Сначала заметим, что в случае линейного дифференциального уравнения из (2а) вытекает для определителя $\Delta = x_s y_t - x_t y_s$ соотношение

$$\Delta_s = (a_x + b_y)\Delta;$$

следовательно, если Δ исчезает на кривой C, то она исчезает везде. Теперь

$$x_s = f_y y_s + f_u u_s,$$

$$x_t = f_y y_t + f_u u_t,$$

а, следовательно,

$$\Delta = f_u (u_s y_t - u_t y_s),$$

откуда

$$f_u = 0 \quad \text{или} \quad x = f(y).$$

§ 2. Квазилинейные дифференциальные уравнения с n независимыми переменными

Если число n независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ больше двух, то в теории дифференциальных уравнений с частными производными не появляется никаких существенных изменений; в качестве нового момента присоединяется лишь то обстоятельство, что наряду с одномерными характеристическими кривыми и с n-мерными интегральными поверхностями приобретают еще значение характеристические многообразия C $(n-1)$ измерений. Интегральную поверхность можно построить, во-первых, из семейства характеристических кривых с $(n-1)$ параметрами или, во-вторых, из однопараметрического семейства характеристических многообразий $(n-1)$ измерений, каждое из которых, в свою очередь, производится семейством характеристических кривых, зависящих от $n-2$ параметров [1]).

Рассмотрим квазилинейное дифференциальное уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i} = a, \tag{1}$$

где как коэффициенты a_i, так и величина a — заданные функции переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n, u$, имеющие непрерывные производные, и $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \neq 0$. Геометрически это уравнение, очевидно, выражает, что поверхность $u(x_1, \ldots, x_n)$ пространства x, u в каждой своей точке содержит «характеристическое направление» $dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_n : du = a_1 : a_2 : \ldots : a_n : a$ в качестве касательного направления. Как и в случае двух независимых переменных, мы и здесь введем определение: зависящее от n параметров семейство кривых, которое опре-

---

[1]) Можно было бы также рассматривать и все промежуточные ступени (ср. сноску [1]) на стр. 107).

деляется в пространстве x, u системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{ds} = a_i, \qquad \frac{du}{ds} = a \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{2}$$

называется *семейством характеристических кривых*, принадлежащим дифференциальному уравнению с частными производными; их проекции на пространство x-ов называются *характеристическими проекциями*.

Эти характеристические кривые определяются системой дифференциальных уравнений (2) без ссылки на решения дифференциального уравнения (1) с частными производными [1].

Связь между дифференциальным уравнением с частными производными (1) и системой (2) устанавливается нижеследующей теоремой:

На всякой интегральной поверхности $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ дифференциального уравнения с частными производными существует производящее эту поверхность семейство характеристических кривых, зависящее от $n-1$ параметров. Всякая поверхность $u = u(x_1, \ldots, x_n)$, производимая таким семейством, является интегральной поверхностью.

Далее,

Если характеристическая кривая имеет общую точку с интегральной поверхностью, то она лежит целиком на этой поверхности.

Для доказательства рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений $\frac{dx_i}{ds} = a_i (i = 1, \ldots, n)$, причем в правую часть $a_i(x_1, \ldots, x_n, u)$ вместо u подставлено решение $u(x_1, \ldots, x_n)$ дифференциального уравнения (1). Эта система определяет на интегральной поверхности семейство кривых, зависящее от $n-1$ параметров, которое, следовательно, эту поверхность производит. Вдоль этих кривых u становится функцией s, параметра на кривой, и мы имеем:

$$\frac{du}{ds} = \sum u_{x_i} \frac{dx_i}{ds} = \sum a_i u_{x_i},$$

---

[1]) Причина того, что $n+1$ характеристических дифференциальных уравнений (2) определяют семейство кривых, зависящее лишь от n параметров, лежит в наличии несущественной аддитивной постоянной интеграции в параметре s, не входящем явно в систему (2).

Следует подчеркнуть, что в специальном случае, когда коэффициенты a_i не зависят явно от u, уже дифференциальные уравнения $\frac{dx_i}{ds} = a_i (i = 1, \ldots, n)$ образуют определенную систему, которая определяет «характеристические проекции» как семейство кривых с $n-1$ параметрами в пространстве x-ов, между тем как в общем случае эти характеристические проекции образуют семейство, зависящее от n параметров.

а, следовательно, $\frac{du}{ds}=a$, так как u удовлетворяет дифференциальному уравнению (1). Следовательно, эти кривые оказываются характеристическими кривыми. Второе утверждение получается непосредственно так же, как и в § 1, из однозначной определенности характеристической кривой, проходящей через заданную точку.

Эту связь между дифференциальным уравнением (1) и системой (2) мы используем теперь для того, чтобы, обратно, из характеристических кривых, полученных с помощью характеристической системы дифференциальных уравнений, построить интегральные поверхности уравнения (1). Мы исходим при этом из следующей *задачи Коши*: с помощью $n-1$ независимых параметров $t_1, \ldots, t_{n-1}$ задано в пространстве $n+1$ измерений начальное многообразие C $n-1$ измерений:

$$x_i=x_i(t_1, \ldots, t_{n-1}) \quad (i=1, \ldots, n); \qquad u=u(t_1, \ldots, t_{n-1}),$$

причем предполагается, что ранг матрицы $\left(\frac{\partial x_i}{\partial t_\nu}\right)$ равен $n-1$. Проекцию C_0 этого многообразия на пространство x-ов предполагаем свободным от двойных точек, т. е. допускаем, что различным системам значений $t_1, \ldots, t_{n-1}$ соответствуют различные точки на C_0. В окрестности C_0 требуется найти такое решение $u(x_1, \ldots, x_n)$ дифференциального уравнения (1), которое проходит через многообразие C, т. е. переходит тождественно в $u(t_1, \ldots, t_{n-1})$, если величины x_i заменить через $x_i(t_1, \ldots, t_{n-1})$.

Для того, чтобы решить эту задачу Коши, найдем для заданной системы значений $t_1, \ldots, t_{n-1}$ решение характеристической системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2) в виде функций

$$x_i(s, t_1, \ldots, t_{n-1}), \qquad u(s, t_1, \ldots, t_{n-1}),$$

которые при $s=0$ обращаются в заданные выше функции от $t_1, \ldots, t_{n-1}$. Эти функции непрерывно дифференцируемы не только по s, но и по $t_1, \ldots, t_{n-1}$. Представим себе теперь, что из уравнений $x_i=x_i(s, t_1, \ldots, t_{n-1})$ величины $s, t_1, \ldots, t_{n-1}$ выражены, обратно, через $x_1, \ldots, x_n$ и подставлены в $u(s, t_1, \ldots, t_{n-1})$, так что u оказывается функцией от $x_1, \ldots, x_n$. Введение этих величин $x_1, \ldots, x_n$ в качестве новых независимых переменных, наверно, возможно в том случае, если функциональный определитель

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial s}, & \ldots, & \frac{\partial x_n}{\partial s} \\ \frac{\partial x_1}{\partial t_1}, & \ldots, & \frac{\partial x_n}{\partial t_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial t_{n-1}}, & \ldots, & \frac{\partial x_n}{\partial t_{n-1}} \end{vmatrix} = \frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial(s, t_1, \ldots, t_{n-1})} \tag{3}$$

вдоль C, т. е. при подстановке $s=0$, не обращается в нуль. На основании системы (2) имеем на C для элементов первой строки $\frac{\partial x_i}{\partial s}=a_i(x_1, \ldots, x_n, u)$, причем вместо x_i и u в правую часть следует подставить предписанные начальные значения как функции параметров $t_1, \ldots, t_{n-1}$.

Таким образом, функциональный определитель (3) тождественен определителю

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & \ldots & a_n \\ \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \ldots & \frac{\partial x_n}{\partial t_1} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \frac{\partial x_1}{\partial t_{n-1}} & \ldots & \frac{\partial x_n}{\partial t_{n-1}} \end{vmatrix}.$$

В предположении $\Delta \neq 0$ мы получим из $u(s, t_1, \ldots, t_{n-1})$ функцию $u(x_1, \ldots, x_n)$. Уравнение $\frac{du}{ds}=a$ переходит в уравнение

$$\sum u_{x_i}\frac{dx_i}{ds}=\sum a_i u_{x_i}=a;$$

следовательно, u есть решение дифференциального уравнения (1), и тем самым задача Коши решена. Следовательно, *в предположении $\Delta \neq 0$ задача Коши для нашего начального многообразия имеет однозначно определенное решение.*

В том исключительном случае, когда $\Delta=0$ вдоль C, наше решение задачи Коши отказывается служить. Спрашивается: какие дальнейшие условия следует присоединить, чтобы задача Коши имела решение и в этом случае?

Прежде всего выразим факт существования равенства $\Delta=0$ следующим образом:

Существует $n-1$ однозначно определенных множителей

$$\lambda_i(t_1, \ldots, t_{n-1}),$$

непрерывно зависящих от параметров, такого рода, что вдоль C выполняются линейные зависимости

$$a_i=\sum_{\nu=1}^{n-1}\lambda_\nu\frac{\partial x_i}{\partial t_\nu}. \tag{4}$$

Действительно, это вытекает непосредственно из равенства нулю определителя Δ и из неравенства нулю по крайней мере одного из миноров элементов первой строки.

Для того, чтобы формулировать искомые условия, введем теперь понятие «*характеристического многообразия* $(n-1)$ *измерений*» — сначала, пользуясь геометрическим языком, отнеся каждой точке

$x_1, \ldots, x_n$, u пространства x, u «*характеристический вектор*» $a_1, \ldots, a_n$, a.

Многообразие C называется характеристическим, если в каждой его точке соответствующий характеристический вектор направлен тангенциально к многообразию.

Представляя многообразие C с помощью $n-1$ параметров $t_1, \ldots, t_{n-1}$, мы формулируем наше определение аналитически: C называется характеристическим многообразием для дифференциального уравнения с частными производными $\sum a_i u_{x_i} = a$, если существует $n-1$ множителей $\lambda_i(t_1, \ldots, t_{n-1})$, $(i = 1, \ldots, n-1)$, такого рода, что в C выполняются соотношения

$$a_i = \sum_{\nu=1}^{n-1} \lambda_\nu \frac{\partial x_i}{\partial t_\nu} \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{5}$$

$$a = \sum_{\nu=1}^{n-1} \lambda_\nu \frac{\partial u}{\partial t_\nu}, \tag{5a}$$

т. е. что характеристический вектор линейно выражается через $n-1$ линейно независимых тангенциальных векторов с компонентами $\frac{\partial x_1}{\partial t_\nu}, \ldots, \frac{\partial x_n}{\partial t_\nu}, \frac{\partial u}{\partial t_\nu}$ $(\nu = 1, \ldots, n-1)$.

Для характеристического многообразия квазилинейного дифференциального уравнения справедливы следующие теоремы:

Всякое характеристическое многообразие $n-1$ измерений производится семейством характеристических кривых, зависящим от $n-2$ параметров; обратно, всякое такое семейство характеристических кривых производит характеристическое многообразие.

Если характеристическая кривая Γ имеет общую точку с характеристическим многообразием C, то она лежит целиком в этом многообразии.

Для доказательства первой теоремы рассмотрим в многообразии параметров t_i одномерную кривую, представленную в параметрической форме с помощью параметра s: $t_i = t_i(s)$, или, лучше, семейство таких кривых, зависящее от $n-2$ параметров и определяемое системой $n-1$ обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dt_\nu}{ds} = \lambda_\nu(t_1, \ldots, t_{n-1}). \tag{6}$$

Тогда функции $x_i(t_1, \ldots, t_{n-1})$ и $u(t_1, \ldots, t_{n-1})$ перейдут в функции от s, для которых

$$\frac{dx_i}{ds} = \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{\partial x_i}{\partial t_\nu} \lambda_\nu \quad \text{и} \quad \frac{du}{ds} = \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{\partial u}{\partial t_\nu} \lambda_\nu,$$

а, следовательно, на основании определяющих уравнений (5) и (5а) характеристического многообразия

$$\frac{dx_i}{ds} = a_i, \qquad \frac{du}{ds} = a.$$

Но это выражает тот факт, что наши кривые

$$x_i = x_i(s, t_1, \ldots, t_{n-1}),$$
$$u = u(s, t_1, \ldots, t_{n-1}),$$

лежащие в многообразии C, являются характеристическими кривыми. Так как они образуют семейство, зависящее от $n-2$ параметров, то они производят многообразие C. Обращение этой теоремы само собой понятно, так как многообразие, производимое семействами характеристических кривых, в каждой своей точке, наверное, касается соответствующего характеристического вектора.

Вторая теорема вытекает непосредственно из того факта, что решения характеристических дифференциальных уравнений определяются однозначно тем начальным условием, что они должны содержать точку многообразия C, ибо согласно изложенному выше через эту точку уже проходит характеристическая кривая, полностью лежащая в многообразии C.

Теперь можно уже формулировать, в качестве окончательного результата, следующую основную теорему:

Если $\Delta \neq 0$ вдоль начального многообразия C, то через C проходит одно и только одно решение задачи Коши. Если же вдоль C всюду $\Delta = 0$, то для того, чтобы задача Коши имела решение, необходимо и достаточно, чтобы многообразие C было характеристическим. В этом случае существует бесконечно большое число решений задачи Коши, и C является многообразием разветвления.

Осталось доказать только ту часть теоремы, которая относится к случаю $\Delta = 0$. Из предположения $\Delta = 0$ вытекало существование таких $n-1$ множителей λ_ν, представляющих непрерывные и дифференцируемые функции параметров $t_1, \ldots, t_{n-1}$, что выполняются соотношения (4) или, что же самое, (5). Но можно доказать и недостающее условие (5а) в предположении, что через C проходит интегральная поверхность $u = u(x_1, \ldots, x_n)$. Для решения u вдоль многообразия C справедливо равенство

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} \lambda_\nu \frac{\partial u}{\partial t_\nu} = \sum_{\nu=1}^{n-1} \lambda_\nu \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t_\nu} = \sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i},$$

откуда

$$a = \sum \lambda_\nu \frac{\partial u}{\partial t_\nu},$$

так как u удовлетворяет дифференциальному уравнению (1). Но это и требовалось доказать[1]).

---

[1]) Этот результат легко впрочем усмотреть и геометрически без вычислений, если заметить, что характеристический вектор должен быть каса-

Обратно, если C есть характеристическое многообразие, то можно построить бесконечное множество содержащих это многообразие решений дифференциального уравнения (1) следующим образом: выбираем произвольное многообразие $n-1$ измерений C', пересекающее C по многообразию S $n-2$ измерений так, чтобы на C' всюду было $\Delta \neq 0$. Через C' проходит однозначно определенная интегральная поверхность J'. Но эта поверхность на основании указанного выше ее построения содержит все характеристические кривые, проходящие через S, а, следовательно, и многообразие C, которое они производят. Тем самым доказательство нашей основной теоремы доведено до конца.

§ 3. Общие дифференциальные уравнения первого порядка с двумя независимыми переменными

1. Характеристические и фокальные кривые. Рассмотрим общее дифференциальное уравнение

$$F(x, y, u, p, q) = 0, \tag{1}$$

где для сокращения положено $p = u_x$, $q = u_y$. Соответственно нашему постоянному соглашению мы будем предполагать, что F в рассматриваемой области есть непрерывная функция своих пяти аргументов, имеющая непрерывные производные первого и второго порядков по этим аргументами. Мы подчеркиваем еще предположение

$$F_p^2 + F_q^2 \neq 0.$$

Дифференциальное уравнение (1) можно истолковать геометрически в пространстве x, y, u следующим образом (ср. гл. I, § 4): в каждой из рассматриваемых точек x, y, u от направляющих коэффициентов p, q касательной плоскости к интегральной поверхности $u = u(x, y)$ требуется выполнение соотношения $F = 0$. Это уравнение теперь уже не линейно относительно p и q; поэтому возможные касательные плоскости уже не образуют вообще пучка плоскостей; мы допускаем, что они образуют однопараметрическое семейство и огибают некоторый конус, *конус Монжа*. Следовательно, дифференциальное уравнение относит каждой точке (x, y, u) рассматриваемой части пространства такой конус Монжа; задача интегрирования дифференциального уравнения с частными производными состоит в отыскании таких поверхностей, которые в каждой своей точке касаются соответствующего конуса.

Вместо соотношения $F = 0$ для их касательных плоскостей конусы Монжа можно также охарактеризовать с помощью соотноше-

---

тельным к интегральной поверхности; так как его проекция на пространство x-ов в силу соотношений (5) тангенциальна к проекции многообразия C на пространство x-ов, то отсюда вытекает, что он сам направлен тангенциально к C.