ГЛАВА II

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Данное в предыдущей главе построение решений дифференциальных уравнений с частными производными с помощью степенных рядов громоздко и, будучи связано с коренным предположением об аналитическом характере данных, представляется неподходящим для многих задач. Поэтому естественно для различных типов задач добиваться получения, при менее стеснительных условиях относительно данных, более прямых и по возможности также более простых методов решения.

Оказывается, что для дифференциальных уравнений первого порядка можно при незначительных предположениях непрерывности развить такую теорию интегрирования вполне удовлетворительным образом. Главным результатом этой главы будет *эквивалентность дифференциального уравнения с частными производными первого порядка некоторой системе обыкновенных дифференциальных уравнений*. Ключ к теории даст *понятие характеристик*, которое окажется решающим и позднее в задачах высшего порядка.

Существенно еще раз напомнить, что все встречающиеся производные мы будем предполагать непрерывными, не формулируя этого каждый раз в отдельности.

§ 1. Квазилинейные дифференциальные уравнения при двух независимых переменных

1. **Характеристические кривые.** Изложение теории характеристик мы начнем кратким повторением квазилинейных дифференциальных уравнений, рассмотренных уже в гл. I, § 5. При этом мы некоторые из рассуждений, проведенных в гл. I, должны будем повторить с других точек зрения. Сначала мы ограничимся случаем двух независимых переменных x, y:

$$au_x + bu_y = c, \tag{1}$$

где a, b, c — заданные функции от x, y, u, непрерывные вместе со своими первыми производными в рассматриваемой части пространства x, y, u и удовлетворяющие в ней условию $a^2 + b^2 \neq 0$.

Это дифференциальное уравнение с частными производными допускает следующее геометрическое истолкование: от интегральной поверхности $u = u(x, y)$ требуется, чтобы она в каждой точке P с координатами x, y, u имела касательную плоскость, направляющие коэффициенты которой $u_x = p$, $u_y = q$ связаны линейным уравнением $ap + bq = c$. Согласно этому уравнению упомянутые касательные плоскости всех интегральных поверхностей, проходящих через точку (x, y, u), принадлежат одному и тому же пучку плоскостей, ось которого в точке P дается соотношениями

$$dx : dy : du = a : b : c. \tag{2}$$

Наши пучки плоскостей и их оси называются соответственно *пучками* и *осями Монжа* [1]).

Точку P с проходящим через нее направлением оси Монжа мы будем называть «*характеристическим линейным элементом*».

Направления осей Монжа образуют в нашем пространстве поле направлений; линии поля этого поля направлений определяются системой обыкновенных дифференциальных уравнений (2) и называются «*характеристическими кривыми*» нашего дифференциального уравнения. На этих кривых можно ввести параметр s, и их дифференциальные уравнения примут следующий вид:

$$\frac{dx}{ds} = a, \qquad \frac{dy}{ds} = b, \qquad \frac{du}{ds} = c. \tag{2a}$$

Проекции характеристических кривых на плоскость x, y мы иногда будем называть «*характеристическими проекциями*».

Интегрировать дифференциальное уравнение с частными производными (1) это значит найти такие поверхности, касательная плоскость которых в каждой точке принадлежит пучку Монжа, или, что сводится к тому же, поверхности, которые в каждой точке имеют направление оси Монжа своим касательным направлением. Отсюда вытекает, что *всякая поверхность $u = u(x, y)$, образованная семейством характеристических кривых, зависящим от одного параметра, является интегральной поверхностью дифференциального уравнения с частными производными.*

Обратное предложение также справедливо: *всякая интегральная поверхность получается таким образом.* Эта обратная теорема доказывается аналитически следующим образом. На всякой заданной интегральной поверхности $u = u(x, y)$ дифференциального уравнения (1) системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{ds} = a, \qquad \frac{dy}{ds} = b,$$

где в a и b вместо u подставлена функция $u(x, y)$, определяется однопараметрическое семейство кривых

$$x = x(s), \qquad y = y(s), \qquad u = u(x(s), y(s)).$$

[1]) Ср. гл. I, § 4, п. 1.

Дифференциальное уравнение (1) с частными производными вдоль каждой такой кривой переходит в $\frac{du}{ds}=c$. Наше семейство с одним параметром удовлетворяет, следовательно, соотношениям (2а) и, следовательно, состоит из характеристических кривых. Но в дифференциальные уравнения параметр s явно не входит, и мы получим поэтому те же кривые, если заменим s через $s+\text{const}$. В этом смысле аддитивную постоянную в параметре s следует рассматривать как несущественную.

Так как решения системы дифференциальных уравнений (2а) однозначно определяются начальными значениями x, y, u при $s=0$, то имеем следующую теорему: *всякая характеристическая кривая, имеющая общую точку с интегральной поверхностью, лежит на этой интегральной поверхности полностью.* И, наконец: *всякая интегральная поверхность производится семейством характеристических кривых, зависящим от одного параметра.*

2. Задача Коши. Для обозрения многообразия решений дифференциального уравнения с частными производными рассмотрим следующую *задачу Коши.* Пространственная кривая C, имеющая проекцию C_0 на плоскость x, y без двойных точек [1]), определена заданием трех функций x, y, u параметра t, причем $x_t^2+y_t^2\neq 0$. Требуется найти в окрестности C_0 интегральную поверхность $u=u(x, y)$, проходящую через кривую C; другими словами, требуется найти такое решение дифференциального уравнения (1), для которого $u(t)=u(x(t), y(t))$ тождественно относительно t. От данных, т. е. от коэффициентов дифференциального уравнения и от начальных величин $x(t)$, $y(t)$, $u(t)$, *требуется лишь непрерывная дифференцируемость в рассматриваемой области, а не аналитический характер.*

Для решения задачи Коши проведем через каждую точку кривой C характеристическую кривую, т. е. интегральную кривую системы (2а), что однозначно выполнимо в некоторой окрестности. При этом получается семейство характеристических кривых, зависящее еще от параметра t:

$$x(s, t), \quad y(s, t), \quad u(s, t).$$

Эти кривые образуют поверхность $u(x, y)$, если возможно из первых двух функций выразить переменные s и t через x и y. Достаточным условием для этого является неисчезание функционального определителя

$$\Delta=x_s y_t-y_s x_t=ay_t-bx_t \tag{3}$$

---

[1]) Можно было бы впрочем допустить также и двойные точки, как у проекции C_0 кривой C на плоскость x, y, так и у самой кривой C; при этом мы имели бы дело с многозначными решениями и соответственно с интегральными поверхностями, пересекающими сами себя.

вдоль кривой C. При этом мы пользуемся известной теоремой об обыкновенных дифференциальных уравнениях [1]), на основании которой x, y, u — непрерывно дифференцируемые функции от s и t.

Если это условие $\Delta \neq 0$ выполнено, то u становится функцией от x и y, и в силу того, что $\frac{du}{ds} = au_x + bu_y$, третье дифференциальное уравнение $\frac{du}{ds} = c$ непосредственно эквивалентно заданному дифференциальному уравнению с частными производными. Тем самым *задача Коши для начальной кривой C решена. Единственность решения* вытекает сразу из данной выше теоремы, что характеристическая кривая, имеющая общую точку с интегральной поверхностью, должна вся лежать на этой поверхности. В самом деле, всякая интегральная поверхность, проходящая через кривую C, должна содержать все однопараметрическое семейство характеристик, проведенных через точки кривой C, а, следовательно, должна совпадать с u.

Условие $\Delta \neq 0$ вдоль C может быть истолковано геометрически следующим образом. Тангенциальное направление и характеристическое направление в каждой точке кривой C должны иметь различные проекции на плоскость x, y.

Если вдоль кривой C имеет место исключительный случай $\Delta = 0$ [2]), то для того, чтобы задача Коши была разрешима, кривая C должна сама быть характеристической. В самом деле, в этом случае можно так выбрать параметр t на кривой, чтобы вдоль кривой C было $a = \frac{dx}{dt}$, $b = \frac{dy}{dt}$; теперь уже дифференциальное уравнение (1) дает $c = \frac{du}{dt}$, а, следовательно, C действительно является характеристической кривой. Но если кривая C — характеристическая, то через нее, как начальную кривую, проходит не одна, а бесконечное множество интегральных поверхностей, которые все пересекаются по кривой C. Действительно, проведем через какую-либо точку кривой C другую кривую C', проекция которой нигде не является характеристической. Интегральная поверхность, проходящая через C', наверное, содержит характеристическую кривую C, а отсюда мы заключаем, что многообразие решений задачи Коши для кривой C дается многообразием кривых C'. Все соответствующие интегральные поверхности содержат кривую C. Следовательно, характеристические кривые можно охарактеризовать как такие кривые, по которым пересекаются две интегральные поверхности (*линии разветвления*), между тем как через все не характеристические кривые может проходить самое большее одна интегральная поверхность.

---

[1]) По поводу этой теоремы ср. аналогичные теоремы с доказательством в гл. V, § 5.

[2]) Мы оставляем здесь в стороне тот случай, когда Δ обращается в нуль лишь в изолированных точках или на каком-либо ином подмножестве точек кривой C.

Полученные результаты мы резюмируем в виде следующей теоремы [1]).

Если на начальной кривой C всюду $\Delta \neq 0$, то задача Коши имеет одно и только одно решение. Если же вдоль C всюду $\Delta = 0$, то для того, чтобы задача Коши имела решение, C должна быть характеристической кривой. В этом случае задача Коши имеет бесконечное число решений.

Мы указываем на то обстоятельство, что решениями задачи Коши могут быть лишь такие решения дифференциального уравнения (1), которые содержат кривую C и в окрестности C, а, следовательно, и на самой кривой C, непрерывны и непрерывно дифференцируемы. Без предположения непрерывной дифференцируемости функции u на кривой C нельзя заключать из условия $\Delta = 0$ вдоль C, что C есть характеристическая кривая. И, действительно, возможны решения дифференциального уравнения, проходящие через некоторую кривую C, на которой $\Delta = 0$, без того, чтобы C была характеристической кривой; конечно, в этом случае производные функции u уже не могут быть непрерывны на C. В таких случаях кривая C является *ребром возврата* (огибающей характеристик) *интегральной поверхности* $u(x, y)$, или, по меньшей мере, проекция кривой C на плоскость x, y является огибающей характеристических проекций. В окрестности проекции кривой C функция u уже не может быть определена как однозначная функция x и y.

3. Примеры. 1. В качестве иллюстрации полученных результатов рассмотрим дифференциальное уравнение

$$uu_x + u_y = 1. \tag{4}$$

Соответствующие характеристические дифференциальные уравнения будут

$$\frac{dx}{ds} = u, \qquad \frac{dy}{ds} = 1, \qquad \frac{du}{ds} = 1, \tag{5}$$

---

[1]) Теорема существования с явной формулировкой всех предположений гласила бы так. Пусть G_0 — область плоскости x, y, G — область пространства x, y, u, получающаяся из G_0 приобщением значений u, $|u| < U$. Пусть a, b, c — непрерывно дифференцируемые функции от x, y, u в области G. Пусть $x(t)$, $y(t)$, $u(t)$ — непрерывно дифференцируемые функции t при $|t| < T$ (причем $x_t^2 + y_t^2 \neq 0$), определяющие в области G кривую C, имеющую в G_0 проекцию C_0 без двойных точек. На кривой C дано $\Delta = ay_t - bx_t \neq 0$. В таком случае в G_0 существует подобласть G_0', содержащая кривую C_0, и в G_0' существует непрерывно дифференцируемая функция $u(x, y)$, которая удовлетворяет в G_0' дифференциальному уравнению $au_x + bu_y = c$ и на C_0 — начальному условию: $u(x(t), y(t)) = u(t)$. Решение u единственно.

В дальнейшем мы, из методических соображений, не будем давать столь подробные формулировки теорем существования. Мы будем позволять себе различные моменты сложных соотношений подчеркивать в разной степени соответственно их относительному значению.

общее решение которых

$$x = x_0 + \frac{s^2}{2} + u_0 s,$$
$$y = y_0 + s,$$
$$u = u_0 + s,$$

где x_0, y_0, u_0 — произвольные постоянные интегрирования. В частности, семейство характеристик, проходящих через заданную начальную кривую C:

$$x_0 = \varphi(t), \qquad y_0 = \psi(t), \qquad u_0 = \chi(t)$$

дается уравнениями

$$\left.\begin{aligned} x(s, t) &= \varphi(t) + s\chi(t) + \frac{s^2}{2}, \\ y(s, t) &= \psi(t) + s, \\ u(s, t) &= \chi(t) + s. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Определитель

$$\Delta(s, t) = x_s y_t - x_t y_s = s(\psi_t - \chi_t) + \chi\psi_t - \varphi_t$$

принимает на кривой C значение

$$\Delta = \Delta(0, t) = \chi\psi_t - \varphi_t. \tag{7}$$

Если вдоль C этот определитель $\Delta \neq 0$, то из уравнений (6) можно исключить параметры s и t, так что u можно представить как функцию от x и y. Действительно, прежде всего имеем:

$$u = y + \chi(t) - \psi(t),$$
$$x = \varphi(t) + \chi(t)[y - \psi(t)] + \frac{[y - \psi(t)]^2}{2},$$

а затем из второго уравнения t выражается как функция от x и y, если выражение

$$D = \varphi_t - \chi\psi_t + [y - \psi(t)](\chi_t - \psi_t)$$

отлично от нуля. При приближении к кривой C, $y - \psi(t) \to 0$, а так как $\varphi_t - \chi\psi_t \neq 0$, то существует, следовательно, такая окрестность кривой C, в которой $D \neq 0$, $t = t(x, y)$, а следовательно, $u = u(x, y)$.

Если за кривую C выбрать характеристику

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{2}t^2, \\ y_0 &= t, \\ u_0 &= t, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

то уравнения (6) переходят в уравнения

$$x = \frac{1}{2}(s + t)^2,$$
$$y = s + t,$$
$$u = s + t,$$

т. е. в другое представление той же кривой C.

Уравнение

$$x = \frac{1}{2} u^2 + w(u - y) \tag{9}$$

дает в неявной форме решение уравнения (4) при произвольной функции w, что можно впрочем получить и по методу § 5, п. 2 гл. I. Если выбрать w так, что $w(0) = 0$ и чтобы можно было выразить u однозначно из уравнения (9), то поверхность $u = u(x, y)$ проходит через заданную кривую.

Пусть, наконец, C — не характеристическая кривая

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= t^2, \\ y_0 &= 2t, \\ u_0 &= t. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Система (6) переходит в систему

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{s^2}{2} + st + t^2, \\ y &= s + 2t, \\ u &= s + t. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Определитель $\Delta(s, t) = s$ исчезает при $s = 0$ без того, чтобы C была характеристикой. Исключая s и t, имеем:

$$u(x, y) = \frac{y}{2} \pm \sqrt{x - \frac{y^2}{4}}; \tag{12}$$

эта двузначная функция представляет эллиптический параболоид, проходящий через кривую C; при $x > \frac{y^2}{4}$, т. е. вне кривой C, она удовлетворяет дифференциальному уравнению (4) с частными производными. Но функция (12) не решает задачи Коши, так как u_x и u_y неограниченно растут при приближении к кривой C. Эта кривая C не является ребром возврата поверхности $u = u(x, y)$, но она выделяется на поверхности в том отношении, что в окрестности проекции кривой C на плоскость x, y функция u уже не определяется однозначно.

2. Если дифференциальное уравнение (1) линейно, т. е. функции a, b, c не зависят от u, то исчезание определителя Δ вдоль нехарактеристической начальной кривой C означает, что многообразие, определяемое системой

$$x = x(s, t), \qquad y = y(s, t), \qquad u = u(s, t),$$

есть цилиндрическая поверхность с образующими, перпендикулярными плоскости x, y. Если предположить, что на кривой C выполняется условие

$$y_s u_t - u_s y_t \neq 0,$$

то можно выразить x в функции y и u. Покажем, что эта функция $x = f(y, u)$ не зависит от u.

Сначала заметим, что в случае линейного дифференциального уравнения из (2а) вытекает для определителя $\Delta = x_s y_t - x_t y_s$ соотношение

$$\Delta_s = (a_x + b_y)\Delta;$$

следовательно, если Δ исчезает на кривой C, то она исчезает везде. Теперь

$$x_s = f_y y_s + f_u u_s,$$

$$x_t = f_y y_t + f_u u_t,$$

а, следовательно,

$$\Delta = f_u (u_s y_t - u_t y_s),$$

откуда

$$f_u = 0 \quad \text{или} \quad x = f(y).$$

§ 2. Квазилинейные дифференциальные уравнения с n независимыми переменными

Если число n независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ больше двух, то в теории дифференциальных уравнений с частными производными не появляется никаких существенных изменений; в качестве нового момента присоединяется лишь то обстоятельство, что наряду с одномерными характеристическими кривыми и с n-мерными интегральными поверхностями приобретают еще значение характеристические многообразия C $(n-1)$ измерений. Интегральную поверхность можно построить, во-первых, из семейства характеристических кривых с $(n-1)$ параметрами или, во-вторых, из однопараметрического семейства характеристических многообразий $(n-1)$ измерений, каждое из которых, в свою очередь, производится семейством характеристических кривых, зависящих от $n-2$ параметров [1]).

Рассмотрим квазилинейное дифференциальное уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i} = a, \tag{1}$$

где как коэффициенты a_i, так и величина a — заданные функции переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n, u$, имеющие непрерывные производные, и $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \neq 0$. Геометрически это уравнение, очевидно, выражает, что поверхность $u(x_1, \ldots, x_n)$ пространства x, u в каждой своей точке содержит «характеристическое направление» $dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_n : du = a_1 : a_2 : \ldots : a_n : a$ в качестве касательного направления. Как и в случае двух независимых переменных, мы и здесь введем определение: зависящее от n параметров семейство кривых, которое опре-

---

[1]) Можно было бы также рассматривать и все промежуточные ступени (ср. сноску [1]) на стр. 107).