

сходится равномерно при $r \leq q < 1$. Этот ряд, который при $r \leq q$ можно дважды дифференцировать почленно, представляет суперпозицию гармонических функций P_n и Q_n , рассмотренных в § 1, п. 1, пример 8, а, следовательно, и сам является гармонической функцией. Но он сверх того решает и нашу краевую задачу. Внутри круга можно поменять местами суммирование и интегрирование, после чего получаем:

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\varphi) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n(\vartheta - \varphi) \right\} d\varphi.$$

Воспользуемся формулой $2 \cos \alpha = e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}$ и затем просуммируем геометрические ряды, которые появляются под знаком интеграла, и после небольшого преобразования мы придем к выражению

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\vartheta - \varphi) + r^2} g(\varphi) d\varphi, \quad (7)$$

которое представляет решение краевой задачи с помощью интеграла Пуассона (ср. гл. IV, а также т. I, стр. 488).

§ 4. Геометрическое истолкование дифференциального уравнения в частных производных первого порядка с двумя независимыми переменными. Полный интеграл

1. Геометрическое истолкование дифференциального уравнения в частных производных первого порядка. У дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка для одной функции $u(x, y)$ от двух независимых переменных геометрическое представление вводит уже довольно далеко в теорию интегрирования. Дифференциальное уравнение

$$F(x, y, u, p, q) = 0, \quad (1)$$

где для сокращения положено $p = u_x$, $q = u_y$, говорит, что для всякой интегральной поверхности, проходящей через точку с координатами x , y , u , обе величины p и q , определяющие положение касательной плоскости в этой точке, подчинены условию (1). Касательная плоскость к какой-либо интегральной поверхности в упомянутой точке¹⁾ не может уже, следовательно, принимать произвольные положения, но должна принадлежать многообразию, характеризуемому

1) Для того, чтобы подчеркнуть, что в упомянутых выше касательных плоскостях подвергается рассмотрению лишь непосредственная окрестность соответствующей точки касания, целесообразно такую точку и окружающий ее произвольно малый кусок плоскости называть поверхностным элементом и этими поверхностными элементами оперировать точно так же, как при изучении обыкновенных дифференциальных уравнений можно положить в основу линейные элементы.

уравнением (1)¹⁾. Для заданной точки (x, y, u) — это многообразие, зависящее от одного параметра (например, для уравнения $p^2 + q^2 = 1$ многообразие $p = \cos t, q = \sin t$ с параметром t). Если функция F линейна относительно p и q , то это семейство возможных касательных плоскостей образует пучок плоскостей, проходящих через одну прямую, «ось Монжа». Мы оставляем в стороне этот специальный случай «квазилинейного» дифференциального уравнения первого порядка, который будет рассмотрен особо в § 5, и полагаем, что для всякой интересующей нас точки (x, y, u) наше семейство плоскостей огибает некоторый конус, так называемый «конус Монжа»²⁾. Таким образом, дифференциальное уравнение геометрически изображается «полем конусов», отнесенными некоторой области пространства x, y, u , подобно тому, как обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка изображается полем направлений. Дать решение дифференциального уравнения означает найти такую поверхность, которая в каждой из своих точек касается соответствующего конуса Монжа.

Геометрические соображения, как и в теории обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, делают очевидным следующее предложение:

Если зависящее от одного параметра a семейство

$$u = f(x, y, a) \quad (2)$$

решений дифференциального уравнения $F(x, y, u, p, q) = 0$ имеет огибающую, то эта огибающая тоже является решением.

Действительно, огибающая семейства интегральных поверхностей имеет в каждой своей точке P касательную плоскость, которая касается в этой точке соответствующего конуса Монжа, а именно, общую касательную плоскость с той интегральной поверхностью семейства, которая касается огибающей в точке P .

Аналитически теорема доказывается следующим образом: для получения огибающей надо из уравнения

$$f_a(x, y, a) = 0 \quad (3)$$

выразить величину a в функции от x и y и затем эту функцию $a(x, y)$ подставить в f , причем уравнение огибающей получится в виде

$$u = f(x, y, a(x, y)) = \psi(x, y).$$

Принимая во внимание уравнение (3), имеем:

$$\psi_x = u_x = f_x + f_a a_x = f_x; \quad \psi_y = u_y = f_y + f_a a_y = f_y.$$

Итак, в фиксированной точке (x_0, y_0) значения $\psi(x_0, y_0)$, $\psi_x(x_0, y_0)$, $\psi_y(x_0, y_0)$ равны соответственно значениям $f(x_0, y_0, a)$, $f_x(x_0, y_0, a)$, $f_y(x_0, y_0, a)$, где $a = a(x_0, y_0)$. Но так как функция $u = f(x, y, a)$

¹⁾ Для более подробного рассмотрения ср. гл. II, § 3, п. 1.

²⁾ По имени Монжа (Gaspard Monge).

удовлетворяет дифференциальному уравнению в точке (x_0, y_0) , то и функция $u = \psi(x, y)$ ему удовлетворяет.

2. Полный интеграл. В § 3 мы убедились на ряде примеров, что для дифференциальных уравнений первого порядка возможно найти решения, которые еще зависят от произвольных параметров; в частности, для дифференциального уравнения

$$F(x, y, u, p, q) = 0 \quad (1)$$

с одной неизвестной функцией $u(x, y)$ от двух независимых переменных можно найти такое решение

$$u = \varphi(x, y, a, b), \quad (4)$$

которое еще зависит от двух параметров a, b . Если u не входит явно в F , то из семейства решений $u = \varphi(x, y, a)$ с одним параметром можно получить семейство решений $u = \varphi(x, y, a) + b$, зависящее от двух параметров a и b .

Семейство решений, зависящее от двух параметров, называется полным интегралом дифференциального уравнения (1), если¹⁾ в интересующей нас области ранг матрицы

$$M = \begin{pmatrix} \varphi_a & \varphi_{xa} & \varphi_{ya} \\ \varphi_b & \varphi_{xb} & \varphi_{yb} \end{pmatrix}$$

равен двум, в частности, следовательно, если определитель

$$D = \varphi_{xa}\varphi_{yb} - \varphi_{xb}\varphi_{ya} \quad (5)$$

не обращается в нуль.

Значение понятия «полного интеграла» основано на следующем фундаментальном факте. *Нахождением огибающей и, следовательно, с помощью одних лишь процессов дифференцирования и исключения можно получить из полного интеграла (4) семейство решений дифференциального уравнения (3), зависящее от произвольной функции²⁾.* Для этой цели мы связываем независимые доселе параметры a

¹⁾ Это условие исключает возможность, чтобы функция φ содержала два независимых параметра лишь кажущимся образом, приводясь в действительности с помощью подходящей комбинации $\gamma = g(a, b)$ к виду $\varphi(x, y, a, b) = \psi(x, y, \gamma)$, зависящему от одного лишь параметра; в этом случае из соотношений

$$\begin{aligned} \varphi_{xa} &= \psi_x \gamma_a, & \varphi_{xb} &= \psi_x \gamma_b, & \varphi_{ya} &= \psi_y \gamma_a, & \varphi_{yb} &= \psi_y \gamma_b, \\ \varphi_a &= \psi_\gamma \gamma_a, & \varphi_b &= \psi_\gamma \gamma_b \end{aligned}$$

немедленно вытекало бы, что ранг матрицы M не может равняться двум.

²⁾ Вопрос о том, получается ли этим путем многообразие всех решений, остается открытым. Что по этому вопросу трудно формулировать общие предложения, показывает следующий пример. Пусть $F(x, y, u, p, q) = G(x, y, u, p, q) H(x, y, u, p, q)$ и φ — полный интеграл уравнения $G = 0$, не являющийся одновременно решением уравнения $H = 0$. В таком случае согласно нашему определению φ является также полным интегралом уравнения $F = 0$, и существуют семейства решений уравнения $F = 0$, а именно — решения уравнения $H = 0$, — которых нельзя получить из φ .

и b произвольной функцией, например, $b = \omega(a)$, тем самым выделяя из нашего семейства с двумя параметрами семейство, зависящее от одного параметра, и находим огибающую этого семейства. Для этого представляем себе, что величина a выражена из уравнения

$$\varphi_a + \varphi_b w'(a) = 0 \quad (b = \omega(a)) \quad (6)$$

в функции x и y , что предполагается возможным, и подставлена в $u = \varphi(x, y, a, w(a)) = \psi(x, y)$.

Таким образом получается многообразие решений $\psi(x, y)$, зависящее от произвольной функции w . Изложенное разрешает, между прочим, кажущийся парадокс, упомянутый на стр. 20; если для дифференциального уравнения с частными производными имеется семейство решений, зависящее от двух параметров, то тем самым дано семейство функций, зависящее от произвольной функции; при этом, однако, произвольная функция входит столь сложным образом, что это семейство функций вообще не охватывается нашей формулой (7), § 1, п. 2.

В следующей главе, в систематической теории дифференциальных уравнений первого порядка мы узнаем, что теорию полного интеграла можно обобщить и на дифференциальные уравнения для функций от n независимых переменных и что ее можно привести в тесную связь с общей теорией интегрирования.

3. Особые интегралы. Кроме «общего» решения, полученного в п. 2 посредством нахождения огибающей подсемейства, зависящего от одного параметра, методом нахождения огибающей можно иногда получить и другое, «особое» решение. Именно, может случиться, что исходное семейство интегральных поверхностей с двумя параметрами $u = \varphi(x, y, a, b)$ тоже имеет огибающую¹⁾, не содержащуюся среди предыдущих. И эта огибающая, которая получается исключением a и b из трех уравнений

$$\left. \begin{array}{l} u = \varphi(x, y, a, b); \\ 0 = \varphi_a, \\ 0 = \varphi_b, \end{array} \right\} \quad (7)$$

тоже должна быть решением. Оно называется «особым» решением уравнения (1). В отношении особых решений здесь, как и в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, имеет место замечательный факт, что для их получения на самом деле совершенно не требуется знания полного интеграла; напротив, их можно получить непосредственно из дифференциального уравнения с помощью процессов дифференцирования и исключения, а именно: *Для получения особых решений надо исключить p и q из уравнений*

$$F(x, y, u, p, q) = 0, \quad F_p = 0, \quad F_q = 0. \quad (8)$$

В самом деле, дифференцируя уравнение

$$F(x, y, \varphi, \varphi_x, \varphi_y) = 0,$$

¹⁾ Это, конечно, невозможно, если u не содержится явно в F .

которое выполняется тождественно относительно a и b , по a и по b , имеем:

$$\begin{aligned} F_u \varphi_a + F_p \varphi_{xa} + F_q \varphi_{ya} &= 0, \\ F_u \varphi_b + F_p \varphi_{xb} + F_q \varphi_{yb} &= 0. \end{aligned}$$

Так как на особой интегральной поверхности $\varphi_a = \varphi_b = 0$, то для точек этой поверхности

$$\begin{aligned} F_p \varphi_{xa} + F_q \varphi_{ya} &= 0, \\ F_p \varphi_{xb} + F_q \varphi_{yb} &= 0. \end{aligned}$$

Если предположить, что определитель $D = \varphi_{xa} \varphi_{yb} - \varphi_{xb} \varphi_{ya}$ не исчезает на особой интегральной поверхности, то для этой поверхности должны выполняться уравнения

$$F_p = 0, \quad F_q = 0.$$

Таким образом, особое решение может быть получено исключением p и q из уравнений (8). Согласно этому особое решение можно определить, и без ссылки на специальный полный интеграл, как такое решение, для которого $F = F_p = F_q = 0$ (ср. гл. II, § 4).

4. Примеры. Рассмотрим семейство функций, зависящее от двух параметров,

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + u^2 = 1, \quad (9)$$

т. е. совокупность сфер радиуса 1 в пространстве x, y, u , центры которых лежат в плоскости x, y . Эти функции образуют полный интеграл дифференциального уравнения

$$u^2(1 + p^2 + q^2) = 1. \quad (10)$$

Полагая $b = w(a)$, мы выделяем из совокупности (9) зависящее от одного параметра семейство сфер, центры которых лежат в плоскости x, y на кривой $y = w(x)$. Огибающая этого семейства, т. е. та поверхность, которая получается исключением величины a из двух уравнений:

$$\left. \begin{aligned} (x - a)^2 + (y - w(a))^2 + u^2 &= 1, \\ (x - a) + w'(a)(y - w(a)) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

дает новое решение. Каждая такая огибающая есть поверхность канала с осевой кривой $y = w(x)$.

Однако, все семейство (9) с двумя параметрами тоже имеет огибающую, а именно — обе плоскости $u = 1$ и $u = -1$, как это показывает наглядное представление и подтверждает аналитический вывод исключением величин a и b из уравнений

$$\left. \begin{aligned} (x - a)^2 + (y - b)^2 + u^2 &= 1, \\ x - a &= 0, \\ y - b &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Так как эти поверхности удовлетворяют дифференциальному уравнению (10), то они представляют его особые решения.

К этим особым решениям можно также притти, исключая величины p и q из уравнений

$$F = u^2(1 + p^2 + q^2) = 1, \quad F_p = 2u^2p = 0, \quad F_q = 2u^2q = 0. \quad (13)$$

Другой пример представляет часто встречающееся в приложениях *дифференциальное уравнение Клеро*

$$u = xu_x + yu_y + f(u_x, u_y). \quad (14)$$

К нему можно притти, исходя из семейства плоскостей

$$u = ax + by + f(a, b), \quad (15)$$

зависящего от двух параметров, где $f(a, b)$ — заданная функция параметров a и b . В силу того, что $u_x = a$, $u_y = b$, это семейство плоскостей удовлетворяет дифференциальному уравнению (14), и, так как $D = 1$, оно является полным интегралом этого дифференциального уравнения.

Общее решение дифференциального уравнения Клеро мы получим и здесь посредством нахождения огибающей, беря произвольную функцию $b = w(a)$ и исключая затем параметр a из уравнений

$$\left. \begin{array}{l} u = ax + yw(a) + f(a, w(a)), \\ 0 = x + yw'(a) + f_a + f_b w'(a). \end{array} \right\} \quad (16)$$

Очень большое значение для приложений имеет особое решение уравнения Клеро. Оно получается как огибающая семейства плоскостей (15), зависящего от двух параметров, т. е. исключением a и b из уравнений

$$\left. \begin{array}{l} u = ax + by + f(a, b), \\ x = -f_a, \\ y = -f_b. \end{array} \right\} \quad (17)$$

Мы придем к тем же формулам, если будем дифференцировать дифференциальное уравнение (14) по $u_x = p$, $u_y = q$, следуя правилу, выведенному в п. 3. (Ср. по этому поводу рассмотрения, проведенные, впрочем, с другой точки зрения в § 6, п. 3.)

§ 5. Теория линейных и квазилинейных дифференциальных уравнений первого порядка

1. Линейные дифференциальные уравнения. Линейным дифференциальным уравнением с частными производными для неизвестной функции $u(x_1, \dots, x_n)$ называется дифференциальное уравнение вида

$$\sum_{i=1}^n a_i u_{x_i} = a, \quad (1)$$