$|J_{u_\nu a_\mu}|$, а потому согласно условию не исчезает. Следовательно, $u_\nu' - \dot{u}_\nu = 0$, и эти кривые C являются экстремалями.

В следующем параграфе мы придем к другому доказательству теоремы Гамильтона-Якоби.

§ 10. Канонические преобразования и приложения

1. Каноническое преобразование. Каноническая форма характеристических дифференциальных уравнений вариационной задачи и, соответственно, дифференциального уравнения с частными производными первого порядка образует исходный пункт важной для приложений *теории канонических преобразований*. Пусть даны функция $L(v_\nu, u_\nu, s)$ и соответствующая каноническая система дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} \dot{u}_\nu &= L_{v_\nu}, \\ \dot{v}_\nu &= -L_{u_\nu}. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Спрашивается, возможно ли и как преобразовать канонически сопряженные переменные v_ν, u_ν к новым переменным

$$\eta_\nu = \eta_\nu(u_1, \ldots, u_n;\ v_1, \ldots, v_n); \qquad \omega_\nu = \omega_\nu(u_1, \ldots, u_n; v_1, \ldots, v_n) \tag{29}$$

и из функции $L(v_\nu, u_\nu, s)$ получить новую функцию $\Lambda(\eta_\nu, \omega_\nu, s)$ так, чтобы решениям канонических дифференциальных уравнений (28) соответствовали решения новой системы канонических дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} \dot{\omega}_\nu &= \Lambda_{\eta_\nu}, \\ \dot{\eta}_\nu &= -\Lambda_{\omega_\nu}. \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Такое преобразование переменных, а также канонической системы дифференциальных уравнений называется *каноническим преобразованием*. Проще всего получить канонические преобразования, исходя из вариационной задачи. В самом деле, наше требование будет выполнено, если в результате преобразования (29) подинтегральное выражение одной канонической вариационной задачи перейдет в подинтегральное выражение другой канонической вариационной задачи с точностью до слагаемого выражения типа дивергенции (ср. т. I, гл. IV, § 3, п. 5), которое не оказывает влияния на уравнения Эйлера. Этого можно, например, достигнуть, если выбрать преобразование (29) так, чтобы соотношение

$$\sum \dot{u}_\nu v_\nu - L(v_\nu, u_\nu, s) \equiv \sum \dot{\omega}_\nu \eta_\nu - \Lambda(\eta_\nu, \omega_\nu, s) + \frac{dW}{ds} \tag{31}$$

выполнялось тождественно относительно величин u_ν, ω_ν, $\dot{u}_\nu$, $\dot{\omega}_\nu$ с произвольно выбранной функцией

$$W = W(u_\nu, \omega_\nu, s)$$

и

$$\frac{dW}{ds} = \sum W_{\omega_\nu} \dot{\omega}_\nu + \sum W_{u_\nu} \dot{u}_\nu + W_s.$$

Наше уравнение (31) принимает следующий вид:

$$\sum \dot{u}_\nu (v_\nu - W_{u_\nu}) - \sum \dot{\omega}_\nu (\eta_\nu + W_{\omega_\nu}) - L + \Delta - W_s = 0,$$

и так как оно должно удовлетворяться тождественно в величинах u_ν, ω_ν, $\dot{u}_\nu$, $\dot{\omega}_\nu$, то получаем следующую теорему. Из соотношений

$$\left.\begin{aligned} v_\nu &= W_{u_\nu}, \\ \eta_\nu &= -W_{\omega_\nu}, \\ \Delta &= L + W_s \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

получается каноническое преобразование уравнений (28) в уравнения (30), зависящее от произвольной функции $W(u_\nu, \omega_\nu, s)$. При этом, разумеется, надо под конец ввести в выражение Δ, в качестве независимых переменных, вместо v_ν и u_ν величины η_ν и ω_ν.

К другим формам канонических преобразований приходим соответствующим образом, отдавая предпочтение другим переменным и исходя из второй формы канонической вариационной задачи, данной в § 9, п. 1, стр. 115. Пусть, например, W — произвольная функция от v_ν, ω_ν, s. В таком случае уравнения

$$\left.\begin{aligned} u_\nu &= W_{v_\nu}, \\ \eta_\nu &= -W_{\omega_\nu}, \\ \Delta &= -L + W_s \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

опять дают каноническое преобразование, если в функцию Δ ввести окончательно в качестве независимых переменных величины ω_ν, η_ν. Точно так же получим еще две соответствующие формы для канонических преобразований с помощью произвольных функций

$$W(u_\nu, \eta_\nu, s) \quad \text{и} \quad W(v_\nu, \eta_\nu, s).$$

Эти функции всегда характеризуются тем, что они зависят от одного ряда старых и одного ряда новых канонических переменных.

2. Новое доказательство теоремы Якоби. С помощью полученного результата можно дать простое новое доказательство теоремы Якоби. Для решения заданных канонических дифференциальных уравнений (28) мы попытаемся определить такое каноническое преобразование с функцией Δ, чтобы эта функция тождественно исчезала, следовательно, чтобы на каждой интегральной кривой обе новые канонически сопряженные переменные сохраняли постоянные значения.

Эту функцию Δ мы найдем на основе предположения, что мы располагаем решением $J(u_1, \ldots, u_n; a_1, \ldots, a_n, s)$ дифференциального уравнения Гамильтона $J_s + L(J_{u_\nu}, u_\nu, s) = 0$, зависящим, кроме независимых переменных, еще от n параметров $a_1, \ldots, a_n$ и для которого $|J_{u_\nu a_\mu}|$ в рассматриваемой области не равен нулю. И вот,

для определения канонического преобразования мы в качестве производящей функции $W(u_\nu, \omega_\nu, s)$ выбираем функцию $J(u_\nu, \omega_\nu, s)$ и согласно формулам (32) получаем каноническое преобразование

$$v_\nu = \frac{\partial J}{\partial u_\nu}, \qquad \eta_\nu = -\frac{\partial J}{\partial \omega_\nu}, \qquad \Delta = L(v_\nu, u_\nu, s) + \frac{\partial J}{\partial s}.$$

Так как наше дифференциальное уравнение удовлетворяется тождественно относительно величин $v_\nu = \frac{\partial J}{\partial u_\nu}$, u_ν и s, то, действительно, теперь $\Delta \equiv 0$. Следовательно, новые канонические дифференциальные уравнения будут

$$\dot{\omega}_\nu = 0, \qquad \dot{\eta}_\nu = 0$$

и их решения будут

$$\omega_\nu = a_\nu = \text{const},$$

$$\eta_\nu = J_{a_\nu} = b_\nu = \text{const},$$

что и выражает теорему Гамильтона-Якоби.

3. Вариация постоянных (каноническая теория возмущений). Дальнейшим приложением является важная для астрономии и атомной физики *каноническая теория возмущений*. Допустим, что функция L имеет вид суммы

$$L = L_1(v_\nu, u_\nu, s) + L_2(v_\nu, u_\nu, s) \tag{34}$$

и что интеграция канонических дифференциальных уравнений с функцией L_1 уже произведена, т. е. что мы уже располагаем полным интегралом $J(u_\nu, a_\nu, s)$ дифференциального уравнения с частными производными.

$$J_s + L_1\left(\frac{\partial J}{\partial u_\nu}, u_\nu, s\right) = 0.$$

Преобразуем теперь канонические дифференциальные уравнения задачи с функцией L с помощью канонического преобразования, причем в качестве производящей функции вместо W мы выберем $J(\omega_\nu, u_\nu, s)$. Другими словами, введем канонически сопряженные переменные при помощи формул

$$v_\nu = J_{u_\nu},$$

$$\eta_\nu = -J_{\omega_\nu}$$

и новую функцию Лежандра

$$\Delta = L + J_s = L - L_1 = L_2.$$

Если бы «возмущающий член» L_2 отсутствовал, т. е. равнялся нулю, то согласно п. 2 новые канонически сопряженные переменные сохраняли бы постоянные значения на всякой интегральной кривой нашей системы дифференциальных уравнений. Вообще же,

в силу наличия возмущающего члена L_2, они будут удовлетворять каноническим «уравнениям возмущения»

$$\dot{\omega}_\nu = \frac{\partial L_2}{\partial \eta_\nu}, \qquad \dot{\eta}_\nu = -\frac{\partial L_2}{\partial \omega_\nu}. \tag{35}$$

В некоторых случаях таким расщеплением задачи интеграции достигается значительное упрощение.

ДОПОЛНЕНИЯ К ГЛАВЕ II

§ 1. Новое рассмотрение характеристических многообразий

В этом параграфе мы дадим нашей теории задачи Коши несколько иное освещение, причем мы придем к выводу характеристического условия для характеристического многообразия, имеющему то преимущество, что его удобнее перенести на дифференциальные уравнения с частными производными высших порядков.

1. Предварительные формальные замечания по поводу дифференцирования в пространстве n измерений. В некоторой области независимых переменных $x_1, \ldots, x_n$ пусть дана функция $u(x_1, \ldots, x_n)$, обладающая непрерывными производными, и точке P с координатами $x_1, \ldots, x_n$ пусть отнесены числа $a_1, \ldots, a_n$, рассматриваемые совместно как вектор a, для которого $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \neq 0$. Через точку P можно провести прямую линию «параллельно вектору a» при помощи параметрических уравнений

$$\xi_1 = x_1 + a_1 s, \qquad \xi_2 = x_2 + a_2 s, \ldots, \qquad \xi_n = x_n + a_n s$$

с параметром s. Производной функции u по s или также производной функции u по «направлению», указанному вектором a, мы будем называть выражение

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \sum_i a_i u_{x_i}.$$

Следовательно, символ

$$\frac{\partial}{\partial s} = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

обозначает в каждой точке дифференцирование по направлению вектора a[1]).

Пусть в n-мерном пространстве задана поверхность B $n-1$ измерений уравнением $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0$ и $u(x_1, \ldots, x_n)$ — функция, имеющая непрерывные производные на этой поверхности и в ее окрестности. Пусть, далее, P есть точка этой поверхности, в которой

$$\sum_i \varphi_{x_i}^2 \neq 0,$$

---

[1]) Если величины a_i являются непрерывно дифференцируемыми функциями точки: $a_i = a_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то направления, определяемые этими величинами в каждой точке пространства, образуют поле направлений, линии