ldots, tx_n)$ не зависит от t, а потому должно быть, в частности, равно $u(x_1, \ldots, x_n)$. Но это означает согласно определению (13), что функция u однородна.

§ 2. Системы дифференциальных уравнений

1. Проблема эквивалентности систем и отдельных дифференциальных уравнений. В то время как у обыкновенных дифференциальных уравнений существует эквивалентность между теорией одного дифференциального уравнения и теорией системы уравнений, у дифференциальных уравнений с частными производными дело обстоит иначе.

Обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$F(x, y, y', y'') = 0 \tag{1}$$

может быть приведено подстановкой $y' = z$ к системе двух дифференциальных уравнений первого порядка для двух функций $y(x)$ и $z(x)$:

$$\left.\begin{aligned} F(x, y, z, z') &= 0, \\ y' - z &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Всякое решение дифференциального уравнения (1) приводит к решению системы (2) и обратно. Справедлива и обратная теорема: система двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$f(x, y, z, y', z') = 0, \quad g(x, y, z, y', z') = 0 \tag{3}$$

для двух функций $y(x)$ и $z(x)$ может быть приведена к одному дифференциальному уравнению второго порядка для одной из функций и к процессам исключения, если предположить, что в рассматриваемой области значений аргументов $f_z g_{z'} - f_{z'} g_z \neq 0$.

В самом деле, при этом предположении уравнения (3) можно разрешить относительно z и z':

$$z' = \varphi(x, y, y'), \quad z = \psi(x, y, y'). \tag{3a}$$

Дифференцированием второго уравнения и исключением получаем:

$$\varphi(x, y, y') - \psi_x - \psi_y y' - \psi_{y'} y'' = 0 \tag{3b}$$

— одно дифференциальное уравнение второго порядка для одной функции $y(x)$. Подставляя какое-нибудь решение этого дифферен-

циального уравнения (3b) в равенство $z=\psi(x, y, y')$, получим соответствующую функцию z, которая совместно с y решает первоначальную систему (3) или (3a).

Следовательно, при условии $f_z g_{z'} - f_{z'} g_z \neq 0$ наша система (3) действительно эквивалентна одному единственному дифференциальному уравнению.

Рассмотрим теперь дифференциальное уравнение с частными производными второго порядка для функции $u(x, y)$:

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy})=0. \tag{4}$$

При помощи подстановки $u_x=p$, $u_y=q$ мы приходим к системе трех дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка для трех функций u, p, q:

$$\left.\begin{aligned} F(x, y, u, p, q, p_x, p_y, q_y)&=0, \\ u_x-p&=0, \\ u_y-q&=0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Всякое решение u, p, q этой системы дает функцией u решение дифференциального уравнения (4) и, обратно, всякое решение u уравнения (4) приводит к системе решений u, u_x, u_y системы дифференциальных уравнений (5).

Итак, *дифференциальное уравнение с частными производными второго порядка эквивалентно системе трех дифференциальных уравнений первого порядка,* правда, весьма специального вида. Однако, *обратное предложение не имеет места.* Не всякая система двух дифференциальных уравнений первого порядка — а, следовательно, подавно не всякая система трех дифференциальных уравнений первого порядка — эквивалентна одному дифференциальному уравнению второго порядка [1]).

Для рассмотрения этих обстоятельств исследуем, возможно ли, по аналогии с обыкновенными дифференциальными уравнениями, из двух дифференциальных уравнений с частными производными

$$\left.\begin{aligned} f(x, y, u, v, u_x, v_x, u_y, v_y)&=0, \\ g(x, y, u, v, u_x, v_x, u_y, v_y)&=0 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

для двух неизвестных функций $u(x, y)$, $v(x, y)$, с помощью однократного дифференцирования и исключения, получить одно эквивалентное дифференциальное уравнение с частными производными второго порядка для одной функции u. Дифференцируя по x и y, получаем еще четыре уравнения. Для того, чтобы вместо системы (6) получить одно единственное дифференциальное уравнение второго

---

[1]) Мы увидим, однако, в § 7, что такая эквивалентность при известных условиях может быть установлена, если к дифференциальным уравнениям прибавить еще некоторые «начальные условия», ограничивающие многообразие решений. Впрочем по вопросу о проблеме эквивалентности ср. дополнения, п. п. 2 и 3.

порядка для u, следовало бы исключить из шести уравнений шесть неизвестных величин v, v_x, v_y, v_{xx}, v_{xy}, v_{yy}. Между тем исключение шести величин из шести уравнений вообще невозможно. Делается ли оно осуществимым благодаря, может быть, специальной структуре полученной системы уравнений? Отрицательный ответ на этот вопрос получается с помощью опровергающих примеров [1]).

Продолжение процесса подсчета показывает, что и при повышении порядка нельзя ожидать возможности замены системы (6) одним дифференциальным уравнением. Если, например, еще раз дифференцировать по x и y полученные после первого дифференцирования четыре уравнения, то получим еще шесть независимых уравнений, а всего двенадцать дифференциальных уравнений. Из этих двенадцати уравнений следовало бы исключить теперь десять величин v, v_x, v_y, v_{xx}, v_{xy}, v_{yy}, v_{xxx}, v_{xxy}, v_{xyy}, v_{yyy} для того, чтобы получить одно дифференциальное уравнение третьего порядка для одной лишь функции u. Но так как в результате исключения десяти величин из двенадцати уравнений вообще получаются два независимых соотношения, то следует ожидать, если мы не имеем дела со специальным случаем, что процесс исключения приведет к двум различным дифференциальным уравнениям третьего порядка для одной функции u.

2. Системы определенные, сверхопределенные, недоопределенные. Общий вид системы дифференциальных уравнений с частными производными при двух независимых переменных таков:

$$F_i(x, y, u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(m)}, u_x^{(1)}, u_y^{(1)}, \ldots, u_x^{(m)}, u_y^{(m)}, u_{xx}^{(1)}, \ldots) = 0 \quad (7)$$
$$(i = 1, \ldots, h),$$

т. е. система h уравнений для m функций $u^{(1)}, \ldots, u^{(m)}$ независимых переменных x и y. Мы предполагаем, что эти h уравнений независимы друг от друга, т. е. никакое из них не может быть получено из других с помощью процессов дифференцирования и исключения.

Если $h = m$, то говорят, что система *определенная*. Если $h > m$, то система называется *сверхопределенной*. Если, напротив, $h < m$, то она называется *недоопределенной*.

---

[1]) Уравнения

$$u_x + v_y = -yu,$$
$$u_y + v_x = yv$$

представляют пример такой системы, от которой нельзя притти процессом дифференцирования и исключения к одному уравнению второго порядка. Напротив, отсюда получаются для u два уравнения третьего порядка:

$$\frac{\partial}{\partial y}(y^2u + u_{yy} - u_{xx}) + u_x + yu = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(y^2u + u_{yy} - u_{xx}) + u_y - y(y^2u + u_{yy} - u_{xx}) = 0.$$

Пример определенной системы представляют *дифференциальные уравнения Коши-Римана* в теории функций для двух функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$:

$$u_x - v_y = 0, \quad u_y + v_x = 0.$$

Для этой определенной системы специального вида выводится без затруднений, с помощью дифференцирования и исключения, что функции u и v, каждая в отдельности, удовлетворяют дифференциальным уравнениям $\Delta u = 0$, $\Delta v = 0$ (ср. п. 1).

Простейшим примером сверхопределенной системы для одной функции $u(x, y)$ является система

$$u_x = f(x, y), \quad u_y = g(x, y).$$

Как известно, для разрешимости этой системы необходимо и достаточно выполнение условия

$$f_y = g_x.$$

Другой пример сверхопределенной системы дает нам теория *аналитических функций $f(z_1, z_2)$ от двух комплексных переменных*

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2.$$

Дифференциальные уравнения Коши-Римана, выражающие аналитический характер функции $f(z_1, z_2) = u + iv$ относительно обеих независимых переменных, имеют следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} u_{x_1} &= v_{y_1}, & u_{x_2} &= v_{y_2}, \\ u_{y_1} &= -v_{x_1}, & u_{y_2} &= -v_{x_2}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Дифференцированием и исключением получаем из них следующую сверхопределенную систему для одной функции u:

$$\left.\begin{aligned} u_{x_1x_1} + u_{y_1y_1} &= 0, & u_{x_1x_2} + u_{y_1y_2} &= 0, \\ u_{x_2x_2} + u_{y_2y_2} &= 0, & u_{x_1y_2} - u_{x_2y_1} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{8'}$$

Сверхопределенность этой системы указывает на то, что теория функций многих комплексных переменных по существу сложнее, чем классическая теория функций одного комплексного переменного.

Третий пример сверхопределенной системы дает введение однородных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ вместо n переменных $x, y, \ldots$ с помощью соотношений

$$x = \frac{x_2}{x_1}, \quad y = \frac{x_3}{x_1}, \ldots$$

Функция $u(x, y, \ldots)$ преобразуется при этом в функцию $\omega(x_1, x_2, \ldots)$, однородную, нулевого измерения относительно новых переменных и удовлетворяющую поэтому соотношению однородности Эйлера

$$x_1\omega_{x_1} + x_2\omega_{x_2} + \ldots = 0.$$

Частные производные первого порядка функции $u(x, y, \ldots)$ по $x, y, \ldots$ выражаются через производные функции $\omega(x_1, x_2, \ldots)$ следующим образом:

$$u_x = x_1 \omega_{x_2},$$
$$u_y = x_1 \omega_{x_3},$$
$$\cdots\cdots$$

Поэтому, если для функции u дано дифференциальное уравнение первого порядка

$$f(x, y, \ldots, u, u_x, u_y, \ldots) = 0,$$

то оно приводится преобразованием к такому же дифференциальному уравнению вида

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, \omega, \omega_{x_2}, \omega_{x_3}, \ldots) = 0$$

для функции $\omega(x_1, x_2, \ldots)$, к которому присоединяется еще, в качестве второго уравнения, соотношение однородности

$$x_1 \omega_{x_1} + x_2 \omega_{x_2} + \ldots = 0.$$

Вместо одного дифференциального уравнения получается, таким образом, сверхопределенная система двух уравнений. Очевидно, такая же сверхопределенность возникает и при преобразовании системы дифференциальных уравнений введением однородных переменных.

Примером недоопределенной системы дифференциальных уравнений является уравнение

$$u_x v_y - u_y v_x = 0,$$

которое выражает тождественное исчезание функционального определителя обеих функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$. Из этого уравнения вытекает [1]), что u и v связаны соотношением

$$w(u, v) = 0,$$

не содержащим явно независимых переменных x и y. Это соотношение можно рассматривать как общее решение недоопределенной системы дифференциальных уравнений.

Вообще для системы n функций $u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(n)}$ от независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ справедлива теорема, что исчезание функционального определителя

$$\frac{\partial(u^{(1)}, \ldots, u^{(n)})}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} = \begin{vmatrix} u^{(1)}_{x_1} & \ldots & u^{(n)}_{x_1} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ u^{(1)}_{x_n} & \ldots & u^{(n)}_{x_n} \end{vmatrix} = 0 \qquad (9)$$

---

[1]) Ср. § 1, п. 1, пример 5.

является характеристическим условием существования между n функциями $u^{(1)}, \ldots, u^{(n)}$ зависимости вида

$$w(u^{(1)}, \ldots, u^{(n)}) = 0. \tag{10}$$

Следовательно, и это соотношение (10) можно трактовать как решение недоопределенной системы дифференциальных уравнений (9).

§ 3. Методы интегрирования для некоторых дифференциальных уравнений частных видов

1. **Разделение переменных.** Для многих дифференциальных уравнений, встречающихся в математической физике, можно получить с помощью специальных подстановок, если и не всю совокупность решений, то все же семейство решений, зависящее от произвольных параметров.

Покажем на ряде примеров важнейший метод этого рода, метод *разделения переменных.*

1. $$u_x^2 + u_y^2 = 1.$$

С помощью подстановки

$$u(x, y) = \varphi(x) + \psi(y)$$

получаем:

$$[\varphi'(x)]^2 + [\psi'(y)]^2 = 1$$

или

$$[\varphi'(x)]^2 = 1 - [\psi'(y)]^2.$$

Так как в этом уравнении правая часть не зависит от x, а левая не зависит от y, то обе они равны одному и тому же постоянному числу α^2, и мы получаем, таким образом, непосредственно семейство решений, зависящее от двух параметров:

$$u(x, y) = \alpha x + \sqrt{1-\alpha^2}\, y + \beta \tag{1}$$

с параметрами α и β.

2. Соответственно для дифференциального уравнения

$$u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = 1$$

для функции u от трех переменных x, y, z, полагая

$$u = \varphi(x) + \psi(y) + \chi(z),$$

получим семейство решений

$$u = \alpha x + \beta y + \sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}\, z + \gamma, \tag{2}$$

зависящее от трех произвольных параметров α, β, γ.

3. Подстановка

$$u = \varphi(x) + \psi(y)$$

приводит к цели и у дифференциального уравнения

$$f(x)\, u_x^2 + g(y)\, u_y^2 = a(x) + b(y).$$