Это заключение подтверждается нижеследующим вычислением: дифференцируя уравнение (15) по $x$ и $y$ и полагая, для сокращения, $p = u_x$, $q = u_y$, получим формулы:

$$(x - f_p)\, u_{xx} + (y - f_q)\, u_{xy} = 0,$$
$$(x - f_p)\, u_{xy} + (y - f_q)\, u_{yy} = 0,$$

откуда вытекает, что для интегральной поверхности либо

$$D = u_{xx} u_{yy} - u_{xy}^2 = 0,$$

либо

$$x = f_p, \quad y = f_q.$$

Но последняя возможность дает как раз полученную выше исключительную поверхность.

Рассмотрим, наконец, в качестве примера дифференциальное уравнение второго порядка, именно — дифференциальное уравнение *минимальных поверхностей*:

$$(1 + u_y^2)\, u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2)\, u_{yy} = 0. \tag{18}$$

Оно нелинейно относительно производных функции $u(x, y)$. Это кажущееся усложнение можно устранить с помощью преобразования Лежандра, которое приводит уравнение (18) непосредственно к виду

$$(1 + \eta^2)\, \omega_{\eta\eta} + 2\xi\eta\omega_{\xi\eta} + (1 + \xi^2)\, \omega_{\xi\xi} = 0, \tag{19}$$

следовательно, к линейному дифференциальному уравнению. Позже (ср. дополнения к этой главе, § 1, гл. III, § 2, п. 2 и гл. VII, § 10) мы для этого дифференциального уравнения, знакомого нам уже из т. I, стр. 182, рассмотрим другие линеаризации, которые открывают простой доступ к теории минимальных поверхностей.

## § 7. Определение решений по их начальным значениям и теорема существования

**1. Формулировка и разъяснение задачи с заданными начальными значениями (задачи Коши).** Появление произвольных постоянных интегрирования в решениях обыкновенных дифференциальных уравнений лучше всего характеризуется предложениями о решениях *задачи с заданными начальными значениями*. Если обыкновенное дифференциальное уравнение порядка $n$ для функции $u(x)$ можно привести к виду

$$u^{(n)} = f(x, u, u', u'', \ldots, u^{(n-1)}),$$

то можно для решения $u$ в любой точке $x_0$, например, $x_0 = 0$, произвольно задать значения $u(x_0) = c_1$, $u'(x_0) = c_2, \ldots, u^{(n-1)}(x_0) = c_n$; общее решение является $n$-параметрическим семейством функций с этими начальными значениями $c_1, \ldots, c_n$ как параметрами.

Такого рода «начальные задачи» играют в математической физике важную роль, например, в тех вопросах, где требуется определить

некоторую функцию состояния $u(x)$, зависящую от времени $x$ и удовлетворяющую выше написанному дифференциальному уравнению, по ее начальному состоянию при $x=0$, т. е. по ее начальному значению и начальным значениям первых $n-1$ производных.

Аналогичные задачи с начальными значениями, естественно, встречаются и в тех вопросах, где искомая величина $u$ зависит не только от временно́й переменной $x$, но еще и от других переменных $y, \ldots$. Разбором таких задач с начальными значениями мы и для дифференциальных уравнений с частными производными достигнем наиболее отчетливого объяснения многообразия решений, т. е. появления произвольных функций в общем решении. Ради краткости мы в изложении этого параграфа положим в основу случай двух независимых переменных $x$, $y$ с указанием, что все рассуждения могут быть распространены без существенных изменений на случай большего числа независимых переменных.

Разберем сначала несколько примеров.

1. Для дифференциального уравнения

$$\alpha u_x + \beta u_y = 0$$

имеем общее решение $u = w(\alpha y - \beta x)$ с произвольной функцией $w$. Положим теперь, что заданы произвольно начальные значения $u(0, y) = \varphi(y)$; в таком случае функция $w$ определится, если положить в общем решении $x=0$, мы получим решение $u = \varphi\left(y - \frac{\beta}{\alpha} x\right)$.

2. Рассмотрим более общее дифференциальное уравнение

$$\alpha(u) u_x + \beta(u) u_y = 0$$

ср. § 1, п. 1, пример 5), где теперь уже $\alpha$ и $\beta$ — заданные функции искомой величины $u$.

Мы ставим перед собой следующую задачу: найти решение, для которого $u(0, y) = \varphi(v)$ есть заданная функция.

Общее решение нашего дифференциального уравнения мы нашли в виде $\alpha(u) y - \beta(u) x = w(u)$ с произвольной функцией $w$. Эту произвольную функцию мы и здесь определяем из начального условия, подставляя в общее решение $x=0$ и $u=\varphi(y)$. Получим $w(\varphi) = \alpha(\varphi) y$. Если возможно обратить уравнение $u=\varphi(y)$ с помощью функции $y=\chi(u)$, то произвольная функция $w$ определена равенством $w(\varphi) = \alpha(\varphi)\chi(\varphi)$. Следовательно, искомое решение должно удовлетворять уравнению

$$\alpha(u) y - \beta(u) x = \alpha(u)\chi(u)$$

или же

$$u = \varphi\left(y - \frac{\beta(u)}{\alpha(u)} x\right).$$

Если из этого неявного задания определим функцию $u(x, y)$, то мы тем самым решим нашу задачу. (Один важный для нас в дальнейшем

частный случай мы в конце этого параграфа на стр. 56 разберем подробнее.)

3. В § 1, п. 1, пример 3 мы нашли общее решение дифференциального уравнения второго порядка $u_{xy}=f(x, y)$ в виде формулы (2). Интеграл по треугольной области, входящий в эту формулу, представляет то решение дифференциального уравнения, которое исчезает на заданной кривой $C$ вместе со своими производными $u_x$ и $u_y$. (Исчезание функции $u$ на кривой $C$ вытекает уже из факта исчезания производных $u_x$, $u_y$ на $C$, если задано $u=0$ в одной точке этой кривой.) Вообще же эта формула (2) представляет решение с произвольно заданными начальными значениями производных $u_x$ и $u_y$.

4. Простейшее *дифференциальное уравнение колебания*

$$u_{xx}-u_{yy}=0$$

для функции $u(x, y)$ приводит к задаче с начальными условиями: при $x=0$ произвольно задано начальное состояние $u(0, y)=\varphi(y)$ и $u_x(0, y)=\psi(y)$ (ср. т. I, гл. V, § 3). Из общего решения нашего дифференциального уравнения $u=f(y+x)+g(y-x)$ находим специальный вид функций $f$ и $g$ приспособлением его к начальным условиям: $f(y)+g(y)=\varphi(y)$, $f'(y)-g'(y)=\psi(y)$, откуда немедленно определяются функции $f$ и $g$ и, наконец, искомое решение $u$ в виде формулы

$$2u(x, y)=\varphi(y+x)+\varphi(y-x)+\int_{y-x}^{y+x}\psi(\lambda)\,d\lambda.$$

Для того, чтобы прийти к общей формулировке задачи с начальными условиями, мы будем предполагать, что заданные дифференциальные уравнения имеют вид, разрешенный относительно высших производных по $x$ от неизвестных функций.

Рассмотрим раньше всего дифференциальное уравнение первого порядка

$$F(x, y, u, p, q)=0, \tag{1}$$

где снова положено для краткости

$$p=u_x, \quad q=u_y,$$

и предположим, что это дифференциальное уравнение (1) может быть разрешено относительно $p$ в виде

$$p=f(x, y, u, q). \tag{2}$$

*Задача с начальными условиями*, или так называемая *задача Коши*, формулируется теперь так: требуется найти такое решение $u(x, y)$ дифференциального уравнения (2), которое при $x=0$ переходит в заданную функцию $u(0, y)=\varphi(y)$; или, выражаясь геометрически, найти такую интегральную поверхность, которая пересекает плоскость $x=0$ по заданной начальной кривой $u=\varphi(y)$.

Можно было бы поставить задачу общее: отыскать такую интегральную поверхность уравнения $F(x, y, u, p, q) = 0$, которая проходит через заданную пространственную кривую $u = \varphi(y)$, $x = \psi(y)$. Однако, если ввести вместо $x$ и $y$ новые независимые переменные $\xi = x - \psi(y)$, $\eta = y$ и положить $u(x, y) = u(\xi + \psi(\eta), \eta) = \omega(\xi, \eta)$, то дифференциальное уравнение приведется к виду

$$F(\xi + \psi(\eta), \eta, \omega, \omega_\xi, \omega_\eta - \psi'\omega_\xi) = G(\xi, \eta, \omega, \omega_\xi, \omega_\eta) = 0$$

с начальным условием $\omega(0, \eta) = \varphi(\eta)$. Таким образом, более общая задача приводится к задаче в ее первоначальном специальном виде, рассмотрением которого мы и ограничимся в последующем изложении.

При рассмотрении дифференциального уравнения второго порядка

$$F(x, y, u, p, q, r, s, t) = 0, \tag{3}$$

где для краткости, здесь и в дальнейшем, положено

$$r = u_{xx} = p_x, \quad s = u_{xy} = p_y = q_x, \quad t = u_{yy} = q_y,$$

мы тоже предполагаем, что в рассматриваемой области значений аргументов оно может быть разрешено относительно $r$ в следующем виде:

$$r = f(x, y, u, p, q, s, t). \tag{4}$$

Задача Коши для этого дифференциального уравнения ставится следующим образом. Найти такое решение $u(x, y)$, для которого при $x = 0$ функция $u$ и ее частная производная $u_x$ обращаются в заданные функции от $y$:

$$u(0, y) = \varphi(y), \quad u_x(0, y) = \psi(y). \tag{5}$$

Таким образом, вместо одной произвольной начальной функции $\varphi(y)$, как у дифференциального уравнения первого порядка, здесь участвуют две произвольно заданные начальные функции $\varphi(y)$ и $\psi(y)$.

Аналогичные задачи можно поставить и для дифференциальных уравнений высших порядков или для систем дифференциальных уравнений, например, для системы первого порядка

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} = f_i\left(x, y, u_1, \ldots, u_m, \frac{\partial u_1}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial u_m}{\partial y}\right) \quad (i = 1, \ldots, m),$$

причем для искомых функций $u_i(x, y)$ произвольно заданы начальные значения

$$u_i(0, y) = \varphi_i(y).$$

Если удастся показать, что наши задачи с начальными значениями, задачи Коши, имеют однозначно определенные решения, то тем самым будет полностью объяснено появление произвольных функций в общем решении.

**2. Приведение к системе квазилинейных дифференциальных уравнений.** Подробное исследование всех наших задач Коши принимает более ясную и единую форму, если их привести к эквива-

лентным задачам Коши для систем квазилинейных дифференциальных уравнений первого порядка. Правда, мы видели, что многообразие решений систем дифференциальных уравнений вообще не эквивалентно многообразию решений отдельных дифференциальных уравнений. Однако, мы покажем, что в нашем случае такая эквивалентность достигается, если рассматривать не просто дифференциальные уравнения, но дифференциальные уравнения совместно с дополнительными начальными условиями. Тогда естественно будет для системы дифференциальных уравнений, которая сама по себе дала бы более широкое многообразие решений, так специализировать начальные условия, чтобы, после этого, многообразия решений обеих задач Коши совпали.

Приведение к эквивалентной *квазилинейной* (а потому — принципиально более простой) *системе дифференциальных уравнений* мы выполним сначала для дифференциального уравнения первого порядка (2). Заметим, что заданием $u(0, y) = \varphi(y)$ одновременно предписываются и начальные значения $q(0, y) = \varphi'(y)$. Далее, уже дифференциальное уравнение (2) дает начальное условие для $p$, а именно:

$$p(0, y) = f(0, y, \varphi(y), \quad \varphi'(y)).$$

Дифференцируя уравнение (2) по $x$, получаем, что три величины $u$, $p$, $q$ удовлетворяют нижеследующей системе квазилинейных дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка:

$$\left.\begin{aligned} u_x &= p, \\ q_x &= p_y, \\ p_x &= f_x + f_u p + f_q p_y \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

и начальным условиям

$$\left.\begin{aligned} &u(0, y) = \varphi(y), \quad q(0, y) = \varphi'(y), \\ &p(0, y) = f(0, y, \varphi(y), \quad \varphi'(y)). \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Мы утверждаем, что эта задача Коши эквивалентна первоначальной.

Для этого достаточно показать, что для всякой системы решений $u$, $p$, $q$ системы уравнений (6), (7) выполняются равенства

$$p = f(x, y, u, q), \quad u_x = p, \quad u_y = q.$$

Но из первого уравнения системы (6) в силу того, что $p_y = q_x$, вытекает

$$u_{xy} = q_x$$

и, после интегрирования по $x$,

$$u_y(x, y) = q + v(y);$$

подставляя в это равенство $x = 0$, находим из начальных условий (7), так как, очевидно, $\varphi'(y) = u_y(0, y)$, что $v(y) = 0$, а, следовательно,

$$u_y = q$$

при всех значениях $x$ и $y$.

Далее, согласно третьему уравнению системы (6)

$$u_{xx} = p_x = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y, u, q);$$

интегрирование по $x$ дает:

$$u_x = f(x, y, u, q) + a(y).$$

Но так как при $x = 0$, наверно, $u_x = f$, то $a(y) = 0$ или $u_x = f(x, y, u, u_y)$; следовательно $u(x, y)$ есть решение первоначальной задачи.

Точно таким же способом можно убедиться, что задачу Коши для дифференциального уравнения второго порядка (4) с двумя начальными условиями (5) можно заменить эквивалентной задачей Коши для нижеследующей системы дифференциальных уравнений с шестью функциями $u$, $p$, $q$, $r$, $s$, $t$ независимых переменных $x$, $y$:

$$\begin{gathered} u_x = p, \quad q_x = p_y, \quad p_x = r, \\ s_x = r_y, \quad t_x = s_y, \\ r_x = f_x + f_u p + f_p r + f_q p_y + f_s r_y + f_t s_y \end{gathered}$$

с начальными условиями:

$$\begin{gathered} u(0, y) = \varphi(y), \quad p(0, y) = \psi(y), \quad q(0, y) = \varphi'(y), \\ t(0, y) = \varphi''(y), \quad s(0, y) = \psi'(y), \\ r(0, y) = f(0, y, \varphi(y), \psi(y), \varphi'(y), \psi'(y), \varphi''(y)). \end{gathered}$$

Из заданных в исходной задаче начальных условий и из дифференциального уравнения мы здесь извлекли подходящие дополнительные начальные данные для $q$, $t$, $s$, $r$. Точно так же, как и выше, обнаруживается, что величины $p$, $q$, $r$, $s$, $t$ совпадают с производными $u_x$, $u_y$, $u_{xx}$, $u_{xy}$, $u_{yy}$, что $u$ и $p$ принимают заданные начальные значения и что дифференциальное уравнение $r = f(x, y, u, p, q, s, t)$ удовлетворяется.

Аналогично можно предпринять замену квазилинейной системой и для дифференциального уравнения высшего порядка или для системы дифференциальных уравнений, о чем нет нужды подробнее распространяться.

Наши квазилинейные системы дифференциальных уравнений содержат еще в коэффициентах правой части независимые переменные $x$ и $y$. Часто оказывается формально удобно произвести преобразование с помощью небольшого технического приема к эквивалентной новой квазилинейной системе дифференциальных уравнений, в которую независимые переменные уже не входят явно и которая, сверх того, однородна относительно производных. Для этой цели вводим формально вместо $x$ и $y$ две новые функции $\xi(x, y)$ и $\eta(x, y)$ с помощью уравнений

$$\xi_x = \eta_y, \qquad \eta_x = 0 \tag{8}$$

с начальными условиями

$$\xi(0, y) = 0, \qquad \eta(0, y) = y, \tag{9}$$

которые имеют одну и только одну систему решений: $\xi = x$, $\eta = y$. Так как $\eta_y = 1$, то нашу задачу Коши (6), (7) можно также заменить новой, очевидно, эквивалентной, системой для пяти функций $u$, $p$, $q$, $\xi$, $\eta$:

$$\left.\begin{aligned} &u_x = p\eta_y, \qquad q_x = p_y, \\ &\xi_x = \eta_y, \qquad \eta_x = 0, \\ &p_x = f_q p_y + (f_x + pf_u)\eta_y. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

При этом в $f_q$, $f_x$, $f_u$ надо вместо $x$, $y$ всюду подставить $\xi$, $\eta$ и присоединить начальные условия:

$$\left.\begin{aligned} &u(0, y) = \varphi(y), \qquad q(0, y) = \varphi'(y), \\ &\xi(0, y) = 0, \qquad \eta(0, y) = y, \\ &p(0, y) = f(0, y, \varphi(y), \varphi'(y)). \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Тем самым для задачи Коши (2) установлена эквивалентная задача, имеющая желательную форму.

Аналогичное справедливо для задачи Коши второго порядка. Произведя, как и в задаче первого порядка, искусственную замену переменных $x$ и $y$ вспомогательными функциями $\xi$ и $\eta$, удовлетворяющими дифференциальным уравнениям (8) и начальным условиям (9), можно нашу задачу Коши (4), (5) тоже заменить эквивалентной задачей Коши для системы квазилинейных дифференциальных уравнений первого порядка, однородной относительно производных, с неизвестными функциями $u$, $p$, $q$, $r$, $s$, $t$, $\xi$, $\eta$.

Если обозначать неизвестные функции вообще через $u_1$, $u_2$, ..., то мы всегда придем к задаче Коши следующего вида:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} = \sum_{k=1}^{m} G_{ik}(u_1, u_2, \ldots, u_m)\frac{\partial u_k}{\partial y} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{12}$$

с заданными начальными условиями вида

$$u_i(0, y) = \varphi_i(y). \tag{13}$$

При этом коэффициенты $G_{ik}(u_1, \ldots, u_m)$ зависят явно лишь от искомых функций $u_i$, но не от независимых переменных $x$ и $y$.

К такой задаче Коши можно привести по вышеизложенному образцу и задачи Коши для дифференциальных уравнений выше второго порядка, а также для систем дифференциальных уравнений.

**3. Определение производных вдоль начального многообразия.** Решающим моментом для рассмотрения задачи Коши является следующий факт: с помощью дифференциальных уравнений и начальных данных можно дать однозначный процесс для вычисления дальнейших производных от искомой функции вдоль начального многообразия в предположении, что такие решения с непрерывными соответствующими производными существуют. Прежде всего вообще заметим,

что вдоль начальной кривой $x=0$ все уже известные величины, а именно $u$ и некоторые производные от $u$, если их продифференцировать по $y$, дают снова известные величины, т. е. дальнейшие производные. Еще недостающие производные, получающиеся дифференцированием по $x$, следует затем определить с помощью дифференциальных уравнений.

Например, для дифференциального уравнения $p=f(x, y, u, q)$ вдоль начальной кривой величины $q(0, y)=\varphi'(y)$, $t(0, y)=u_{yy}(0, y)=$ $=q_y(0, y)=\varphi''(y)$ и т. п. определяются по начальным данным. Само дифференциальное уравнение дает значение $p(0, y)=f(0, y, \varphi(y), \varphi'(y))$. Точно также затем известно $q_x=p_y=f_y+f_u q+f_q q_y$ при $x=0$. Для того, чтобы определить вдоль начальной кривой еще недостающую вторую производную $r=p_x=u_{xx}$, дифференцируем уравнение (2) по $x$ и получим $r=p_x=f_x+f_u p+f_q q_x$. Теперь, так как в правой части при $x=0$ согласно предыдущему стоят уже известные величины, то и левая часть определена при $x=0$.

Последовательно дифференцируя уже полученные величины, а также дифференциальное уравнение, получим все дальнейшие производные вдоль начальной кривой, коль скоро выполняется условие непрерывной дифференцируемости функции $f$ и решения $u$.

Аналогичным образом можно определить производные от $u$ вдоль начальной кривой для задачи Коши дифференциального уравнения второго порядка (4). Однако, для ясности и большей общности мы сразу рассмотрим общую задачу Коши (12), (13), охватывающую все встречавшиеся нам частные задачи. На системе этого вида особенно отчетливо видно, каким образом последовательно определяются производные функций $u_i$ вдоль начального многообразия, т. е. при $x=0$.

Сначала получают из функций $\varphi_i(y)$ дифференцированием производные $\frac{\partial u_i}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2}$, ... и т. д. на линии $x=0$, затем из дифференциальных уравнений — первые производные по $x$. Дифференцируя полученные величины по $y$, получают при $x=0$ смешанные производные $\frac{\partial^2 u_i}{\partial x\, \partial y}$. Дифференцируя затем систему дифференциальных уравнений (12) по $x$, получаем в правой части выражения, содержащие лишь первые и смешанные вторые производные функций $u_i$ по $x$ и $y$, а потому известные. Тем самым, следовательно, определены значения левых частей, а именно — вторые производные $\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}$ и т. д. Особенно подчеркиваем, что при этом последовательном определении производных применяются исключительно лишь процессы дифференцирования и внесения (подстановки).

Если допустить, что дифференцирования неограниченно выполнимы, то описанным процессом определяются (из начальных данных)

вдоль кривой $x=0$, в частности, следовательно, в точке $x=0$, $y=0$ [1]), все производные функций $u_i$.

Если известно, что решения $u_i$ в окрестности какой-либо точки начальной линии, например, точки $x=0$, $y=0$, допускают разложение в степенные ряды, то в силу предыдущего коэффициенты этих рядов Тэйлора, а, следовательно, и самые функции однозначно определены начальными условиями.

Естественно теперь обратить эти соображения. Если описанный выше процесс определения начальных производных неограниченно выполним, — а именно так обстоит дело, если сами дифференциальные уравнения и начальные функции *аналитические*, — то с помощью полученных производных, как коэффициентов, можно формально построить степенные ряды и исследовать, сходятся ли построенные таким образом ряды и решают ли они поставленную задачу Коши.

**4. Доказательство существования аналитических решений у аналитических дифференциальных уравнений.** Следуя Коши и Софье Ковалевской, докажем следующую фундаментальную теорему существования:

*Пусть $\varphi_1(y), \ldots, \varphi_m(y)$ — аналитические функции от $y$ в окрестности точки $y=y_0$. Пусть $\varphi_i(y_0)=u_i^0$. Пусть, далее, $G_{ik}(u_1, \ldots, u_m)$ — аналитические функции в окрестности $u_i=u_i^0$. В таком случае существует одна и только одна система функций $u_i(x, y)$, аналитических в окрестности точки $x=0$, $y=y_0$, которые удовлетворяют системе дифференциальных уравнений*

$$\frac{\partial u_i}{\partial x}=\sum_{k=1}^{m} G_{ik}\frac{\partial u_k}{\partial y} \qquad (i=1, \ldots, m) \tag{14}$$

*и при $x=0$ обращаются в заданные функции $\varphi_i(y)$.*

Сообразно с замечаниями п. 2 из этой теоремы существования тотчас получаем для дифференциальных уравнений первого и второго порядка: если в дифференциальном уравнении (2) [или (4) соответственно] $f$ — аналитическая функция своих аргументов в рассматриваемой области и если начальные функции $\varphi(y)$, $\psi(y)$ — аналитические функции от $y$, то формулированные там задачи Коши имеют одно и только одно аналитическое решение.

При доказательстве упомянутой фундаментальной теоремы можно без ограничения общности считать $y_0=0$ и $u_i^0=0$. В противном случае можно было бы, не изменяя вида дифференциальных уравнений, добиться выполнения этого требования введением $y-y_0$ в качестве нового независимого переменного и $u_i-u_i^0$ в качестве новой искомой функции. Выражая теперь предположение аналитического

---

[1]) Без ограничения общности можно считать, что точка $x=0$, $y=0$ лежит на начальной кривой. См. ниже в тексте, последний абзац этой страницы. (*Прим. перев.*)

характера наших данных, положим, что функции $G_{ik}$ и $\varphi_i$ даны в виде нижеследующих степенных рядов:

$$\varphi_i(y) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^i y^\nu, \tag{15}$$

$$G_{ik}(u_1, \ldots, u_m) = \sum_{\nu_1, \ldots, \nu_m = 0}^{\infty} b^{ik}_{\nu_1, \ldots, \nu_m} u_1^{\nu_1} \ldots u_m^{\nu_m}. \tag{16}$$

При этом пусть заданные степенные ряды (15), (16) сходятся в некоторой окрестности $|u_i| \leqslant r$, $|y| \leqslant \rho$ соответственно.

Наше утверждение состоит в том, что формулированная выше задача Коши имеет одно и только одно решение, допускающее разложение в степенные ряды

$$u_i(x, y) = \sum_{k, l} c_{kl}^i x^k y^l. \tag{17}$$

Из п. 3 мы знаем, что коэффициенты степенных рядов (17) однозначно определяются дифференциальными уравнениями и начальными данными. А именно, значения производных от пока еще гипотетических решений $u_i$ в точке $x = 0$, $y = 0$ получаем, просто подставляя в начальные производные, найденные по указаниям п. 3, частное значение $y = 0$. Тем самым, однако, коэффициенты $c_{kl}^i$ рядов (17) определены однозначно.

Если допустить, что формальные, определенные таким образом степенные ряды действительно сходятся в некоторой окрестности нулевой точки $x = 0$, $y = 0$, то на основании известных теорем их можно внутри области сходимости почленно дифференцировать и полученные степенные ряды внести в дифференциальные уравнения. Выражения, получившиеся в дифференциальных уравнениях, можно опять-таки расположить в степенные ряды по $x$ и $y$. Разности левых и правых частей дифференциальных уравнений оказываются, следовательно, степенными рядами по $x$ и $y$, исчезающими в начале координат вместе со всеми своими производными — это вытекает из самого способа получения последовательных производных функций $u_i$ в этой точке. Следовательно, разность левой и правой частей каждого дифференциального уравнения должна исчезать тождественно, т. е. функции $u_i$ представляют систему решений. Что эта система решений имеет предписанные начальные значения, а, следовательно, решает нашу задачу Коши, тоже непосредственно вытекает из построения степенных рядов (17) — все это в предположении, что они сходятся. *Таким образом, доказательство нашей теоремы существования будет дано, если сумеем показать, что наши степенные ряды* (17) *действительно сходятся внутри некоторой области.*

Для того, чтобы это доказать, рассмотрим точнее структуру коэффициентов $c_{kl}^i$ в их зависимости от коэффициентов $a_\nu^i$, $b^{ik}_{\nu_1, \ldots, \nu_m}$. Заметим сначала, что для получения коэффициентов $c_{kl}^i$ рядов (17)

по методу п. 3 мы вычисляли начальные значения последовательных производных функций $u_i(x, y)$, причем пользовались только лишь процессами дифференцирования рядов (15), (16), (14), подстановки ряда в ряд и внесения в полученные ряды значений $x=0$, $y=0$. Но при почленном дифференцировании степенного ряда возникают новые степенные ряды, коэффициенты которых получаются из первоначальных умножением на неотрицательные целые числа; при подстановке ряда в ряд встречаются исключительно лишь действия сложения и умножения. Ясно, что коэффициенты $c_{kl}^i$ получаются в виде полиномов относительно величин $a_\nu^i$, $b_{\nu_1,\ldots,\nu_m}^{ik}$. Коэффициенты этих многочленов — неотрицательные числа, которые уже не зависят от специального вида функций $G_{ik}$ и $\varphi_i$. Таким образом, для величин $c_{kl}^i$ получаются выражения вида

$$c_{kl}^i = P_{kl}^i(a_\nu^j,\ b_{\nu_1,\ldots,\nu_m}^{js}), \tag{18}$$

где $P_{kl}^i$ обозначает только что описанные полиномы с неотрицательными коэффициентами. Различные задачи Коши нашего типа с одним и тем же числом $m$ отличаются не видом этих функций $P_{kl}^i$, а только лишь значениями аргументов $a_\nu^j$, $b_{\nu_1,\ldots,\nu_m}^{js}$ этих функций.

После этих подготовительных соображений мы поведем требуемое доказательство сходимости на основе классического *метода мажорант*. Наряду с нашей первоначальной задачей Коши, с выражениями $G_{ik}$ и $\varphi_i$, рассмотрим новую задачу Коши, в которой функции $G_{ik}$ и $\varphi_i$ заменены другими функциями $K_{ik}$ и $\psi_i$. А именно, пусть в некоторой окрестности начала координат

$$\psi_i(y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu^i y^\nu, \tag{19}$$

$$K_{ik}(u_1, \ldots, u_m) = \sum_{\nu_1,\ldots,\nu_m=0}^{\infty} B_{\nu_1,\ldots,\nu_m}^{ik} u_1^{\nu_1} \ldots u_m^{\nu_m}, \tag{20}$$

причем

$$A_\nu^i \geqslant |a_\nu^i| \quad \text{и} \quad B_{\nu_1,\ldots,\nu_m}^{ik} \geqslant |b_{\nu_1,\ldots,\nu_m}^{ik}|.$$

Другими словами, коэффициенты разложения новых функций $K_{ik}$ и $\psi_i$ не отрицательны и должны быть не меньше модулей соответствующих коэффициентов разложения первоначальных функций $G_{ik}$ и $\varphi_i$. С этими функциями мы ставим задачу Коши:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x} = \sum_{k=1}^{m} K_{ik}(v_1, \ldots, v_m)\frac{\partial v_k}{\partial y} \qquad (i = 1, \ldots, m), \tag{21}$$

$$v_i(0, y) = \psi_i(y) \tag{22}$$

и эту задачу будем называть мажорантной задачей по отношению к первоначально поставленной.

Если для этой мажорантной задачи вычислить по образцу изложенного выше коэффициенты $C_{kl}^i$ разложения в степенной ряд гипотетических решений

$$v_i(x, y) = \sum C_{kl}^i x^k y^l, \tag{23}$$

то новые величины $C_{kl}^i$ выражаются через $A_\nu^i$ и $B_{\nu_1, \ldots, \nu_m}^{js}$ тем же самым образом, т. е. как те же самые функции

$$C_{kl}^i = P_{kl}^i (A_\nu^j, B_{\nu_1, \ldots, \nu_m}^{js})$$

от своих аргументов, что и первоначальные коэффициенты $c_{kl}^i$ от аргументов $a_\nu^j$ и $b_{\nu_1, \ldots, \nu_m}^{js}$. Но так как эти полиномы $P_{kl}^i$ имеют неотрицательные коэффициенты, то, очевидно,

$$C_{kl}^i \geqslant |c_{kl}^i|.$$

Таким образом, формальный степенной ряд (23) является мажорантой степенного ряда (17), а следовательно, сходимость нашего первоначального ряда (17) будет доказана, если сумеем доказать сходимость такого мажорантного ряда (23).

Для того, чтобы воспользоваться этим замечанием, мы поставим мажорантную задачу особенно простого вида, решение которой мы можем дать в явном виде, в силу чего сходимость мажорантного ряда будет установлена. Для этой цели мы выберем, как и выше, два таких положительных числа $r$ и $\rho$, чтобы степенные ряды для $G_{ik}(u_1, \ldots, u_m)$ и $\varphi_i(y)$ сходились при $|u_i| \leqslant r$ и $|y| \leqslant \rho$. В таком случае согласно известной теореме теории степенных рядов должна существовать такая постоянная $M$, что

$$|a_\nu^i| \leqslant \frac{M}{\rho^\nu} = A_\nu^i$$

и

$$|b_{\nu_1 \ldots \nu_m}^{js}| \leqslant \frac{M}{r^{\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_m}}.$$

Можно положить $M > \frac{r}{m}$, что мы и сделаем, имея в виду последующую цель. Имеем, следовательно,

$$|b_{\nu_1, \ldots, \nu_m}^{js}| \leqslant \frac{M}{r^{\nu_1+\cdots+\nu_m}} \frac{(\nu_1 + \ldots + \nu_m)!}{\nu_1! \ldots \nu_m!} = B_{\nu_1, \ldots, \nu_m}^{js}.$$

Мы, следовательно, полагаем [ср. формулы (19), (20)]:

$$\psi_i = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu^i y^\nu = M \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{y}{\rho}\right)^\nu, \tag{24}$$

$$K_{ik} = \sum_{\nu_1, \ldots, \nu_m = 0}^{\infty} B_{\nu_1, \ldots, \nu_m}^{js} u_1^{\nu_1} \ldots u_m^{\nu_m} =$$

$$= M \sum_{\nu_1, \ldots, \nu_m = 0}^{\infty} \left(\frac{u_1}{r}\right)^{\nu_1} \ldots \left(\frac{u_m}{r}\right)^{\nu_m} \frac{(\nu_1 + \ldots + \nu_m)!}{\nu_1! \ldots \nu_m!}. \tag{25}$$

Ряд (25) сходится, если ограничить значения аргументов $u_1, \ldots, u_m$ областью

$$|u_1|+|u_2|+\ldots+|u_m|<r,$$

причем тогда его сумма

$$K_{ik}(u_1, \ldots, u_m)=\frac{M}{1-\frac{u_1+\ldots+u_m}{r}}; \tag{26}$$

ряд (24) дает при $|y|<\rho$

$$\psi_i(y)=\frac{M\rho}{\rho-y}. \tag{27}$$

Мы имеем, следовательно, задачу Коши

$$\frac{\partial v_i}{\partial x}=\frac{M}{1-\frac{v_1+\ldots+v_m}{r}}\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial v_k}{\partial y}, \tag{28}$$

$$v_i(0, y)=\frac{M\rho}{\rho-y} \tag{29}$$

в качестве мажорантной по отношению к задаче Коши (14).

Нам остается теперь только доказать существование у этой системы решений $v_i(x, y)$, разлагающихся в степенные ряды в окрестности точки $x=0$, $y=0$.

Так как все функции $K_{ik}$ тождественны и то же самое справедливо для функции $\psi_i$, то естественно попытаться положить

$$v_i(x, y)=v(x, y),$$

т. е. что функции $v_i$ не зависят от $i$. Получится дифференциальное уравнение с частными производными

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{mM}{1-\frac{m}{r}v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

или

$$\left(1-\frac{m}{r}v\right)v_x-mMv_y=0 \tag{30}$$

и начальное условие

$$v(0, y)=v_0=\frac{M\rho}{\rho-y}. \tag{31}$$

Теперь, следовательно, надо еще только показать, что это задача Коши имеет решение $v(x, y)$, допускающее разложение в степенной ряд в некоторой достаточно малой окрестности начала координат.

Эта задача Коши совпадает с задачей, рассмотренной уже в п. 1, стр. 45 в качестве примера 2:

$$\alpha(u)u_x+\beta(u)u_y=0,$$
$$u(0, y)=\varphi(y),$$

причем решение было получено в неявной форме

$$u=\varphi\left(y-\frac{\beta(u)}{\alpha(u)}x\right).$$

В применении к нашему случаю для решения $v$ получается квадратное уравнение

$$\left(1-\frac{m}{r}v\right)y+mMx=\frac{\rho}{v}\left(1-\frac{m}{r}v\right)(v-M). \tag{32}$$

Из двух корней этого уравнения надо выбрать тот, который при $x=0$ и $y=0$ принимает значение $M$. Что такое решение существует, видно непосредственно из уравнения (32), которое при $x=0$, $y=0$ переходит в уравнение

$$\left(1-\frac{m}{r}v\right)(v-M)=0.$$

Вследствие условия $\frac{r}{m}<M$, значение которого здесь проявляется, оба корня различны при $x=y=0$. Поэтому дискриминант квадратного уравнения (32) отличен от нуля в начале координат, а, следовательно, и в некоторой окрестности начала координат. Следовательно, наш корень в окрестности начала координат, наверное, допускает разложение в сходящийся степенной ряд по $x$ и $y$.

И, действительно, нетрудно проверить, что такое решение можно дать в явном виде:

$$v=\frac{1}{2}\frac{M\left(1-\frac{rx}{\rho}\right)+\frac{r}{m}\left(1-\frac{y}{\rho}\right)}{1-\frac{y}{\rho}}+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\left[M\left(1-\frac{rx}{\rho}\right)-\frac{r}{m}\left(1-\frac{y}{\rho}\right)\right]^2-4\frac{rM}{m}\left(1-\frac{y}{\rho}\right)\frac{rx}{\rho}}}{1-\frac{y}{\rho}}. \tag{33}$$

Таким образом доказана сходимость мажорантных рядов (23), а, следовательно и сходимость первоначальных рядов (17) в некоторой окрестности начала координат. В силу замечания, набранного курсивом на стр. 53, тем самым дано доказательство существования для наших задач Коши.

## ДОПОЛНЕНИЯ К ГЛАВЕ I

### § 1. Дифференциальное уравнение для опорной функции минимальной поверхности

Нелинейное дифференциальное уравнение минимальной поверхности $u(x,y)$ можно написать (ср. т. I, стр. 171 и 181—182) в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{u_y}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}=0.$$