Если мы теперь найдем функцию φ в качестве решения уравнения (8), то, полагая $\varphi = c$, получим, обратно, семейство решений уравнения (1), зависящее от одного параметра.

Таким образом, указанное выше приведение выполнено. Оно показывает, что интегрирование общего квазилинейного уравнения (1) эквивалентно решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{ds} = a_i, \qquad \frac{du}{ds} = a. \tag{9}$$

§ 6. Преобразование Лежандра

1. Преобразование Лежандра для функции двух переменных. Теория интегрирования некоторых классов дифференциальных уравнений может быть значительно подвинута применением так называемого *преобразования Лежандра*. К этому преобразованию нас приводит геометрическое истолкование дифференциального уравнения, если представить интегральную поверхность не в точечных координатах, а с помощью тангенциальных координат [1]).

Для описания поверхности в пространстве x, y, u посредством уравнения существуют две двойственно-взаимные возможности. Ее можно либо задать как точечное многообразие посредством функции $u(x, y)$, либо рассматривать как огибающую своих касательных плоскостей и выразить уравнением условие того, чтобы плоскость была касательной к поверхности. Если $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{u}$ — текущие координаты на плоскости, уравнение которой

$$\mathfrak{u} - \xi\mathfrak{x} - \eta\mathfrak{y} + \omega = 0,$$

то величины ξ, η, ω мы называем координатами плоскости. Касательная плоскость к поверхности $u(x, y)$ в точке (x, y, u) имеет уравнение

$$\mathfrak{u} - u - (\mathfrak{x} - x)\, u_x - (\mathfrak{y} - y)\, u_y = 0,$$

а потому ее координаты

$$\xi = u_x, \quad \eta = u_y, \qquad \omega = xu_x + yu_y - u.$$

Очевидно, рассматриваемая поверхность будет также определена, если задать ω как функцию от ξ и η, тем самым выделяя двухпараметрическое семейство касательных плоскостей. Зависимость $\omega(\xi, \eta)$ находим из $u(x, y)$, определяя из уравнений

$$\xi = u_x, \qquad \eta = u_y$$

значения x и y как функций от ξ и η и внося их в уравнение

$$\omega = xu_x + yu_y - u = x\xi + y\eta - u.$$

---

[1]) По поводу формальной стороны этой операции ср. впрочем т. стр. 226.

Для того, чтобы вычислить, обратно, по тангенциальным координатам точечные, образуем частные производные функции $\omega(\xi, \eta)$; в силу того, что $\xi = u_x$ и $\eta = u_y$, имеем:

$$\omega_\xi = x + \xi \frac{\partial x}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial y}{\partial \xi} - u_x \frac{\partial x}{\partial \xi} - u_y \frac{\partial y}{\partial \xi} = x$$

и точно так же

$$\omega_\eta = y;$$

таким образом, для связи между точечными и тангенциальными координатами получается система формул

$$\left.\begin{aligned} \omega(\xi, \eta) + u(x, y) &= x\xi + y\eta, \\ \xi = u_x, \quad \eta &= u_y, \\ x = \omega_\xi, \quad y &= \omega_\eta, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

которая ясно выражает двойственный характер соотношения между теми и другими координатами.

Это преобразование поверхности от точечных к тангенциальным координатам называется *преобразованием Лежандра для функций двух переменных*. Оно носит существенно другой характер, чем простое преобразование координат, ибо оно не относит каждой отдельной точке другую точку, а, вернее, систему (1) можно так толковать, что каждому поверхностному элементу (x, y, u, u_x, u_y) она относит другой поверхностный элемент $(\xi, \eta, \omega, \omega_\xi, \omega_\eta)$.

Преобразование Лежандра всегда выполнимо, если можно решить систему уравнений $u_x = \xi$, $u_y = \eta$ относительно x и y, для чего достаточно, чтобы функциональный определитель

$$u_{xx} u_{yy} - u_{xy}^2 = \rho \tag{2}$$

не исчезал для точек данной поверхности.

Очевидно, преобразование Лежандра отказывается служить для таких поверхностей, которые удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$u_{xx} u_{yy} - u_{xy}^2 = 0,$$

т. е. для *развертывающихся поверхностей*. Этот результат геометрически нагляден. В самом деле, развертывающаяся поверхность в силу своего определения обладает лишь однопараметрическим семейством касательных плоскостей с прямыми касания, а не точками касания, вследствие чего невозможно установить взаимно однозначное соответствие между точками и касательными плоскостями поверхности.

В заключение, имея в виду применение преобразования Лежандра к дифференциальным уравнениям второго порядка, найдем еще формулы преобразования вторых производных функций $u(x, y)$ и $\omega(\xi, \eta)$. Для этой цели представим себе, что в уравнениях $\xi = u_x$, $\eta = u_y$ переменные x и y выражены в функции от ξ и η с помощью

соотношений $x = \omega_\xi$, $y = \omega_\eta$. Дифференцируя эти уравнения по ξ и η, имеем:

$$\begin{aligned} 1 &= u_{xx}\omega_{\xi\xi} + u_{xy}\omega_{\xi\eta}, \\ 0 &= u_{xy}\omega_{\xi\xi} + u_{yy}\omega_{\xi\eta}, \\ 0 &= u_{xx}\omega_{\xi\eta} + u_{xy}\omega_{\eta\eta}, \\ 1 &= u_{xy}\omega_{\xi\eta} + u_{yy}\omega_{\eta\eta}. \end{aligned}$$

Полагая для сокращения

$$\left.\begin{aligned} \omega_{\xi\xi}\omega_{\eta\eta} - \omega_{\xi\eta}^2 &= \frac{1}{\rho}, \\ u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 &= \rho, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

получаем:

$$\left.\begin{aligned} u_{xx} &= \rho\omega_{\eta\eta}, \\ u_{xy} &= -\rho\omega_{\xi\eta}, \\ u_{yy} &= \rho\omega_{\xi\xi}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

2. Преобразование Лежандра для функции n переменных. Для полноты дадим форму преобразования Лежандра в случае функций $u(x_1, \ldots, x_n)$ от n независимых переменных. Преобразование Лежандра дается тогда следующей системой формул:

$$\left.\begin{aligned} u(x_1, \ldots, x_n) + \omega(\xi_1, \ldots, \xi_n) &= x_1\xi_1 + \ldots + x_n\xi_n, \\ u_{x_1} = \xi_1, \ldots, \quad u_{x_n} &= \xi_n, \\ \omega_{\xi_1} = x_1, \ldots, \quad \omega_{\xi_n} &= x_n. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Для того, чтобы дать формулы, с помощью которых преобразуются вторые производные, обозначим через U и Ω определители матриц

$$\begin{pmatrix} u_{x_1x_1} \ldots u_{x_1x_n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ u_{x_nx_1} \ldots u_{x_nx_n} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} \omega_{\xi_1\xi_1} \ldots \omega_{\xi_1\xi_n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \omega_{\xi_n\xi_1} \ldots \omega_{\xi_n\xi_n} \end{pmatrix},$$

а адъюнкты элементов u_{x_ix} и $\omega_{\xi_i\xi_k}$ этих определителей — через U_{ik} и Ω_{ik} соответственно. В этих обозначениях искомые формулы выглядят так:

$$u_{x_ix_k} = \frac{\Omega_{ik}}{\Omega}, \quad \omega_{\xi_i\xi_k} = \frac{U_{ik}}{U}, \tag{6}$$

причем $\Omega U = 1$.

Применимость преобразования Лежандра, как нетрудно убедиться, связана здесь с условием $U \neq 0$ и соответственно $\Omega \neq 0$.

3. Применение преобразования Лежандра к дифференциальным уравнениям с частными производными. Рассмотрим дифференциальное уравнение с частными производными не выше второго порядка

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0. \tag{7}$$

Преобразование Лежандра относит интегральной поверхности $u(x, y)$ этого уравнения функцию $\omega(\xi, \eta)$. Уравнение $F=0$ переходит тогда в дифференциальное уравнение для функции ω, также не выше второго порядка, а именно:

$$G = F(\omega_\xi, \omega_\eta, \xi\omega_\xi + \eta\omega_\eta - \omega, \xi, \eta, \rho\omega_{\eta\eta}, -\rho\omega_{\xi\eta}, \rho\omega_{\xi\xi}) = 0, \tag{8}$$

где

$$\rho = \frac{1}{\omega_{\xi\xi}\omega_{\eta\eta} - \omega_{\xi\eta}^2}.$$

Однако, это дифференциальное уравнение дает нам вообще лишь неразвертывающиеся интегральные поверхности первоначального дифференциального уравнения, так как к развертывающимся поверхностям преобразование Лежандра не приложимо.

Преобразование Лежандра можно применить с успехом, в особенности для дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка, в том случае, если переменные x, y, u содержатся в дифференциальном уравнении сравнительно простым образом, производные же u_x, u_y — в более сложной комбинации.

В качестве примера рассмотрим уравнение

$$u_x u_y = x. \tag{9}$$

Преобразованием Лежандра оно приводится к виду

$$\xi\eta = \omega_\xi, \tag{10}$$

решение которого можно найти непосредственно:

$$\omega = \frac{1}{2}\xi^2\eta + w(\eta).$$

Из формул преобразования вытекает:

$$\left.\begin{aligned} x &= \xi\eta, \\ y &= \frac{1}{2}\xi^2 + w'(\eta), \\ u &= \xi^2\eta + \eta w'(\eta) - w(\eta). \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Исключив из этих трех уравнений ξ и η, получим искомое общее решение исходного дифференциального уравнения[1]).

---

[1]) Однако, здесь отсутствуют такие решения, на которых выражение $u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2$ исчезает. Но, дифференцируя уравнение $u_x u_y = x$ по x и y, имеем:

$$u_{xx}u_y + u_{xy}u_x = 1,$$
$$u_{xy}u_y + u_{yy}u_x = 0,$$

т. е. неоднородную систему уравнений, определитель которой $u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2$ может исчезать лишь при $u_{xy} = u_{yy} = 0$. Отсюда вытекает, что недостающие решения должны иметь вид

$$u = ay + \frac{1}{2a}x^2 + b$$

Напротив, для дифференциального уравнения

$$u_x u_y = 1 \tag{12}$$

преобразование Лежандра дает

$$\xi\eta = 1.$$

Это уравнение уже вовсе не дифференциальное и показывает, что на этот раз преобразование непригодно. Все решения уравнения $u_x u_y = 1$ должны быть развертывающимися поверхностями. Это немедленно подтверждается дифференцированием уравнения по x и y:

$$\left.\begin{aligned} u_{xx}u_y + u_{xy}u_x &= 0, \\ u_{xy}u_y + u_{yy}u_x &= 0; \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

так как возможность $u_x = u_y = 0$ исключена вследствие того, что $u_x u_y = 1$, то для всякой интегральной поверхности должно выполняться условие

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = 0\ ^{1)}.$$

Точно так же преобразование Лежандра отказывается служить для всякого дифференциального уравнения вида

$$F(u_x,\ u_y) = 0. \tag{14}$$

Третий интересный пример представляет *уравнение Клеро*, уже рассмотренное в § 4, п. 4:

$$xu_x + yu_y - u = f(u_x,\ u_y). \tag{15}$$

Преобразованием Лежандра оно приводится к простому уравнению

$$\omega = f(\xi,\ \eta). \tag{16}$$

Отсюда мы заключаем, что единственная не развертывающаяся интегральная поверхность дифференциального уравнения Клеро дается уравнением

$$\omega = f(\xi,\ \eta)$$

или, в точечных координатах:

$$\left.\begin{aligned} x &= f_\xi(\xi,\ \eta), \\ y &= f_\eta(\xi,\ \eta), \\ u &= \xi f_\xi + \eta f_\eta - f. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

с произвольными постоянными a и b. Это выражение действительно дает полный интеграл уравнения (9), и из него по правилу § 4 легко вновь найти полученное выше решение.

[1]) Впрочем дифференциальное уравнение (12) легко привести подстановкой $x = \frac{\xi^2}{2}$ к виду (9) и таким образом его решить; его можно также решить с помощью полного интеграла

$$u = ax + \frac{1}{a}\,y + b.$$

Это заключение подтверждается нижеследующим вычислением: дифференцируя уравнение (15) по x и y и полагая, для сокращения, $p = u_x$, $q = u_y$, получим формулы:

$$(x - f_p)\, u_{xx} + (y - f_q)\, u_{xy} = 0,$$
$$(x - f_p)\, u_{xy} + (y - f_q)\, u_{yy} = 0,$$

откуда вытекает, что для интегральной поверхности либо

$$D = u_{xx} u_{yy} - u_{xy}^2 = 0,$$

либо

$$x = f_p, \quad y = f_q.$$

Но последняя возможность дает как раз полученную выше исключительную поверхность.

Рассмотрим, наконец, в качестве примера дифференциальное уравнение второго порядка, именно — дифференциальное уравнение *минимальных поверхностей*:

$$(1 + u_y^2)\, u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2)\, u_{yy} = 0. \tag{18}$$

Оно нелинейно относительно производных функции $u(x, y)$. Это кажущееся усложнение можно устранить с помощью преобразования Лежандра, которое приводит уравнение (18) непосредственно к виду

$$(1 + \eta^2)\, \omega_{\eta\eta} + 2\xi\eta\omega_{\xi\eta} + (1 + \xi^2)\, \omega_{\xi\xi} = 0, \tag{19}$$

следовательно, к линейному дифференциальному уравнению. Позже (ср. дополнения к этой главе, § 1, гл. III, § 2, п. 2 и гл. VII, § 10) мы для этого дифференциального уравнения, знакомого нам уже из т. I, стр. 182, рассмотрим другие линеаризации, которые открывают простой доступ к теории минимальных поверхностей.

§ 7. Определение решений по их начальным значениям и теорема существования

1. Формулировка и разъяснение задачи с заданными начальными значениями (задачи Коши). Появление произвольных постоянных интегрирования в решениях обыкновенных дифференциальных уравнений лучше всего характеризуется предложениями о решениях *задачи с заданными начальными значениями*. Если обыкновенное дифференциальное уравнение порядка n для функции $u(x)$ можно привести к виду

$$u^{(n)} = f(x, u, u', u'', \ldots, u^{(n-1)}),$$

то можно для решения u в любой точке x_0, например, $x_0 = 0$, произвольно задать значения $u(x_0) = c_1$, $u'(x_0) = c_2, \ldots, u^{(n-1)}(x_0) = c_n$; общее решение является n-параметрическим семейством функций с этими начальными значениями $c_1, \ldots, c_n$ как параметрами.

Такого рода «начальные задачи» играют в математической физике важную роль, например, в тех вопросах, где требуется определить