

является характеристическим условием существования между  $n$  функциями  $u^{(1)}, \dots, u^{(n)}$  зависимости вида

$$w(u^{(1)}, \dots, u^{(n)}) = 0. \quad (10)$$

Следовательно, и это соотношение (10) можно трактовать как решение недопределенной системы дифференциальных уравнений (9).

### § 3. Методы интегрирования для некоторых дифференциальных уравнений частных видов

**1. Разделение переменных.** Для многих дифференциальных уравнений, встречающихся в математической физике, можно получить с помощью специальных подстановок, если и не всю совокупность решений, то все же семейство решений, зависящее от произвольных параметров.

Покажем на ряде примеров важнейший метод этого рода, метод *разделения переменных*.

$$u_x^2 + u_y^2 = 1.$$

С помощью подстановки

$$u(x, y) = \varphi(x) + \psi(y)$$

получаем:

$$[\varphi'(x)]^2 + [\psi'(y)]^2 = 1$$

или

$$[\varphi'(x)]^2 = 1 - [\psi'(y)]^2.$$

Так как в этом уравнении правая часть не зависит от  $x$ , а левая не зависит от  $y$ , то обе они равны одному и тому же постоянному числу  $\alpha^2$ , и мы получаем, таким образом, непосредственно семейство решений, зависящее от двух параметров:

$$u(x, y) = \alpha x + \sqrt{1 - \alpha^2} y + \beta \quad (1)$$

с параметрами  $\alpha$  и  $\beta$ .

2. Соответственно для дифференциального уравнения

$$u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = 1$$

для функции  $u$  от трех переменных  $x, y, z$ , полагая

$$u = \varphi(x) + \psi(y) + \chi(z),$$

получим семейство решений

$$u = \alpha x + \beta y + \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2} z + \gamma, \quad (2)$$

зависящее от трех произвольных параметров  $\alpha, \beta, \gamma$ .

3. Подстановка

$$u = \varphi(x) + \psi(y)$$

приводит к цели и у дифференциального уравнения

$$f(x) u_x^2 + g(y) u_y^2 = a(x) + b(y).$$

Получим:

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x \sqrt{\frac{a(\xi) + \alpha}{f(\xi)}} d\xi + \int_{y_0}^y \sqrt{\frac{b(\eta) - \beta}{g(\eta)}} d\eta + \beta, \quad (3)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — произвольные постоянные.

4. Метод разделения переменных часто применяется с успехом после того, как предварительно выполнено подходящее преобразование переменных. Так, встречающееся в небесной механике, в задаче о двух телах уравнение

$$u_x^2 + u_y^2 = \frac{k}{r} - h \quad (r^2 = x^2 + y^2; k, h \text{ — постоянные})$$

после преобразования переменных  $x, y$  к полярным координатам  $r, \vartheta$  переходит в уравнение

$$u_r^2 + \frac{1}{r^2} u_\vartheta^2 = \frac{k}{r} - h \quad \text{или} \quad r^2 u_r^2 + u_\vartheta^2 = kr - hr^2$$

для функции  $u(r, \vartheta)$ , в которую перешла  $u(x, y)$  в результате преобразования. Формула (3) дает нам семейство решений

$$u = \int_0^r \sqrt{\frac{k}{\rho} - h - \frac{\alpha^2}{\rho^2}} d\rho + \alpha\vartheta + \beta, \quad (4)$$

зависящее от двух произвольных параметров  $\alpha$  и  $\beta$ .

5. У линейных дифференциальных уравнений, в особенности второго порядка, часто можно с успехом применить подстановку

$$u(x, y) = \varphi(x)\psi(y);$$

многочисленные примеры такого рода содержит пятая глава первого тома (ср. т. I, гл. V, §§ 3—9).

Другой пример дает *дифференциальное уравнение теплопроводности*

$$u_{xx} - u_y = 0. \quad (5)$$

С помощью нашей подстановки получим уравнение

$$\varphi''(x)\varphi'(x) = \psi'(y)\psi(y).$$

Следовательно, обе части этого уравнения должны равняться одной и той же постоянной, которую можно принять положительной или отрицательной и обозначить соответственно через  $y^2$  или  $-y^2$ . Таким образом, получается семейства решений

$$u = a \sinh v(x - a)e^{v^2 y},$$

$$u = a \sin v(x - a)e^{-v^2 y}.$$

Последнее решение играет особую роль в математической физике, как выражение распределения температуры, безгранично убывающего со временем ( $u$  — температура,  $y$  — время,  $x$  — координата точки).

**2. Получение новых решений с помощью суперпозиции (наложения).** Основное решение уравнения теплопроводности. **Интеграл Пуассона.** Из полученных решений линейных дифференциальных уравнений можно получить новые решения с помощью процессов суммирования, дифференцирования и интегрирования, чemu многочисленные примеры также содержатся в гл. V т. I (ср. т. I, гл. V, §§ 1—9). В этом месте мы можем поэтому ограничиться немногими примерами.

Для того, чтобы получить новое решение *уравнения теплопроводности*, мы проинтегрируем решение  $e^{-\nu y} \cos \nu x$  по параметру  $\nu$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Получится новое решение

$$u = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\nu y} \cos \nu x \, d\nu \quad (y > 0).$$

Интеграл в правой части нетрудно вычислить<sup>1)</sup>, и мы получим:

$$u = \sqrt{\frac{\pi}{y}} e^{-\frac{x^2}{4y}}. \quad (6)$$

В качестве второго примера, связанного с применением принципа наложения, дадим решение *краевой задачи уравнения Лапласа*  $\Delta u = 0$  для круга  $r^2 = x^2 + y^2 < 1$ , если для  $r = 1$  краевые значения функции  $u$  заданы как непрерывно дифференцируемая функция  $g(\theta)$  полярного угла  $\theta$ . Обозначим коэффициенты Фурье функции  $g(\theta)$  через

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta) \cos n\theta \, d\theta, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta) \sin n\theta \, d\theta;$$

ряд

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos ny + b_n \sin ny) r = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n P_n(x, y) + b_n Q_n(x, y)] \end{aligned}$$

1) Для вычисления полагаем  $y^2 = \lambda^2$ . Имеем  $u = \frac{1}{V y} J(a)$ , где  $a = \frac{x}{V y}$  и  $J(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2} \cos(a\lambda) \, d\lambda$ . Для вычисления  $J(a)$ , дифференцируя под знаком интеграла, получаем  $J'(a) = - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2} \lambda \sin(a\lambda) \, d\lambda$  и, после интегрирования по частям, почти непосредственно  $J'(a) = -\frac{a}{2} J(a)$ . Кроме того, прямое вычисление дает  $J(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2} \, d\lambda = \sqrt{\pi}$ . Отсюда вытекает  $J(a) = \sqrt{\pi} e^{-\frac{a^2}{4}}$  и, следовательно, формула (6).

сходится равномерно при  $r \leq q < 1$ . Этот ряд, который при  $r \leq q$  можно дважды дифференцировать почленно, представляет суперпозицию гармонических функций  $P_n$  и  $Q_n$ , рассмотренных в § 1, п. 1, пример 8, а, следовательно, и сам является гармонической функцией. Но он сверх того решает и нашу краевую задачу. Внутри круга можно поменять местами суммирование и интегрирование, после чего получаем:

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\varphi) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n(\vartheta - \varphi) \right\} d\varphi.$$

Воспользуемся формулой  $2 \cos \alpha = e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}$  и затем просуммируем геометрические ряды, которые появляются под знаком интеграла, и после небольшого преобразования мы придем к выражению

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\vartheta - \varphi) + r^2} g(\varphi) d\varphi, \quad (7)$$

которое представляет решение краевой задачи с помощью интеграла Пуассона (ср. гл. IV, а также т. I, стр. 488).

#### § 4. Геометрическое истолкование дифференциального уравнения в частных производных первого порядка с двумя независимыми переменными. Полный интеграл

**1. Геометрическое истолкование дифференциального уравнения в частных производных первого порядка.** У дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка для одной функции  $u(x, y)$  от двух независимых переменных геометрическое представление вводит уже довольно далеко в теорию интегрирования. Дифференциальное уравнение

$$F(x, y, u, p, q) = 0, \quad (1)$$

где для сокращения положено  $p = u_x$ ,  $q = u_y$ , говорит, что для всякой интегральной поверхности, проходящей через точку с координатами  $x$ ,  $y$ ,  $u$ , обе величины  $p$  и  $q$ , определяющие положение касательной плоскости в этой точке, подчинены условию (1). Касательная плоскость к какой-либо интегральной поверхности в упомянутой точке<sup>1)</sup> не может уже, следовательно, принимать произвольные положения, но должна принадлежать многообразию, характеризуемому

1) Для того, чтобы подчеркнуть, что в упомянутых выше касательных плоскостях подвергается рассмотрению лишь непосредственная окрестность соответствующей точки касания, целесообразно такую точку и окружающий ее произвольно малый кусок плоскости называть поверхностным элементом и этими поверхностными элементами оперировать точно так же, как при изучении обыкновенных дифференциальных уравнений можно положить в основу линейные элементы.