Так как эти поверхности удовлетворяют дифференциальному уравнению (10), то они представляют его особые решения.

К этим особым решениям можно также притти, исключая величины p и q из уравнений

$$F = u^2(1 + p^2 + q^2) = 1, \quad F_p = 2u^2p = 0, \quad F_q = 2u^2q = 0. \tag{13}$$

Другой пример представляет часто встречающееся в приложениях *дифференциальное уравнение Клеро*

$$u = xu_x + yu_y + f(u_x, u_y). \tag{14}$$

К нему можно притти, исходя из семейства плоскостей

$$u = ax + by + f(a, b), \tag{15}$$

зависящего от двух параметров, где $f(a, b)$ — заданная функция параметров a и b. В силу того, что $u_x = a$, $u_y = b$, это семейство плоскостей удовлетворяет дифференциальному уравнению (14), и, так как $D = 1$, оно является полным интегралом этого дифференциального уравнения.

Общее решение дифференциального уравнения Клеро мы получим и здесь посредством нахождения огибающей, беря произвольную функцию $b = w(a)$ и исключая затем параметр a из уравнений

$$\left.\begin{aligned} u &= ax + yw(a) + f(a, w(a)), \\ 0 &= x + yw'(a) + f_a + f_b w'(a). \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Очень большое значение для приложений имеет особое решение уравнения Клеро. Оно получается как огибающая семейства плоскостей (15), зависящего от двух параметров, т. е. исключением a и b из уравнений

$$\left.\begin{aligned} u &= ax + by + f(a, b), \\ x &= -f_a, \\ y &= -f_b. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Мы придем к тем же формулам, если будем дифференцировать дифференциальное уравнение (14) по $u_x = p$, $u_y = q$, следуя правилу, выведенному в п. 3. (Ср. по этому поводу рассмотрения, проведенные, впрочем, с другой точки зрения в § 6, п. 3.)

§ 5. Теория линейных и квазилинейных дифференциальных уравнений первого порядка

1. Линейные дифференциальные уравнения. Линейным дифференциальным уравнением с частными производными для неизвестной функции $u(x_1, \ldots, x_n)$ называется дифференциальное уравнение вида

$$\sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i} = a, \tag{1}$$

где a_i и a — заданные, непрерывно дифференцируемые функции переменных $x_1, \ldots, x_n$; квазилинейным называется дифференциальное уравнение такого же вида, но в котором коэффициенты могут зависеть не только от независимых переменных $x_1, \ldots, x_n$, но и от самой неизвестной функции u.

В этом параграфе будет показано, что теория этих дифференциальных уравнений вполне эквивалентна теории системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ср. также гл. II, § 2).

Рассмотрим сначала частный случай однородного линейного дифференциального уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i} = 0. \tag{1'}$$

Определим в n-мерном пространстве переменных $x_1, \ldots, x_n$ кривые $x_i = x_i(s)$, как функции параметра s, заданием системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{ds} = a_i(x_1, \ldots, x_n) \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{2}$$

Эти кривые называются *характеристическими кривыми* нашего дифференциального уравнения. К их общему значению мы вернемся в гл. II, § 2, когда будем рассматривать квазилинейные дифференциальные уравнения, исходя из другой точки зрения. В случае $n = 2$ это — те кривые, которые касаются осей Монжа, упомянутых в § 4, п. 1 как вырождения конусов Монжа.

Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений мы заимствуем следующие факты: если ввести вместо s в качестве независимой переменной одну из величин x_i, то, разрешив общее решение системы (2), зависящее от $n-1$ параметров c_i, относительно этих параметров, можно это решение представить в следующем виде:

$$c_i = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, \ldots, n-1),$$

где c_i — произвольные постоянные интегрирования, а φ_i — взаимно независимые «интегралы» системы дифференциальных уравнений. При этом под интегралом [1]) $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ мы разумеем такую функцию независимых переменных x_i, которая сохраняет постоянное значение вдоль всякой интегральной кривой системы дифференциальных уравнений (2).

Из нашего дифференциального уравнения (1′) вытекает, что для значений $u(s) = u(x_1(s), \ldots, x_n(s))$ любого решения u дифференциального уравнения с частными производными вдоль интегральной кривой системы обыкновенных дифференциальных уравнений справедливо соотношение

$$\frac{du}{ds} = 0. \tag{3}$$

---

[1]) Ср. сноску [1]) на стр. 82. (*Прим. перев.*)

Следовательно, наши уравнения выражают следующий факт: *на любой интегральной кривой системы* (2) *обыкновенных дифференциальных уравнений всякое решение дифференциального уравнения* (1′) *с частными производными имеет постоянное, т. е. не зависящее от* x_i, *значение*. Всякое решение дифференциального уравнения с частными производными является «*интегралом* системы обыкновенных дифференциальных уравнений».

В другой стороны, всякий интеграл

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n)$$

нашей системы (2) обыкновенных дифференциальных уравнений является решением дифференциального уравнения с частными производными. Действительно, представим себе, что в этот интеграл подставлено вместо x_i какое-нибудь решение $x_i(s)$ системы (2); в таком случае, дифференцируя по s, найдем, что φ удовлетворяет дифференциальному уравнению (1′) с частными производными во всех точках любой интегральной кривой $x_i(s)$. Так как через каждую точку рассматриваемой области проходит одна из этих интегральных кривых, то функция φ удовлетворяет в этой области дифференциальному уравнению (1′) тождественно относительно $x_1, \ldots, x_n$.

Но между любыми n интегралами

$$\varphi_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

нашей системы дифференциальных уравнений (2) должна существовать зависимость вида

$$W(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = 0, \tag{4}$$

так как уравнения

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

могут удовлетворяться, при неисчезающих одновременно a_i, лишь в том случае, если функциональный определитель

$$\frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} \tag{5}$$

обращается в нуль. Но это и есть характеристическое условие для существования соотношения вида (4). С другой стороны, наверное существуют $n-1$ взаимно независимых интегралов $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ системы (2), а, следовательно, всякий интеграл должен выражаться через них в виде

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = w(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}). \tag{6}$$

Так как и, обратно, всякая функция $w(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$ сохраняет постоянное значение на любой интегральной кривой системы (2) и является поэтому интегралом этой системы, то мы имеем в формуле (6), где w — произвольная функция $n-1$ аргументов, совокупность

всех решений дифференциального уравнения (1′) с частными производными.

Обратно, с помощью $n-1$ независимых решений $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ дифференциального уравнения с частными производными можно получить решение системы (2) обыкновенных дифференциальных уравнений, выражая, например, $n-1$ величину $x_1, \ldots, x_{n-1}$ из уравнений $\varphi_\nu = c_\nu$ в функции независимой переменной x_n и параметров $c_1, \ldots, c_{n-1}$.

2. Квазилинейные дифференциальные уравнения. Тот случай, когда дифференциальное уравнение (1) уже не является линейным и однородным, но вообще квазилинейно и имеет правую часть $a(x_1, x_2, \ldots, u)$, на первый взгляд значительно более сложен. Однако, с помощью распространенного приема, имеющего вообще большое значение в теории дифференциальных уравнений с частными производными, этот случай можно привести к линейному однородному дифференциальному уравнению, но с одним независимым переменным больше, и таким образом полностью разрешить. Для этой цели вводят $u = x_{n+1}$ в качестве новой независимой переменной, а искомое решение уравнения (1) представляют себе в неявном виде $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = 0$ или общее, с постоянной c, в виде

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = c, \tag{7}$$

где функция φ и подлежит определению. В силу того, что

$$\varphi_{x_i} + \varphi_{x_{n+1}} u_{x_i} = 0,$$

если еще положить $a(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) = a_{n+1}$, наше дифференциальное уравнение преобразуется к виду

$$\sum_{\nu=1}^{n=1} a_\nu \varphi_{x_\nu} = 0. \tag{8}$$

Это уравнение точно имеет форму линейного однородного дифференциального уравнения для функции $\varphi(x_1, \ldots, x_{n+1})$ от $n+1$ переменного. Но здесь возникает небольшое принципиальное затруднение: уравнение (8) не должно выполняться тождественно относительно $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, но в силу своего вывода лишь для таких систем значений, для которых $\varphi = 0$ или $\varphi = c$. В этом понимании соотношение (8) еще не является линейным однородным дифференциальным уравнением с частными производными. Однако, если рассматривать не только одно единственное решение первоначального дифференциального уравнения, но семейство решений $\varphi = c$, зависящее от одного параметра c, то уравнение (8) будет удовлетворяться для всех значений $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ и, следовательно, действительно является линейным дифференциальным уравнением рассмотренного типа. В самом деле, если $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ выбраны произвольно, то нужно рассматривать значение c, определяемое равенством $\varphi(x_1, \ldots, x_{n+1}) = c$; так как для этого значения c уравнение (8) должно выполняться, то тем самым оно удовлетворяется тождественно относительно $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$.

Если мы теперь найдем функцию φ в качестве решения уравнения (8), то, полагая $\varphi = c$, получим, обратно, семейство решений уравнения (1), зависящее от одного параметра.

Таким образом, указанное выше приведение выполнено. Оно показывает, что интегрирование общего квазилинейного уравнения (1) эквивалентно решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{ds} = a_i, \qquad \frac{du}{ds} = a. \tag{9}$$

§ 6. Преобразование Лежандра

1. Преобразование Лежандра для функции двух переменных. Теория интегрирования некоторых классов дифференциальных уравнений может быть значительно подвинута применением так называемого *преобразования Лежандра*. К этому преобразованию нас приводит геометрическое истолкование дифференциального уравнения, если представить интегральную поверхность не в точечных координатах, а с помощью тангенциальных координат [1]).

Для описания поверхности в пространстве x, y, u посредством уравнения существуют две двойственно-взаимные возможности. Ее можно либо задать как точечное многообразие посредством функции $u(x, y)$, либо рассматривать как огибающую своих касательных плоскостей и выразить уравнением условие того, чтобы плоскость была касательной к поверхности. Если $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{u}$ — текущие координаты на плоскости, уравнение которой

$$\mathfrak{u} - \xi\mathfrak{x} - \eta\mathfrak{y} + \omega = 0,$$

то величины ξ, η, ω мы называем координатами плоскости. Касательная плоскость к поверхности $u(x, y)$ в точке (x, y, u) имеет уравнение

$$\mathfrak{u} - u - (\mathfrak{x} - x)\, u_x - (\mathfrak{y} - y)\, u_y = 0,$$

а потому ее координаты

$$\xi = u_x, \quad \eta = u_y, \qquad \omega = xu_x + yu_y - u.$$

Очевидно, рассматриваемая поверхность будет также определена, если задать ω как функцию от ξ и η, тем самым выделяя двухпараметрическое семейство касательных плоскостей. Зависимость $\omega(\xi, \eta)$ находим из $u(x, y)$, определяя из уравнений

$$\xi = u_x, \qquad \eta = u_y$$

значения x и y как функций от ξ и η и внося их в уравнение

$$\omega = xu_x + yu_y - u = x\xi + y\eta - u.$$

---

[1]) По поводу формальной стороны этой операции ср. впрочем т. стр. 226.